Géométrie projective différentielle.

Sur les Surfaces ayant mêmes quadriques de Lie

(*Première note*),

par Lucien GODEAUX, Professeur à l'Université de Liége.

Nous considérons, dans cette note, deux surfaces (x), (y) se correspondant point par point, de telle sorte que si x, y sont deux points homologues, les quadriques de Lie attachées à ces surfaces en ces points coïncident. De tels couples de surfaces ont déjà fait l'objet de recherches de M. Demoulin (*); nous utiliserons les résultats de ces recherches. En deux points homologues, les surfaces (x), (y) ont mêmes directrices de Wilczynski : l'une de ces directrices est la droite joignant les deux points homologues des surfaces, l'autre est l'intersection des plans tangents aux surfaces en ces points. Dans cette note et dans une autre qui lui fera suite, nous étudierons les congruences formées par les directrices de Wilczynski.

1. Soit (x) une surface non réglée rapportée à ses asymptotiques u, v. Les coordonnées projectives x_1, x_2, x_3, x_4 d'un point x de cette surface sont des fonctions analytiques des variables u, v. M. Wilczynski a montré (**) que l'on pouvait disposer du facteur de proportionnalité des coordonnées projectives homogènes, de manière que ces dernières satisfassent aux équations linéaires, aux dérivées partielles (***)

$$\left.\begin{aligned} x^{20} + 2bx^{01} + c_1x = 0, \\ x^{02} + 2ax^{10} + c_2x = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

(*) A. Demoulin, Sur la quadrique de Lie (*C. R.*, 1908, t. CXLVII, pp. 493-496). Sur les surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que deux points caractéristiques (*C. R.*, 1924, t. CLXXIX, pp. 20-23).

(**) Wilczynski, Projective differential geometry of curved surfaces. (*Transactions of the american mathem. Society*, 1907, t. VIII, pp. 233-260; 1908, t. IX, pp. 79-120.)

(***) Nous posons, pour abréger,

$$x^{ik} = \frac{\partial^{i+k} x}{\partial u^i \, \partial v^k},$$

et nous représentons par x^{ik} le point dont les coordonnées sont x_1^{ik}, x_2^{ik}, x_3^{ik}, x_4^{ik}.

où a, b, c_1, c_2 sont des fonctions analytiques de u, v, les deux premières n'étant pas nulles.

Les conditions d'intégrabilité du système (1) sont

$$\left.\begin{aligned} a + c_2^{10} + 2ba^{01} + 4ab^{01} &= 0, \\ b^{02} + c_1^{01} + 2ab^{10} + 4ba^{10} &= 0, \\ c_1^{02} + 2ac_1^{10} - 4c_1b^{01} &= c_2^{20} + 2bc_2^{01} - 4c_2a^{10}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Considérons les points U, V qui représentent, sur l'hyperquadrique de Klein Q d'un espace linéaire S_5 à cinq dimensions, les tangentes xx^{10}, xx^{01} aux lignes asymptotiques de la surface (x). Nous posons symboliquement (*)

$$U = |x\ x^{10}|, \qquad V = |x\ x^{01}|.$$

Les surfaces (U), (V) appartiennent à une suite de Laplace. On a précisément

$$U^{10} + 2bV = 0, \qquad V^{01} + 2aU = 0.$$

Nous désignerons par U_1, U_2, ... les transformés de Laplace successifs du point U dans le sens des v, par V_1, V_2, ... ceux du point V dans le sens des u.

Si les quadriques de Lie Φ de la surface (x) n'ont que deux points caractéristiques (dont l'un est le point x), la suite de Laplace ... U_2, U_1, U, V, V_1, V_2, ... a la période six et réciproquement. Nous nous placerons ici dans cette hypothèse.

2. A chaque point x de la surface (x), attachons le tétraèdre de sommets x, x^{10}, x^{01}, x^{11}. Un point y a pour coordonnées

(*) Les surfaces (U), (V) ont été considérées par M. Bompiani dans un mémoire « Sull'equazione di Laplace » (*Rendiconti del Circ. matem. di Palermo,* 1912, t. XXXIV, pp. 383-407), et par M. Tzitzeica dans son ouvrage sur la « Géométrie différentielle projective des réseaux » (Paris, Gauthier-Villars, 1924). Nous avons utilisé ces surfaces dans deux notes « Sur les lignes asymptotiques d'une surface et l'espace réglé » (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique,* 1927, pp. 811-825; 1928, pp. 31-41), que nous supposons connues du lecteur.

*

locales, par rapport à ce tétraèdre, des quantités z_1, z_2, z_3, z_4 définies par quatre relations, que nous condensons en une seule :

$$y = z_1 x + z_2 x^{10} + z_3 x^{01} + z_4 x^{11}.$$

La quadrique de Lie relative au point x a pour équation, en coordonnées locales,

$$z_1 z_4 - z_2 z_3 + 2ab z_4^2 = 0. \tag{3}$$

Les points caractéristiques de la quadrique de Lie sont donnés par

$$\left.\begin{aligned} 2b z_2^2 + 2b^{01} z_2 z_4' + [b^{02} + 2b(a^{10} + c_2)] z_4^2 = 0, \\ 2a z_3^2 + 2a^{10} z_3 z_4 + [a^{20} + 2a(b^{01} + c_1)] z_4^2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Pour que les quadriques de Lie (3) n'aient que deux points caractéristiques, les premiers membres des équations (4) doivent être des carrés parfaits ; on doit donc avoir

$$2(\log b)^{02} + \overline{(\log b)^{01}}^2 + 4(a^{10} + c_2) = 0, \tag{5}$$

$$2(\log a)^{20} + \overline{(\log a)^{10}}^2 + 4(b^{01} + c_1) = 0. \tag{6}$$

L'un des points caractéristiques de la quadrique (3) est le point x ($z_2 = z_3 = z_4 = 0$) ; le second point caractéristique appartient aux plans

$$2b z_2 + b^{01} z_4 = 0, \qquad 2a z_3 + a^{10} z_4 = 0$$

et ses coordonnées locales sont donc

$$\frac{z_1}{4ab - \frac{1}{2}(\log a)^{10}(\log b)^{01}} = \frac{z_2}{(\log b)^{01}} = \frac{z_3}{(\log a)^{10}} = \frac{z_4}{-2}.$$

Les coordonnées générales de ce point sont, par suite, données par

$$y = \left[4ab - \frac{1}{2}(\log a)^{10}(\log b)^{01}\right] x + x^{10}(\log b)^{01} + x^{01}(\log a)^{10} - 2x^{11}.$$

Le point y engendre une surface (y) dont les lignes asymptotiques sont les lignes u, v. De plus, en deux points homologues x, y, les surfaces (x), (y) ont même quadrique de Lie. Les droites xx^{10}, yy^{10} ont en commun un point m et les droites xx^{01}, yy^{01} ont en commun un point n (*).

La quadrique de Lie commune aux surfaces (x), (y) aux points homologues x, y, est représentée, dans l'espace S_5, par les plans UU_1U_2, VV_1V_2, conjugués par rapport à l'hyperquadrique Q.

Les tangentes yy^{10} aux lignes asymptotiques u de la surface (y) sont représentées, sur Q, par les points de la surface (V_2) et les tangentes yy^{01} aux lignes asymptotiques v, par les points de (U_2).

3. — Nous allons calculer les invariants des équations de Laplace auxquelles satisfont les coordonnées des points U, U_1, U_2, V, V_1, V_2. Les invariants de l'équation satisfaite par les coordonnées de U sont

$$4ab, \qquad h_1 = -(\log b)^{11} + 4ab.$$

En dérivant l'équation (5) par rapport à u et en tenant compte de la première des relations (2), on trouve

$$(\log b h_1)^{01} = 0. \tag{7}$$

Les invariants de l'équation satisfaite par les coordonnées de U_1 sont

$$h_1, \qquad h_2 = -(\log h_1)^{11} + h_1 = h_1.$$

Les invariants de l'équation satisfaite par les coordonnées de U_2 sont

$$h_2 = h_1, \quad h_3 = -(\log b h_1 h_2)^{11} + 4ab = -(\log b^3 h_1^2 h_2)^{11} + 4ab = 4ab.$$

De même, si $4ab$ et k_1, k_1 et k_2, k_2 et k_3 sont les invariants des équations de Laplace auxquelles satisfont respectivement les coordonnées des points V, V_1, V_2, on a

$$(\log a k_1)^{10} = 0, \tag{8}$$
$$k_2 = k_1, \qquad k_3 = 4ab.$$

(*) Demoulin, *loc. cit.*

Les coordonnées des points U_2, V_2 satisfont aux équations de Laplace

$$U_2^{11} + (\log b)^{01} U_2^{10} - h_1 U_2 = 0,$$
$$V_2^{11} + (\log a)^{10} V_2^{01} - k_1 V_2 = 0.$$

4. — Posons

$$H = \frac{1}{2} x (\log a)^{10} - x^{10}, \quad H_1 = \frac{1}{2} x^{01} (\log a)^{10} - x^{11}.$$

Nous avons
$$y = -(\log b)^{01} H + 2H_1 + 4abx.$$

En dérivant par rapport à u et en tenant compte des relations (2), (5), (6), on a

$$y^{10} = \left[\frac{1}{2}(\log a)^{10}(\log b)^{01} - (\log b)^{11}\right] H - (\log a)^{10} H_1 - 4abx^{10}.$$

On en déduit
$$y(\log a)^{10} + 2y^{10} = 2h_1 H.$$

Il en résulte que le point H est commun aux droites xx^{10}, yy^{10}; c'est le point que nous avons désigné plus haut par m et nous écrirons donc

$$m = \frac{1}{2} x (\log a)^{10} - x^{10} = \frac{1}{h_1}\left[\frac{1}{2} y (\log a)^{10} + y^{10}\right]. \tag{9}$$

De même, pour le point n, commun aux droites xx^{01}, yy^{01}, on a

$$n = \frac{1}{2} x (\log b)^{01} - x^{01} = \frac{1}{k_1}\left[\frac{1}{2} y (\log b)^{01} + y^{01}\right]. \tag{10}$$

On déduit de ces relations les équations différentielles auxquelles satisfont les coordonnées du point y.

De la relation (9), on déduit

$$2y^{20} + y^{10}(\log a)^{10} + y(\log a)^{20} = [2h_1^{10} - h_1(\log a)^{10}]\, m - 4bh_1 n;$$

d'où, en vertu de (9) et (10),

$$y^{20} + \left(\log \frac{a}{h_1}\right)^{10} y^{10} + 2b\,\frac{h_1}{k_1}\,y^{01} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\log a)^{20} + \frac{1}{4}\overline{(\log a)^{10}}^{2} \\ -\frac{1}{2}(\log a)^{10}(\log h_1)^{10} \\ +b\,\frac{h_1}{k_1}(\log b)^{01} \end{bmatrix} y = 0. \quad (11)$$

On obtient de même

$$y^{02} + 2a\,\frac{k_1}{h_1}\,y^{10} + \left(\log \frac{b}{k_1}\right)^{01} y^{01} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\log b)^{02} + \frac{1}{4}\overline{(\log b)^{01}}^{2} \\ -\frac{1}{2}(\log b)^{01}(\log k_1)^{01} \\ +a\,\frac{k_1}{h_1}(\log a)^{10} \end{bmatrix} y = 0. \quad (12)$$

On a

$$V_2 = \lambda \,|\, y \;\; y^{10} \,|,$$

où χ est une fonction de u, v satisfaisant aux équations

$$(\log \lambda)^{01} = (\log b)^{01}, \qquad (\log \lambda)^{10} + (\log h_1)^{10} = 0,$$

compatibles en vertu de la relation (7).

On a de même

$$U_2 = \mu \,|\, y \;\; y^{01} \,|,$$

moyennant

$$(\log \mu)^{10} = (\log a)^{10}, \qquad (\log \mu)^{01} + (\log k_1)^{01} = 0,$$

équations compatibles en vertu de (8).

5. — Les points U_1, V_1 n'appartiennent pas, en général, à l'hyperquadrique Q. La droite $U_1\,V_1$ rencontre cette hyperquadrique en deux points R, S qui représentent les directrices de Wilczynski relatives aux points x, y.

Représentons les arêtes du tétraèdre $xx^{10}\ x^{01}\ x^{11}$ par les points U, V,

$$M_1 = |x\ x^{11}|,\quad M_2 = |x^{10}\ x^{01}|,\quad M_3 = |x^{10}\ x^{11}|,\quad M_4 = |x^{01}\ x^{11}|$$

de l'hyperquadrique Q. Nous avons

$$U_1 = M_1 - M_2 - (\log b)^{01}\,U,$$
$$V_1 = M_1 + M_2 - (\log a)^{10}\,V,$$

et

$$R = 2M_1 - (\log b)^{01}\,U - (\log a)^{10}\,V,$$
$$S = 2M_2 + (\log b)^{01}\,U - (\log a)^{10}\,V.$$

Le point R représente la droite $r = xy$ et le point S, la droite commune aux plans tangents aux surfaces (x), (y) aux points x, y, c'est-à-dire la droite $s = mn$.

Nous allons rechercher les points et les plans focaux des congruences (r), (s) respectivement engendrées par les droites r, s.

6. — Les développables de la congruence (2) ont pour images, sur la surface (R), les courbes dont les tangentes appartiennent à l'hyperquadrique Q.

Nous avons, en tenant compte des relations (1) et (6),

$$R^{10} = [8ab - (\log b)^{11}]\,U + \frac{1}{2}\,\overline{(\log a)^{10}}^{\,2}\,V - (\log a)^{10}\,(M_1 + M_2) + 2M_3,$$

et, en tenant compte de (1) et (5),

$$R^{01} = \frac{1}{2}\,\overline{(\log b)^{01}}^{\,2}\,U + [8ab - (\log a)^{10}]\,V - (\log b)^{01}\,(M_1 - M_2) + 2M_4.$$

Posons

$$\Omega(p, q) = p_{12}q_{34} + p_{34}q_{12} - p_{13}q_{24} - p_{24}q_{13} + p_{14}q_{23} + p_{23}q_{14},$$

de sorte que si $p_{12}, p_{13}, \dots, p_{34}$ sont les coordonnées d'une droite, l'équation de l'hyperquadrique Q soit

$$\Omega(p, p) = 0.$$

L'équation différentielle des courbes corales tracées sur la surface (R), et dont les tangentes appartiennent à Q, est

$$\Omega\,(\mathrm{R}^{10}du + \mathrm{R}^{01}dv, \qquad \mathrm{R}^{10}du + \mathrm{R}^{01}dv) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\Omega\,(\mathrm{R}^{10}, \mathrm{R}^{10})\,du^2 + 2\Omega\,(\mathrm{R}^{10}, \mathrm{R}^{01})\,du\,dv + \Omega\,(\mathrm{R}^{01}, \mathrm{R}^{01})\,dv^2 = 0. \qquad (13)$$

En appelant

$$\Delta = |\,x\ x^{10}\ x^{01}\ x^{11}\,|$$

le déterminant formé au moyen des coordonnées générales des points x, x^{10}, x^{01}, x^{11}, déterminant qui ne peut être identiquement nul, nous avons

$$\Omega\,(\mathrm{U}, \mathrm{M}_4) = -\,\Omega\,(\mathrm{V}, \mathrm{M}_3) = \Omega\,(\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2) = \Delta.$$

D'autre part, on a

$$\Omega\,(\mathrm{U}, \mathrm{V}) = 0, \quad \Omega\,(\mathrm{U}, \mathrm{M}_1) = 0, \quad \ldots, \quad \Omega\,(\mathrm{M}_3, \mathrm{M}_4) = 0.$$

Il en résulte que l'équation (13) se réduit à

$$\left(\log \frac{a}{b}\right)^{11} du\,dv = 0. \qquad (14)$$

Si le rapport de a à b n'est pas le produit d'une fonction de u seule par une fonction de v seule, les développables de la congruence (r) ont pour images, sur la surface (R), les courbes u, v de cette surface. Si, au contraire le rapport de a à b est le produit de deux fonctions, l'une de u seule, l'autre de v seule, toutes les surfaces de la congruence (r) sont développables ; les plans tangents à la surface (R) appartiennent à l'hyperquadrique Q. Nous laisserons ce dernier cas provisoirement de côté.

D'une manière analogue, on trouve

$$\mathrm{S}^{10} = (\log b)^{11}\,\mathrm{U} + \frac{1}{2}\,\overline{(\log a)^{10}}^{\,2}\,\mathrm{V} - (\log a)^{10}\,(\mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_2) + 2\mathrm{M}_3,$$

$$^{01} = -\frac{1}{2}\,\overline{(\log b)^{01}}^{\,2}\,\mathrm{U} - (\log a)^{11}\,\mathrm{V} + (\log b)^{01}\,(\mathrm{M}_1 - \mathrm{M}_2) - 2\mathrm{M}_4.$$

L'équation différentielle

$$\Omega\,(\mathrm{S}^{10}\,du + \mathrm{S}^{01}\,dv, \qquad \mathrm{S}^{10}\,du + \mathrm{S}^{01}\,dv) = 0$$

se réduit encore à l'équation (14). Sur la surface (S), les lignes u, v représentent donc les développables de la congruence (s), sauf lorsque le rapport de a à b est le produit de deux fonctions, l'une de u seule, l'autre de v seule.

En résumé : *Lorsque dans les équations* (1), *le rapport de* a *à* b *n'est pas le produit d'une fonction de* u *seule par une fonction de* v *seule, les surfaces engendrées par les directrices de Wilczynski s'appuyant sur les lignes asymptotiques de la surface* (x) *sont les développables des congruences engendrées par ces directrices.*

7. Nous allons rechercher les points et les plans focaux des droites de la congruence (r).

Rappelons tout d'abord qu'entre les coordonnées radiales générales Y et locales Z d'une droite, nous avons six relations que nous condensons en une seule,

$$Y = Z_{12}\,U + Z_{13}\,V + Z_{14}\,M_1 + Z_{23}\,M_2 + Z_{24}\,M_3 + Z_{34}\,M_4.$$

Cette droite est commune aux quatre plans dont les équations, en coordonnées locales, sont

$$\left.\begin{aligned} z_1\,Z_{23} - z_2\,Z_{13} + z_3\,Z_{12} &= 0, \\ z_2\,Z_{34} - z_3\,Z_{24} + z_4\,Z_{23} &= 0, \\ - z_3\,Z_{14} + z_4\,Z_{13} + z_1\,Z_{34} &= 0, \\ z_1\,Z_{24} - z_2\,Z_{14} + z_4\,Z_{12} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Pour le point R, nous avons

$$Z_{12} : Z_{13} : Z_{14} = (\log b)^{01} : (\log a)^{10} : -2,$$
$$Z_{23} = Z_{24} = Z_{34} = 0.$$

En portant ces valeurs dans les équations (15), on trouve, pour équations locales de la droite r,

$$\frac{z_2}{(\log b)^{01}} = \frac{z_3}{(\log a)^{10}} = \frac{z_4}{-2}.$$

La droite RR^{10}, qui appartient à Q, représente un faisceau de rayons dont le sommet p est un point focal de la droite r et dont le plan est un plan focal de cette droite. Le point p se trouve donc sur r et sur la droite ayant R^{10} comme image. Pour cette droite, on a

$$\left.\begin{aligned} &Z_{12} : Z_{13} : Z_{14} : Z_{23} : Z_{24} = 8ab - (\log b)^{11} \\ &\quad : \frac{1}{2}\overline{(\log a)^{10}}^2 : -(\log a)^{10} : -(\log a)^{10} : 2, \quad Z_{34} = 0. \end{aligned}\right\}$$

Les équations (15) donnent les équations de trois plans contenant la droite envisagée :

$$z_1 (\log a)^{10} + \frac{1}{2} z_2 \overline{(\log a)^{10}}^2 + z_3 [(\log b)^{11} - 8ab] = 0,$$
$$2z_1 + z_2 (\log a)^{10} + z_4 [8ab - (\log b)^{11}] = 0,$$
$$2z_3 + z_4 (\log a)^{10} = 0. \qquad (16)$$

Le dernier de ces plans contenant la droite r, c'est un plan focal de cette droite.

Les coordonnées locales du point p sont

$$\left.\begin{aligned} &z_1 : z_2 : z_3 : z_4 = 8ab - (\log b)^{11} \\ &\quad - \frac{1}{2} (\log a)^{10} (\log b)^{01} : (\log b)^{01} : (\log a)^{10} : -2. \end{aligned}\right\}$$

Les coordonnées générales de ce point sont donc données par

$$\left.\begin{aligned} p = &\left[8ab - (\log b)^{11} - \frac{1}{2} (\log a)^{10} (\log b)^{01}\right] x \\ &+ (\log b)^{01} x^{10} + (\log a)^{10} x^{01} - 2x^{11}; \end{aligned}\right\}$$

et l'on a

$$p = h_1 x + y.$$

Pour trouver le second point focal q de la droite r, observons que la droite ayant pour image le point R^{01} est commune aux plans

$$z_1 (\log b)^{01} + z_2 [(\log a)^{11} - 8ab] + \frac{1}{2} z_3 \overline{(\log b)^{01}}^2 = 0,$$
$$2z_1 + z_3 (\log b)^{01} + z_4 [8ab - (\log a)^{11}] = 0,$$
$$2z_2 + z_4 (\log b)^{01} = 0. \qquad (17)$$

Le dernier de ces plans contient la droite r et est, par suite, le second plan focal de cette droite.

Le foyer q a pour coordonnées locales

$$\left.\begin{aligned} z_1 : z_2 : z_3 : z_4 = 8ab - (\log a)^{11} \\ - \frac{1}{2}(\log a)^{10}(\log b)^{01} : (\log b)^{01} : (\log a)^{10} : -2, \end{aligned}\right\}$$

et, par suite, ses coordonnées générales sont données par

$$\left.\begin{aligned} q = \left[8ab - (\log a)^{11} - \frac{1}{2}(\log a)^{10}(\log b)^{01}\right]x \\ + (\log b)^{10}x^{10} + (\log a)^{10}x^{01} - 2x^{11}. \end{aligned}\right\}$$

On a, par suite,

$$q = k_1 x + y.$$

Observons que des expressions de p, q on déduit

$$2(h_1 - k_1)p^{10} - [(h_1 + k_1)(\log a)^{10} + 2h_1^{10}]p + 2h_1(\log ah_1)^{10}q = 0,$$
$$2(k_1 - h_1)q^{01} - [(k_1 + h_1)(\log b)^{01} + 2k_1^{01}]q + 2k_1(\log bk_1)^{01}p = 0.$$

Le point q est donc le transformé de Laplace du point p dans le sens des u.

8. Passons à la recherche des points et des plans focaux de la droite s. Pour le point s, nous avons

$$Z_{12} : Z_{13} : Z_{23} = (\log b)^{01} : -(\log a)^{10} : 2,$$
$$Z_{14} = Z_{24} = Z_{34} = 0.$$

En portant ces valeurs dans les équations (15), on trouve que les équations locales de la droite s sont

$$z_4 = 0, \qquad 2z_1 + z_2(\log a)^{10} + z_3(\log b)^{01} = 0.$$

Pour le point S^{10}, on a

$$\left.\begin{aligned} Z_{12} : Z_{13} : Z_{14} : Z_{23} : Z_{24} \\ = (\log b)^{11} : \frac{1}{2}\overline{(\log a)^{10}}^{2} : -(\log a)^{10} : -(\log a)^{10} : 2, \quad Z_{34} = 0. \end{aligned}\right\}$$

La droite ayant le point S^{10} pour image est donc située dans les trois plans

$$z_1 (\log a)^{10} + \frac{1}{2} z_2 \overline{(\log a)^{10}}^2 - z_3 (\log b)^{11} = 0,$$

$$2z_1 + z_2 (\log a)^{10} + z_4 (\log b)^{11} = 0,$$

$$2z_3 + z_4 (\log a)^{10} = 0.$$

Ces trois plans rencontrent la droite s en un foyer de cette droite ; les coordonnées locales de ce point sont

$$z_1 : z_2 = (\log a)^{10} : -2, \qquad z_3 = z_4 = 0.$$

Il en résulte que ce point coïncide avec le point

$$m = \frac{1}{2} x (\log a)^{10} - x^{10}.$$

Le plan focal correspondant à la droite SS^{10} doit contenir s, et la droite ayant pour image S^{10}, son équation locale est donc

$$\left.\begin{aligned} &2z_1 + z_2 (\log a)^{10} + z_3 (\log b)^{01} \\ &\quad + \left[(\log b)^{11} + \frac{1}{2} (\log a)^{10} (\log b)^{01} \right] z_4 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

De même, la droite ayant pour image S^{01} est commune aux trois plans

$$z_1 (\log b)^{01} - z_2 (\log a)^{11} + \frac{1}{2} z_3 \overline{(\log b)^{01}}^2 = 0,$$

$$2z_1 + z_3 (\log b)^{01} + z_4 (\log a)^{11} = 0,$$

$$2z_2 + z_4 (\log b)^{01} = 0.$$

Ces plans sont rencontrés par la droite s en un point, second foyer de cette droite, ayant pour coordonnées locales

$$z_1 : z_3 = (\log b)^{01} : -2, \qquad z_2 = z_4 = 0.$$

Ce second foyer de s coïncide donc avec le point

$$n = \frac{1}{2} x (\log b)^{01} - x^{01}.$$

Le second plan focal de s a pour équation locale

$$\left.\begin{aligned} 2z_1 + z_2 (\log a)^{10} + z_3 (\log b)^{01} \\ + \left[(\log a)^{11} + \frac{1}{2}(\log a)^{10}(\log b)^{01}\right] z_4 = 0. \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

On trouve sans difficulté les relations

$$2m^{10} + m(\log a)^{10} + 4bn = 0,$$
$$2n^{01} + n(\log b)^{01} + 4am = 0,$$

qui montrent que le point n est le transformé de Laplace du point m dans le sens des u.

En partant des relations précédentes, on forme aisément les équations de Laplace auxquelles satisfont les coordonnées des foyers m, n de la droite s. On trouve ainsi

$$\left.\begin{aligned} m^{11} - \frac{1}{2}(\log b)^{01} m^{10} + \frac{1}{2}(\log a)^{10} m^{01} \\ + \left[\frac{1}{2}(\log a)^{11} - \frac{1}{4}(\log a)^{10}(\log b)^{01} - 4ab\right] m = 0, \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} n^{11} + \frac{1}{2}(\log b)^{01} n^{10} - \frac{1}{2}(\log a)^{10} n^{01} \\ + \left[\frac{1}{2}(\log b)^{11} - \frac{1}{4}(\log a)^{10}(\log b)^{01} - 4ab\right] n = 0. \end{aligned}\right\}$$

9. Le plan focal (16) de la droite r passe par le point m et le plan focal (17) par le point n. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Si, dans les équations (1), *le rapport de* a *à* b *n'est pas le produit d'une fonction de* u *par une fonction de* v, *l'intersection des plans tangents en deux points homologues des surfaces* (x), (y) *décrit une congruence et a pour points focaux les points situés sur les tangentes aux lignes asymptotiques des surfaces* (x), (y) *aux points considérés. La droite joignant deux points homologues des surfaces* (x), (y) *décrit une congruence et a pour plans focaux les plans passant par les tangentes aux lignes asymptotiques des surfaces* (x), (y) *aux points considérés.*

La droite r rencontre le plan focal (18) de la droite s en un point de coordonnées locales

$$z_1 : z_2 : z_3 : z_4 = (\log b)^{11} - \frac{1}{2}(\log a)^{10}(\log b)^{01} : (\log b)^{01} : (\log a)^{10} : -2.$$

Ce point a donc pour coordonnées générales

$$m' = \left[(\log b)^{11} - \frac{1}{2}(\log a)^{10}(\log b)^{01}\right]x + x^{10}(\log b)^{01} + x^{01}(\log a)^{10} - 2x^{11}.$$

On a donc

$$m' = y - h_1 x.$$

De même, la droite r rencontre le plan focal (19) de la droite s au point de coordonnées locales

$$z_1 : z_2 : z_3 : z_4 = (\log a)^{11} - \frac{1}{2}(\log a)^{10}(\log b)^{01} : (\log b)^{01} : (\log a)^{10} : -2.$$

Les coordonnées générales de ce point sont donc

$$n' = \left[(\log a)^{11} - \frac{1}{2}(\log a)^{10}(\log b)^{01}\right]x + x^{10}(\log b)^{01} + x^{01}(\log a)^{10} - 2x^{11},$$

et l'on a

$$n' = y - k_1 x.$$

On conclut de tout ceci que l'on a

$$(xypm') = (xyqn') = -1.$$

Les plans focaux de la droite s *découpent sur la droite* r *correspondant aux mêmes valeurs de* u *et* v, *les conjugués harmoniques des points focaux de la droite* r *par rapport aux points* x, y (*).

(*) Nous montrerons, dans la seconde note, que les points m', n' sont des transformés de Laplace des points m et n; la suite de Laplace à laquelle appartiennent les surfaces (m), (n) est doublement inscrite dans la suite de Laplace à laquelle appartiennent les surfaces (p), (q).

10. Nous allons maintenant examiner le cas, écarté plus haut, où le quotient de a par b est le produit d'une fonction de u par une fonction de v, c'est-à-dire le cas où l'on a

$$(\log a)^{11} = (\log b)^{11}, \qquad h_1 = k_1. \tag{20}$$

Dans ces conditions, nous avons vu que les plans tangents aux surfaces (R) et (S) appartiennent en entier à l'hyperquadrique Q; par suite, les congruences (r), (s), engendrées par les droites r, s, sont des gerbes de rayons ou des plans réglés.

Occupons-nous en premier lieu de la congruence (r). Les calculs effectués plus haut (nº 7) sont toujours valables, mais actuellement les points p et q sont confondus en un point

$$p = \left[8ab - (\log a)^{11} - \frac{1}{2}(\log a)^{10}(\log b)^{01}\right] x + x^{10}(\log b)^{01} + x^{01}(\log a)^{10} - 2x^{11}.$$

Par contre, les plans (16) et (17) sont distincts. Les points du plan $RR^{10}R^{01}$, qui appartient à Q, représentent les droites passant par p.

En tenant compte des relations (20), on trouve

$$2p^{10} + p(\log a)^{10} = 0, \qquad 2p^{01} + p(\log b)^{01} = 0.$$

Il en résulte que lorsque u ou v varie, le point p reste fixe. La congruence (r) est donc une gerbe de rayons.

Passons à la congruence (s). Sous les conditions (20), les plans focaux (18) et (19) d'une droite s coïncident. Il en résulte que les points du plan $SS^{10}S^{01}$, appartenant à l'hyperquadrique Q, représentent les droites du plan (18). Si nous désignons par x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 les coordonnées générales courantes, l'équation du plan (18) en coordonnées générales s'écrira

$$\begin{vmatrix} x'_1 & x_1 & x_1^{10} & x_1^{01} & x_1^{11} \\ x'_2 & x_2 & x_2^{10} & x_2^{01} & x_2^{11} \\ x'_3 & x_3 & x_3^{10} & x_3^{01} & x_3^{11} \\ x'_4 & x_4 & x_4^{10} & x_4^{01} & x_4^{11} \\ 0 & 2 & (\log a)^{10} & (\log b)^{01} & (\log a)^{11} + \frac{1}{2}(\log a)^{10}(\log b)_{01} \end{vmatrix} = 0. \tag{21}$$

Écrivons cette équation sous la forme

$$\xi_1 x_1' + \xi_2 x_2' + \xi_3 x_3' + \xi_4 x_4' = 0.$$

Il est aisé de voir que les coordonnées tangentielles $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ du plan considéré satisfont aux équations

$$2\xi^{10} + \xi(\log a)^{10} = 0, \qquad 2\xi^{01} + \xi(\log b)^{01} = 0.$$

Il en résulte que le plan (21) est fixe et que la congruence (s) est un plan réglé.

Si, dans les équations (1), *le quotient de* a *par* b *est le produit d'une fonction de* u *par une fonction de* v, *les droites joignant deux points homologues des surfaces* (x), (y) *passent par un point fixe et les plans tangents à ces surfaces en deux points homologues se coupent suivant des droites d'un plan fixe.*

Liége, le 27 décembre 1927.

Géométrie.

Sur les Surfaces ayant mêmes quadriques de Lie

(*Seconde note*),

par Lucien GODEAUX, Professeur à l'Université de Liége.

Dans la première note (*), nous avons considéré les congruences formées par les directrices de Wilczynski de deux surfaces (x), (y) ayant mêmes quadriques de Lie en deux points homologues. Deux cas peuvent se présenter : dans le premier cas, les points et les plans focaux des droites des congruences sont distincts; dans le second, l'une des congruences est une gerbe de rayons, la seconde congruence étant un plan réglé. Nous nous placerons, dans cette seconde note, exclusivement dans le premier cas et nous rechercherons la liaison existant entre les suites de Laplace déterminées par les surfaces focales des deux congruences considérées.

(*) *Bulletins de l'Acad. roy. de Belgique,* 1928, pp. 158-173. Nous continuerons à utiliser, dans cette seconde note, les notations définies dans la première.

1. Dans la première note, nous avions utilisé les coordonnées des points par rapport au tétraèdre de sommets x, x^{10}, x^{01}, x^{11} attaché au point x de la surface (x); nous utiliserons ici un autre tétraèdre de référence, le tétraèdre ayant pour sommets les points homologues x, y des surfaces et les points m, n où se rencontrent les tangentes asymptotiques des surfaces aux points considérés. Nous définirons ces nouvelles coordonnées locales z_1', z_2', z_3', z_4' en représentant les coordonnées générales x_1', x_2', x_3', x_4' d'un point de l'espace par la formule

$$x' = xz_1' + mz_2' + nz_3' + yz_4'.$$

Entre les nouvelles coordonnées locales et les anciennes, on a les relations

$$\begin{aligned}
\rho z_1 &= z_1' + \frac{1}{2} z_2' (\log a)^{10} + \frac{1}{2} z_3' (\log b)^{01} + \left[4ab - \frac{1}{2} (\log a)^{10} (\log b)^{01} \right] z_4', \\
\rho z_2 &= \quad - z_2' \qquad\qquad\qquad + z_4' (\log b)^{01}, \\
\rho z_3 &= \qquad\qquad - z_3' \qquad\qquad + z_4' (\log a)^{10}, \\
\rho z_4' &= \qquad\qquad\qquad\qquad - 2z_4'.
\end{aligned}$$

Nous aurons à utiliser les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
x^{10} &= \frac{1}{2} x (\log a)^{10} - m, & x^{01} &= \frac{1}{2} x (\log b)^{01} - n, \\
m^{10} &= -\frac{1}{2} m (\log a)^{10} - 2bn, & 2m^{01} &= y + m (\log b)^{01} - k_1 x, \\
2n^{10} &= y + n (\log a)^{10} - h_1 x, & n^{01} &= -\frac{1}{2} n (\log b)^{01}_{2} - 2am, \\
y^{10} &= h_1 m - \frac{1}{2} y (\log a)^{10}, & y^{01} &= k_1 n - \frac{1}{2} y (\log b)^{01}.
\end{aligned}$$

Les points qui représentent, sur l'hyperquadrique Q de Klein, les arêtes du tétraèdre $xymn$, sont

$$U = |m\ x|, \quad V = |n\ x|, \quad U_2 = |n\ y|, \quad V_2 = |m\ y|,$$
$$R = |y\ x|, \quad S = |m\ n|.$$

Nous avons

$$U^{10} = -2bV, \qquad U^{01} = U(\log b)^{01} + \frac{1}{2}R - S,$$

$$V^{10} = V(\log a)^{10} + \frac{1}{2}R + S, \qquad V^{01} = -2aU,$$

$$U_2^{10} = h_1\left(\frac{1}{2}R - S\right), \qquad U_2^{01} = -2aV_2 - (\log b)^{01}U_2,$$

$$V_2^{10} = -2bU_2 - (\log a)^{10}V_2. \qquad V_2^{01} = k_1\left(\frac{1}{2}R + S\right),$$

$$R^{10} = h_1U + V_2, \qquad R^{01} = k_1V + U_2,$$

$$S^{10} = \frac{1}{2}(V_2 - h_1U), \qquad S^{01} = \frac{1}{2}(k_1V - U_2).$$

Les coordonnées radiales générales d'une droite dont les nouvelles coordonnées radiales locales sont Z'_{12}, Z'_{13}, ..., Z'_{34}, sont données par

$$-UZ'_{12} - VZ'_{13} - RZ'_{14} + SZ'_{23} + V_2Z'_{24} + U_2Z'_{34}.$$

2. Les foyers de la droite $r = xy$ sont

$$p = h_1x + y, \qquad q = k_1x + y,$$

et q est le transformé de Laplace de p dans le sens des u. Désignons par p_1 le transformé de Laplace de p dans le sens des v. Le point p_1 se trouve sur la droite pp^{01}. On a

$$|p\ p^{01}| = (h_1 - k_1)(h_1V + U_2).$$

Nous prendrons, pour point-image de la droite pp^{01} sur Q, le point

$$R_1 = h_1V + U_2.$$

La droite pp^{01} décrit une congruence ayant pour image la surface (R_1) ; une des surfaces focales de la congruence envisagée est la surface (p). Les développables de la congruence sont données par $u =$ c^te^, $v =$ c^te^. Les développables données par v = c^te^ sont représentées, sur la surface (R_1), par les lignes u.

Il en résulte que le point p_1 est le sommet du faisceau de rayons représenté sur Q par la droite $R_1\ R_1^{10}$.

Nous avons

$$R_1^{10} = h_1 (\log a h_1)^{10} V + h_1 R,$$
$$R_1^{01} = -2 a h_1 U + h_1^{01} V - (\log b)^{01} U_2 - 2 a V_2.$$

Les droites ayant pour image les points R_1, R_1^{10}, R_1^{01} ont respectivement pour équations

$$z_2' = 0, \qquad z_1' - h_1 z_4' = 0, \qquad (R_1)$$
$$z_2' = 0, \qquad z_3' - z_4' (\log a h_1)^{10} = 0, \qquad (R_1^{10})$$
$$z_2' (\log b)^{01} - 2 a z_3' = 0, \qquad z_1' - h_1 z_4' = 0. \qquad (R_1^{01})$$

Le point p_1, second foyer de la droite pp^{01}, a, par suite, pour coordonnées locales

$$z_1' : z_3' : z_4' = h_1 : (\log a h_1)^{10} : 1, \qquad z_2' = 0.$$

Ses coordonnées générales sont donc données par

$$p_1 = h_1 x + n (\log a h_1)^{10} + y.$$

Les plans focaux de la droite pp ont pour équations, en coordonnées locales,

$$z_2' = 0, \qquad z_1' - h_1 z_4' = 0.$$

On eût pu naturellement obtenir les coordonnées de p_1 en formant l'équation de Laplace à laquelle satisfont les coordonnées de p, puis utiliser les formules connues; nous avons de préférence utilisé la méthode qui précède parce qu'elle conduit à des calculs moins longs et qu'elle fournit immédiatement les équations des plans focaux.

On remarquera que l'on a

$$p_1 = p + n (\log a h_1)^{10},$$
$$2 (k_1 - h_1) p_1 = 2 p^{01} (\log a h_1)^{10} + p \left[(\log b)^{01} (\log a h_1)^{10} - 2 (h_1 - k_1) \right].$$

La première de ces relations montre que p_1 se trouve sur la droite pn.

3. Nous allons rechercher les coordonnées du point p_2 transformé de Laplace de p_1 dans le sens des v, et les plans focaux de la droite $p_1\, p_2$. Le point p_2 se trouve sur la droite $p_1\, p_1^{01}$. Nous avons

$$p_1^{01} = -\frac{1}{2}\, p_1 (\log b)^{01} - 2a\,(\log a h_1)^{10}\, m,$$

$$|\, p_1\, p_1^{01}\,| = 2a\,(\log a h_1)^{10}\,[h_1 \mathrm{U} + \mathrm{S}\,(\log a h_1)^{10} + \mathrm{V}_2].$$

Nous prendrons pour image de la droite $p_1\, p_1^{01}$ le point

$$\mathrm{R}_2 = h_1 \mathrm{U} + \mathrm{S}\,(\log a h_1)^{10} + \mathrm{V}_2.$$

On a alors

$$\mathrm{R}_2^{10} = \frac{1}{2}\, h_1 \left(\log \frac{h_1}{a}\right)^{10} \mathrm{U} - 2b h_1 \mathrm{V} + (\log a h_1)^{20}\, \mathrm{S} - 2b\,\mathrm{U}_2 + \frac{1}{2}\left(\log \frac{h_1}{a}\right)^{10} \mathrm{V}_2.$$

Les droites ayant pour images les points R^2, R_2^{10} ont pour équations

$$z_1' : z_3' : z_4' = h_1 : (\log a h_1)^{10} : 1, \qquad (\mathrm{R}_2)$$

$$z_1' - h_1 z_4' = 0, \qquad 2b z_2' + \frac{1}{2}\left(\log \frac{h_1}{a}\right)^{10} z_3' - (\log a h_1)^{20}\, z_4' = 0. \qquad (\mathrm{R}_2^{10})$$

Le point p_2, commun à ces deux droites, a pour coordonnées locales

$$\left.\begin{aligned} & z_1' : z_2' : z_3' : z_4' \\ & \quad = 2b h_1 : (\log a h_1)^{20} - \frac{1}{2}\left(\log a h_1\right)^{10}\left(\log \frac{h_1}{a}\right)^{10} : 2b\,(\log a h_1)^{10} : 2b. \end{aligned}\right\}$$

Par suite,

$$\left.\begin{aligned} p_2 = {} & 2b h_1 x \\ & + \left[(\log a h_1)^{20} - \frac{1}{2}(\log a h_1)^{10}\left(\log \frac{h_1}{a}\right)^{10}\right] m + 2b\,(\log a h_1)^{10}_{\square}\, n + 2b y, \end{aligned}\right\}$$

et

$$p_2 = 2b p_1 + \left[(\log a h_1)^{20} - \frac{1}{2}\,(\log a h_1)^{10}\left(\log \frac{h_1}{a}\right)^{10}\right] m.$$

L'un des plans focaux de la droite $p_1\, p_2$ est

$$z_1' - h_1 z_4' = 0.$$

Le second plan focal est le plan du faisceau de rayons représenté par droite $R_2 R_2^{01}$. Nous avons

$$2 R_2^{01} = k_1 (\log a h_1)^{10} V + (h_1 + k_1) R - (\log a h_1)^{10} U_2.$$

La droite représentée par R_2^{01} a donc pour équations

$$z'_2 = 0, \qquad z'_1 (\log a h_1)^{10} - (h_1 + k_1) z'_3 + k_1 (\log a h_1)^{10} z'_4 = 0. \qquad (R_2^{01})$$

L'équation du second plan focal est donc

$$(z'_1 + k_1 z'_4)(\log a h_1)^{10} - (h_1 + k_1) z'_3 = 0.$$

4. Désignons par $p_{-1}, p_{-2}, p_{-3}, \dots$ les transformés successifs de Laplace du point p dans le sens des u. Nous avons

$$p_{-1} = q = k_1 x + y$$

et les plans focaux de la droite $r = p p_{-1}$ sont les plans

$$z'_2 = 0, \qquad z'_3 = 0.$$

Le point p_{-2} se trouve sur la droite $p_{-1}\, p_{-1}^{10}$. Nous avons

$$| p_{-1}\, p_{-1}^{10} | = -(h_1 - k_1)(k_1 U + V_2).$$

Nous prendrons pour image de la droite $p_{-1}\, p_{-1}^{10}$ le point

$$R_{-1} = k_1 U + V_2.$$

Nous avons

$$R_{-1}^{10} = -2 b k_1 V + k_1^{10} U - 2 b U_2 - (\log a)^{10} V_2,$$
$$R_{-1}^{10} = k_1 (\log b k_1)^{01} U + k_1 R.$$

Les droites ayant pour images les points R_{-1}, R_{-1}^{10}, R_{-1}^{01} ont respectivement pour équations

$$z'_3 = 0, \qquad z'_1 - k_1 z'_4 = 0, \qquad (R_{-1})$$
$$z'_1 - k_1 z'_4 = 0, \qquad 2 b z'_2 - (\log a)^{10} z'_3 = 0, \qquad (R_{-1}^{10})$$
$$z'_3 = 0, \qquad z'_2 - z'_4 (\log b k_1)^{01} = 0. \qquad (R_{-1}^{01})$$

Le point p_{-2} a, par suite, pour coordonnées locales

$$z'_1 : z'_2 : z'_4 = k_1 : (\log b k_1)^{01} : 1, \qquad z'_3 = 0.$$

On a, par suite,

$$p_{-2} = k_1 x + m(\log b k_1)^{01} + y = p_{-1} + m(\log b k_1)^{01}.$$

Les plans focaux de la droite $p_{-1}\, p_{-2}$ sont

$$z'_3 = 0, \qquad z'_1 - k_1 z'_4 = 0.$$

Calculons encore les coordonnées du point p_{-3} et les plans focaux de la droite $p_{-2}\, p_{-3}$. Nous avons successivement

$$p^{10}_{-2} = -\frac{1}{2}(\log a)^{10}\, p_{-2} - 2b(\log b k_1)^{01}\, n,$$

$$|p_{-2}\ p^{10}_{-2}| = 2b(\log b k_1)^{01}\,[k_1 \mathrm{V} - \mathrm{S}(\log b k_1)^{01} + \mathrm{U}_2].$$

En prenant, pour représenter la droite $p_{-2}\, p^{10}_{-2}$, le point

$$\mathrm{R}_{-2} = k_1 \mathrm{V} - \mathrm{S}(\log b k_1)^{01} + \mathrm{U}_2,$$

nous avons

$$2\mathrm{R}^{10}_{-2} = h_1(\log b k_1)^{01}\,\mathrm{U} + (h_1 + k_1)\,\mathrm{R} - (\log b k_1)^{01}\,\mathrm{V}_2,$$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{R}^{01}_{-2} = -2ak_1\mathrm{U} + \frac{1}{2}k_1\left(\log\frac{k_1}{b}\right)^{01}\mathrm{V} - (\log bk_1)^{02}\,\mathrm{S} \\ + \frac{1}{2}\left(\log\frac{k_1}{b}\right)^{01}\mathrm{U}_2 - 2a\mathrm{V}_2. \end{aligned}\right\}$$

Les droites ayant pour images les points R_{-2}, R^{10}_{-2}, R^{01}_{-2} ont respectivement pour équations

$$z'_1 : z'_2 : z'_4 = k_1 : (\log b k_1)^{01} : 1, \qquad (\mathrm{R}_{-2})$$

$$z'_3 = 0, \qquad z'_1(\log bk_1)^{01} - (h_1 + k_1)\, z'_2 + h_1(\log bk_1)^{01}\, z'_4 = 0, \qquad (\mathrm{R}^{10}_{-2})$$

$$z'_1 - k_1 z'_4 = 0, \qquad \frac{1}{2}\left(\log\frac{k_1}{b}\right)^{01} z'_2 + 2az'_3 - (\log bk_1)^{02}\, z'_4 = 0. \qquad (\mathrm{R}^{01}_{-2})$$

Le point p_{-3} a, par suite, pour coordonnées locales

$$\left.\begin{aligned} z'_1 : z'_2 : z'_3 : z'_4 = 2ak_1 : 2a(\log b k_1)^{01} : (\log b k_1)^{02} \\ - \frac{1}{2}\left(\log\frac{b}{k_1}\right)^{01}(\log b k_1)^{01} : 2a, \end{aligned}\right\}$$

et ses coordonnées générales sont données par

$$\left.\begin{aligned} p_{-3} = {} & 2ak_1x + 2a(\log bk_1)^{01}m \\ & + \left[(\log bk_1)^{02} - \frac{1}{2}\left(\log\frac{b}{k_1}\right)^{01}(\log bk_1)^{01}\right]n + 2ay, \end{aligned}\right\}$$

ou

$$p_{-3} = 2ap_{-2} + \left[(\log bk_1)^{02} - \frac{1}{2}\left(\log\frac{b}{k_1}\right)^{01}(\log bk_1)^{01}\right]n.$$

Les plans focaux de la droite $p_{-2}\,p_{-3}$ sont les plans

$$z_1' - k_1z_4' = 0$$
$$(z_1' + h_1z_4')(\log bk_1)^{01} - (h_1 + k_1)\,z_2' = 0.$$

5. Nous allons actuellement nous occuper des transformés de Laplace des points m, n. Appelons m_1, m_2,... les transformés de Laplace du point m dans le sens des v. Nous avons

$$|\,m\ m^{01}\,| = \frac{1}{2}(V_2 - k_1U)$$

et la droite $m\,m_1$ a, par suite, pour image sur l'hyperquadrique Q, le point

$$S_1 = k_1U - V_2.$$

Nous avons

$$S_1^{10} = k_1^{10}U - 2bk_1V + 2bU_2 + (\log a)^{10}V_2,$$
$$S_1^{01} = k_1(\log bk_1)^{01}U - 2k_1S.$$

Les droites ayant pour images les points S_1, S_1^{10}, S_1^{01} ont respectivement pour équations

$$z_3' = 0, \qquad z_1' + k_1z_4' = 0, \tag{S_1}$$
$$2bz_2' - z_3'(\log a)^{10} = 0, \qquad z_1' + k_1z_4' = 0, \tag{S_1^{10}}$$
$$z_4' = 0, \qquad 2z_1' + z_3'(\log bk_1)^{01} = 0. \tag{S_1^{01}}$$

Le point m_1 a pour coordonnées locales

$$z_1' : z_4' = k_1 : -1, \qquad z_2' = z_3' = 0,$$

et ses coordonnées générales sont données par

$$m_1 = k_1x - y.$$

Le point m_1 coïncide donc avec le point dénoté par n' dans notre première note (n° 9).

Les plans focaux de la droite mm_1 ont pour équations

$$z'_1 + k_1 z'_4 = 0, \qquad z'_1 + \frac{1}{2}(\log bk_1)^{01} z'_3 + k_1 z'_4 = 0.$$

Passons à la recherche des coordonnées du point m_2 et des équations des plans focaux de la droite $m_1\, m_2$. Nous avons

$$m_1^{01} = \frac{1}{2} k_1 (\log bk_1^2)^{01} x - 2k_1 n + \frac{1}{2} y (\log b)^{01},$$

$$|\, m_1 \; m_1^{01} \,| = 2k_1^2 \mathrm{V} - k_1 (\log bk_1)^{01} \mathrm{R} - 2k_1 \mathrm{U}_2.$$

Nous poserons

$$\mathrm{S}_2 = k_1 \mathrm{V} - \frac{1}{2}(\log bk_1)^{01} \mathrm{R} - \mathrm{U}_2.$$

On a

$$2\mathrm{S}_2^{10} = -h_1 (\log bk_1)^{01} \mathrm{U} + 2(h_1 + k_1)\, \mathrm{S} - (\log bk_1)^{01} \mathrm{V}_2,$$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{S}_2^{01} = -2ak_1 \mathrm{U} + \frac{1}{2} k_1 \left(\log \frac{k_1}{b}\right)^{01} \mathrm{V} - \frac{1}{2}(\log bk_1)^{02} \mathrm{R} \\ - \frac{1}{2}\left(\log \frac{k_1}{b}\right)^{01} \mathrm{U}_2 + 2a\mathrm{V}_2. \end{aligned}\right\}$$

Les droites ayant pour images les points S_2, S_2^{10}, S_2^{01} ont respectivement pour équations

$$z'_2 = 0, \qquad 2z'_1 + z'_3 (\log bk_1)^{01} + 2k_1 z'_4 = 0, \qquad (\mathrm{S}_2)$$

$$z'_1 - h_1 z'_4 = 0, \qquad z'_3 (\log bk_1)^{01} + 2(h_1 + k_1)\, z'_4 = 0, \qquad (\mathrm{S}_2^{10})$$

$$z'_2 \left(\log \frac{k_1}{b}\right)^{01} + 4a z'_3 = 0, \qquad 4a(z'_1 + k_1 z'_4) - z'_2 (\log bk_1)^{02} = 0. \quad (\mathrm{S}_2^{01})$$

Les coordonnées locales du point m_2 sont donc

$$z'_1 : z'_3 : z'_4 = h_1 (\log bk_1)^{01} : -2(h_1 + k_1) : (\log bk_1)^{01}, \qquad z'_2 = 0.$$

On a donc

$$m_2 = h_1 (\log bk_1)^{01} x - 2(h_1 + k_1)\, n + (\log bk_1)^{01} y.$$

Les plans focaux de la droite $m_1 m_2$ sont

$$z_1' + \frac{1}{2}(\log bk_1)^{01} z_3' + k_1 z_4' = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} 4a\left[z_1' + \frac{1}{2}(\log bk_1)^{01} z_3' + k_1 z_4'\right] \\ - z_2'\left[(\log bk_1)^{02} - \frac{1}{2}(\log bk_1)^{01}\left(\log\frac{k_1}{b}\right)^{01}\right] = 0. \end{aligned}\right\}$$

6. Désignons par m_{-1}, m_{-2}, m_{-3} les transformés successifs de Laplace du point m dans le sens des u. On a successivement

$$m_{-1} = n,$$

$$|m_{-1}\ m_{-1}^{10}| = |n\ n_{-1}^{10}| = \frac{1}{2}(U_2 - h_1 V).$$

Représentons la droite $m_{-1}\, m_{-1}^{10}$ par le point

$$S_{-1} = h_1 V - U_2.$$

Nous avons

$$S_{-1}^{10} = h_1 (\log a h_1)^{10} V + 2h_1 S,$$

$$S_{-1}^{01} = -2ah_1 U + h_1^{01} V + (\log b)^{01} U_2 + 2aV_2.$$

Les droites ayant pour images les points S_{-1}, S_{-1}^{10}, S_{-1}^{01} ont respectivement pour équations

$$z_2' = 0, \qquad z_1' + h_1 z_4' = 0, \qquad (S_{-1})$$

$$z_4' = 0, \qquad 2z_1' + z_2'(\log a h_1)^{10} = 0, \qquad (S_{-1}^{10})$$

$$z_1' + h_1 z_4' = 0, \qquad z_2'(\log b)^{01} - 2az_3' = 0. \qquad (S_{-1}^{01})$$

Le point m_{-2} a pour coordonnées locales

$$z_2' = z_3' = 0, \qquad z_1' : z_4' = h_1 : -1.$$

Par suite, on a

$$m_{-2} = h_1 x - y$$

et le point m_{-2} coïncide avec le point désigné par m' dans notre première note (n° 9).

Les plans focaux de la droite $m_{-1}m_{-2}$ sont

$$z'_1 + h_1 z'_4 = 0, \qquad z'_1 + \frac{1}{2} z'_2 (\log a h_1)^{10} + h_1 z'_4 = 0.$$

On a ensuite

$$m_{-2}^{10} = \frac{1}{2} h_1 (\log a h_1^2)^{10} x - 2h_1 m + \frac{1}{2} y (\log a)_{\mathbf{2}}^{10},$$

$$| m_- \; m_{-2}^{10} | = 2h_1^2 \mathrm{U} - h_1 (\log a h_1)^{10} \mathrm{R} - 2h_1 \mathrm{V}_2 .$$

Nous prendrons pour image de cette droite

$$\mathrm{S}_{-2} = h_1 \mathrm{U} - \frac{1}{2} (\log a h_1)^{10} \mathrm{R} - \mathrm{V}_2 .$$

Nous avons alors

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{S}_{-2}^{10} = \frac{1}{2} h_1 \left(\log \frac{h_1}{a}\right)^{10} \mathrm{U} - 2bh_1 \mathrm{V} - \frac{1}{2} (\log a h_1)^{20} \mathrm{R} + 2b \mathrm{U}_2 \\ - \frac{1}{2} \left(\log \frac{h_1}{a}\right)^{10} \mathrm{V}_2 , \end{aligned}\right\}$$

$$2\mathrm{S}_{-2}^{01} = - k_1 (\log a h_1)^{10} \mathrm{V} - 2 (h_1 = k_1) \mathrm{S} - (\log a h_1)^{10} \mathrm{U}_2 ,$$

et pour les droites représentées par ces points,

$$z'_3 = 0, \qquad z'_1 + \frac{1}{2} z'_2 (\log a h_1)^{10} + h_1 z'_4 = 0, \qquad (\mathrm{S}_{-2})$$

$$4b z'_2 + z'_3 \left(\log \frac{h_1}{a}\right)^{10} = 0, \qquad 4b (z'_1 + h_1 z'_4) - z'_3 (\log a h_1)^{20} = 0, \qquad (\mathrm{S}_{-2}^{10})$$

$$z'_1 - k_1 z'_4 = 0, \qquad z'_2 (\log a h_1)^{10} + 2(h_1 + k_1) z'_4 = 0. \qquad (\mathrm{S}_{-2}^{01})$$

Pour le point m_{-3}, on a donc

$$z'_1 : z'_2 : z'_4 = k_1 (\log a h_1)^{10} : - 2 (h_1 + k_1) : (\log a h_1)_{\mathbf{2}}^{10}, \qquad z'_3 = 0,$$

$$m_{-3} = k_1 (\log a h_1)^{10} x - 2 (h_1 + k_1) m + (\log a h_1)_{\mathbf{2}}^{10} y.$$

Les plans focaux de la droite $m_{-2}m_{-3}$ sont

$$z'_1 + \frac{1}{2} (\log a h_1)^{10} + h_1 z'_4 = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} 4b \left[z'_1 + \frac{1}{2} z'_2 (\log a h_1)_{\mathbf{2}}^{10} + h_1 z'_4 \right] \\ - z'_3 \left[(\log a h_1)^{20} - \frac{1}{2} (\log a h_1)^{10} \left(\log \frac{h_1}{a}\right)^{10} \right] = 0. \end{aligned}\right\}$$

7. Nous allons rechercher la liaison entre les suites de Laplace ... $p_{-2}p_{-1}pp_1p_2$ ... et ... $m_{-2}m_{-1}mm_1m_2$ .... Pour abréger, nous appellerons la première de ces suites : suite I, la seconde : suite II.

La comparaison des formules donnant les coordonnées des points des suites I et II donne

$$\left[(\log ah_1)^{20} - \frac{1}{2}(\log ah_1)^{10}\left(\log\frac{h_1}{a}\right)^{10}\right] m = p_2 - 2bp_1,$$

$$(\log ah_1)^{10} m_2 = [2(h_1 + k_1) - (\log ah_1)^{10}(\log bk_1)^{01}]\, p - 2(h_1 + k_1)\, p_1,$$

$$(k_1 - h_1)\, m_1 = (h_1 + k_1)\, p_{-1} - 2k_1 p,$$

$$(\log bk_1)^{01} m = p_{-2} - p_{-1},$$

$$(\log ah_1)^{10} m_{-1} = p_1 - p,$$

$$(h_1 - k_1)\, m_{-2} = (h_1 + k_1)\, p - 2h_1 p_{-1},$$

$$(\log bk_1)^{01} m_{-3} = [2(h_1 + k_1) - (\log ah_1)^{10}(\log bk_1)^{01}]\, p_{-1} - 2(h_1 + k_1)\, p_{-2},$$

$$\left[(\log bh_1)^{02} - \frac{1}{2}(\log bk_1)^{01}\left(\log\frac{k_1}{b}\right)^{01}\right] m_{-4} = p_{-3} - 2ap_{-2}.$$

On constate donc que chaque droite de la suite I contient deux points de la suite II correspondant aux mêmes valeurs de u, v. Précisément, la droite $p_{-2}p_{-1}$ contient les points m_{-3}, m; la droite $p_{-1}p$, les points m_{-2}, m_1; la droite pp_1, les points m_{-1}, m_2. Cette propriété s'étend à l'ensemble des deux suites.

Considérons la congruence $(p_{-1}p)$ engendrée par la droite $p_{-1}p$, et la surface (m_1) engendrée par le point m_1. Les développables de la congruence $(p_{-1}p)$ sont données par $u = c^{te}$, $v = c^{te}$; d'autre part, les courbes $u = c^{te}$, $v = c^{te}$ déterminent un réseau conjugué sur la surface (m_1). Il en résulte, par un théorème de Lucien Lévy (*), que le réseau (m_1) engendré par le point m_1 et la congruence $(p_{-1}p)$ sont conjugués. Par suite,

(*) Voir G. Darboux, Leçons sur la Théorie générale des Surfaces (Paris, Gauthier-Villars, 1889), t. II, liv. IV, chap. X, pp. 219 et suiv.

la suite II est inscrite dans la suite I (*). La droite $p_i p_{i+1}$ contient le point m_{i+2}.

Le même raisonnement montre que le réseau (m_{-2}), engendré par le point m_{-2}, et la congruence $(p_{-1}p)$ sont conjugués. Par suite, le point m_{i-1} appartient à la droite $p_i p_{i+1}$.

La suite de Laplace II est doublement inscrite dans la suite de Laplace I. Une droite $\mathrm{p}_i \mathrm{p}_{i+1}$ *de la suite I contient deux points* m_{i-1}, m_{i+2} *de la suite II, correspondant aux mêmes valeurs de* u, v.

On en déduit que

Par tout point m_i *de la suite de Laplace II passent deux droites* $\mathrm{p}_{i-2}\mathrm{p}_{i-1}$, $\mathrm{p}_{i+1}\mathrm{p}_{i+2}$ *de la suite de Laplace I.*

8. On obtient des résultats analogues en considérant les plans focaux des diverses congruences appartenant aux suites I et II.

Désignons par ω_i le plan déterminé par les trois points p_i, p_{i+1}, p_{i+2} et par μ_i le plan des trois points m_i, m_{i+1}, m_{i+2}. Les plans focaux d'une droite $p_i p_{i+1}$ de la congruence $(p_i p_{i+1})$ sont alors ω_{i-1} et ω_i; ceux d'une droite $m_i m_{i+1}$ de la congruence $(m_i m_{i+1})$ sont μ_{i-1}, μ_i.

Considérons le plan ω_i. Il contient les droites $p_i p_{i+1}$, $p_{i+1} p_{i+2}$ et, par suite, les points m_{i-1}, m_i, m_{i+2}, m_{i+3}. Le plan ω_{i-3} contient les droites $p_{i-3}p_{i-2}$, $p_{i-2}p_{i-1}$ et, par suite, les points m_{i-4}, m_{i-3}, m_{i-1}, m_i. Nous voyons donc que par la droite $m_{i-1}m_i$ de la suite II passent deux plans focaux de la suite I.

Une droite $\mathrm{m}_{i-1}\mathrm{m}_i$ *de la suite de Laplace II appartient à deux plans focaux* ω_i, ω_{i-3} *de la suite de Laplace I, correspondant aux mêmes valeurs de* u, v.

En outre.

Tout plan focal ω_i *de la suite de Laplace I contient deux droites* $\mathrm{m}_{i-1}\mathrm{m}_i$, $\mathrm{m}_{i+2}\mathrm{m}_{i+3}$ *de la suite de Laplace II.*

(*) G. Tzitzeica, Géométrie différentielle projective des réseaux (Paris, Gauthier-Villars, 1924). Voir chap. V, pp. 117 et suiv.

Considérons deux droites $p_{i-1}p_i$, $m_{i-1}m_i$ correspondant aux mêmes valeurs de u, v. La droite $p_{i-1}p_i$ contient les points m_{i-2}, m_{i+1}; par suite, les plans focaux de la droite $m_{i-1}m_i$ sont les plans μ_{i-2}, μ_{i-1} projetant, de cette droite, les points de la suite II appartenant à la droite $p_{i-1}p_i$.

Les plans focaux ω_{i-2}, ω_{i-1} de la droite $p_{i-1}p_i$ contiennent, le premier les points m_{i-3}, m_{i-2}, m_i, m_{i+1}, le second les points m_{i-2}, m_{i-1}, m_{i+1}, m_{i+2}. Par suite, les plans focaux de la droite $p_{i-1}p_i$ sont les plans projetant, de cette droite, les points m_{i-1}, m_i.

Les plans ω_i, ω_{i-3} de la suite I passant par la droite $m_{i-1}m_i$ sont les plans focaux des droites p_ip_{i+1}, $p_{i-2}p_{i-1}$ ne passant pas par la droite $p_{i-1}p_i$.

Ces propriétés peuvent d'ailleurs être aisément vérifiées pour $i = -1, 0, 1, 2$ en tenant compte des équations des plans focaux qui ont été établies plus haut.

Reprenons la droite $m_{-1}m$. Les plans focaux μ_{-2}, μ_{-1} de cette droite ont respectivement pour équations

$$z_1' + h_1 z_4' = 0, \qquad z_1' + k_1 z_4' = 0.$$

D'autre part, les plans focaux ω_{-1}, ω_{-4}, qui passent par cette droite, ont pour équations respectivement

$$z_1' - h_1 z_4' = 0, \qquad z_1' - k_1 z_4' = 0.$$

Si l'on désigne par ξ, η les plans tangents en x, y aux surfaces (x), (y) respectivement, on a

$$(\xi\eta\mu_{-2}\varpi_{-1}) = (\xi\eta\mu_{-1}\varpi_{-1}) = -1,$$

relations analogues à celles

$$(x\,y\,p\,m_{-2}) = (x\,y\,p_{-1}\,m_1) = -1,$$

établies dans la première note.

Liége, 2 janvier 1928.

Marcel HAYEZ, imprimeur, rue de Louvain, 112, Bruxelles.