ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE.
Extrait des *Bulletins de la Classe des Sciences*, 5e série, t. XIV, nos 1-2.
Séance du 7 janvier 1928, pp. 31-41.

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DIFFÉRENTIELLE.

Sur les Lignes asymptotiques d'une Surface et l'Espace réglé

(*Seconde note*),

par L. GODEAUX, professeur à l'Université de Liége.

A la fin de la première note (*), nous avons défini une suite de quadriques attachée en chaque point x d'une surface (x). La première quadrique de cette suite est la quadrique de Lie; deux quadriques consécutives de la suite se touchent, en général, en quatre points. Nous montrerons que le lieu de ces quatre points fait partie de l'enveloppe de chacune des quadriques consécutives considérées, lorsque le point x décrit la surface (x). Nous reprendrons, dans ce but, la considération de la suite de Laplace dont font partie les surfaces qui représentent les tangentes asymptotiques de la surface (x) sur l'hyperquadrique de Klein dans l'espace linéaire à cinq dimensions. Nous étudierons ensuite la suite de quadriques lorsque la suite de Laplace considérée est périodique; nous obtiendrons ainsi une correspondance entre la surface (x) et une seconde surface, correspondance dont un cas particulier a déjà été considéré par M. Demoulin (**).

Nous continuerons à utiliser les notations de notre première note.

1. Nous commencerons par établir un lemme sur l'enveloppe d'une famille particulière, à deux paramètres, de quadriques.

Soit Q l'hyperquadrique de Klein d'un espace linéaire à cinq

(*) *Bulletins de l'Académie royale de Belgique*, pp. 812-826.

(**) *Sur la quadrique de Lie* (C. R., 1908, t. CXLVII, pp. 493-496); *Sur les surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que deux points caractéristiques* (C. R., 1924, t. CLXXIX, pp. 20-22).

dimensions S_5 qui représente les droites d'un espace linéaire à trois dimensions S_3. Considérons un point X de S_5, n'appartenant pas à Q, dont les coordonnées X_{12}, X_{31}, ..., X_{34} sont des fonctions analytiques de deux variables u, v satisfaisant à l'équation de Laplace

$$X^{11} + \alpha X^{10} + \beta X^{01} + \gamma X = 0. \tag{1}$$

Nous supposerons, pour fixer les idées, que la suite de Laplace définie par la surface (X) lieu du point X est illimitée dans les deux sens.

La section de l'hyperquadrique Q par le plan tangent $XX^{10}X^{01}$ en un point X à la surface (X) représente une demi-quadrique de S_3. L'équation du support de cette demi-quadrique s'obtient de la manière suivante : Représentons par

$$p_{ik} = x_i x'_k - x_k x'_i \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

les coordonnées radiales des droites de S_3. Le plan focal du point $x(x_1, x_2, x_3, x_4)$ par rapport au complexe linéaire ayant pour seconde image le point X, a pour équation

$$\left.\begin{aligned} &x'_1(x_2X_{34} - x_3X_{24} + x_4X_{23}) + x'_2(-x_1X_{34} + x_3X_{14} + x_4X_{31}) \\ &+ x'_3(x_1X_{24} - x_2X_{14} + x_4X_{12}) - x'_4(x_1X_{23} + x_2X_{31} + x_3X_{12}) = 0. \end{aligned}\right\}$$

Les plans focaux du point x par rapport aux complexes linéaires dont les secondes images sont les points X^{10}, X^{01}, ont des équations que l'on déduit de la précédente en remplaçant successivement les coordonnées du point X par celles de X^{10}, X^{01}. Pour que le point x appartienne à la quadrique cherchée, il faut que les trois plans focaux considérés passent par une même droite. On obtient ainsi quatre conditions qui sont satisfaites lorsqu'on a

$$\begin{aligned} &x_4^2 \,|\, X_{23} \;\; X_{31} \;\; X_{12} \,| + x_4 \,|\, x_2X_{34} - x_3X_{24} \;\; X_{31} \;\; X_{12} \,| \\ &+ x_4 \,|\, X_{23} \;\; -x_1X_{34} + x_3X_{14} \;\; X_{12} \,| + x_4 \,|\, X_{23} \;\; X_{31} \;\; x_1X_{24} - x_2X_{14} \,| \\ &+ |\, X_{23} \;\; -x_1X_{34} + x_3X_{14} \;\; x_1X_{24} - x_2X_{14} \,| \\ &+ |\, x_2X_{34} - x_3X_{24} \;\; X_{31} \;\; x_1X_{24} - x_2X_{14} \,| \\ &+ |\, x_2X_{34} - x_3X_{24} \;\; -x_1X_{34} + x_3X_{14} \;\; X_{12} \,| = 0. \end{aligned}$$

Dans cette équation, les coefficients de x_4^2, x_4 et les termes indépendants sont des déterminants à neuf éléments dont nous n'avons écrit que la première ligne; les deuxième et troisième lignes se déduisent de la première en remplaçant X par X^{10}, X^{01}. Nous représenterons, en abrégé, cette équation par

$$\Sigma x_i x_k \begin{vmatrix} X \\ X^{10} \\ X^{01} \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

Cette équation représente une quadrique dont les coefficients dépendent des paramètres u, v. Les points caractéristiques de la quadrique (2) seront les intersections de cette quadrique et des quadriques que l'on obtient en dérivant (2) par rapport à u et à v. On obtient ainsi, en tenant compte de l'équation (1),

$$\Sigma x_i x_k \left\{ \begin{vmatrix} X \\ X^{20} \\ X \end{vmatrix} - \beta \begin{vmatrix} X \\ X^{10} \\ X^{01} \end{vmatrix} \right\} = 0, \tag{3}$$

$$\Sigma x_i x_k \left\{ \begin{vmatrix} X \\ X^{10} \\ X^{02} \end{vmatrix} - \alpha \begin{vmatrix} X \\ X^{10} \\ X^{01} \end{vmatrix} \right\} = 0. \tag{4}$$

La quadrique (3) est le support d'une demi-quadrique représentée par la section de l'hyperquadrique Q par le plan passant par les points X, X^{01}, $X^{20} - \beta X^{10}$. Si nous désignons par A_1, A_2 les points d'intersection de Q et de la droite XX^{01}, par a_1, a_2 les droites de S_3 représentées par ces points, on en conclut que les quadriques (2) et (3) ont en commun les droites a_1, a_2 (et, par suite, deux autres droites). De même, si l'on désigne par B_1, B_2 les points d'intersection de Q et de la droite XX^{10}, par b_1, b_2 les droites de S_3 représentées par ces points, les quadriques (2) et (4) ont en commun les droites b_1, b_2 (et deux autres droites).

Représentons par ..., (X_{-i}), ..., (X_{-1}), (X), (X_1), ..., (X_i), ...

la suite de Laplace dont fait partie la surface (X), une des surfaces étant la transformée de la précédente dans le sens des v. D'après un théorème de Darboux, les coordonnées du pôle Y de l'hyperplan $X_{-2}X_{-1}XX_1X_2$ par rapport à Q, satisfont à une équation de Laplace. La surface (Y), lieu du point Y, appartient à une suite de Laplace..., (Y_{-i}), ..., (Y_{-1}), (Y), (Y_1), ..., (Y_i), ... qui est la polaire réciproque de la suite ... (X_{-1}), (X), (X_1), ... par rapport à Q (Darboux). Les points Y_{-2}, Y_{-1}, Y, Y_1, Y_2 sont précisément les pôles des hyperplans $XX_1X_2X_3X_4$, $X_{-1}XX_1X_2X_3$, $X_{-2}X_{-1}XX_1X_2$, $X_{-3}X_{-2}X_{-1}XX_1$, $X_{-4}X_{-3}X_{-2}X_{-1}X$.

Désignons par A'_1, A'_2 les points de rencontre de la droite $Y_{-1}Y$ avec l'hyperquadrique Q, par B'_1, B'_2 ceux de la droite YY_1 avec Q, par a'_1, a'_2, b'_1, b'_2 les droites de S_3 représentées par ces points.

Les plans $X_{-1}XX_1$, $Y_{-1}YY_1$ sont conjugués par rapport à Q et coupent cette hyperquadrique suivant deux coniques images des demi-quadriques ayant pour support la quadrique (2). Les deux demi-quadriques ayant pour support la quadrique (3) sont représentées par les sections de Q par deux plans conjugués par rapport à Q ; nous avons vu que l'un de ces plans passait par la droite XX^{01} ou $X_{-1}X$; par suite l'autre passe par la droite $Y_{-1}Y$, c'est-à-dire par A'_1, A'_2. Il en résulte que les quadriques (2) et (3) ont en commun, outre les droites a_1, a_2, les droites a'_1, a'_2.

De même, les quadriques (2) et (4) ont en commun, outre b_1, b_2, les droites b'_1, b'_2.

Sur la quadrique (2), les droites a_1, a_2, b_1, b_2 sont des génératrices de même mode, les droites a'_1, a'_2, b'_1, b'_2 des génératrices de l'autre mode. Les points caractéristiques de la quadrique (2) sont donc les points $(a_1b'_1)$, $(a_1b'_2)$, $(a_2b'_1)$, $(a_2b'_2)$, (a'_1b_1), (a'_1b_2), (a'_2b_1), (a'_2b_2). Les faisceaux des tangentes à la quadrique (2) ayant ces points pour sommets sont représentés par les droites $A_1B'_1$, $A_1B'_2$, ..., A'_2B_2, appartenant à l'hyperquadrique Q.

2. Appliquons le résultat qui vient d'être obtenu aux quadriques de la suite Φ, Φ_1, ..., Φ_i, ... définie dans la première note (*).

Supposons que les surfaces (U_1), (U_2), ..., (U_{i+2}), (V_1), (V_2), ..., (V_{i+2}) n'appartiennent ni l'une ni l'autre à l'hyperquadrique Q. Considérons la quadrique Φ_i, support commun des deux demi-quadriques représentées par les sections de Q par les plans $U_i U_{i+1} U_{i+2}$, $V_i V_{i+1} V_{i+2}$ conjugués par rapport à Q. Désignons par P_{i1}, P_{i2} les points d'intersection de Q et de la droite $U_i U_{i+1}$, par P'_{i1}, P'_{i2} ceux de Q et de la droite $V_i V_{i+1}$.

Les plans $U_i U_{i+1} U_{i+2}$, $V_i V_{i+1} V_{i+2}$ étant conjugués par rapport à Q, les droites $P_{i1} P'_{i1}$, $P_{i2} P'_{i1}$, $P_{i1} P'_{i2}$, $P_{i2} P'_{i2}$, $P_{i+11} P'_{i+11}$, ..., $P_{i+12} P'_{i+12}$ appartiennent à l'hyperquadrique Q.

La transformée de Laplace de la surface (U_{i+1}), dans le sens des u, est la surface (U_i) ; celle de la surface (V_{i+1}), dans le sens des v, est la surface (V_i). D'après le résultat établi plus haut, les sommets des faisceaux de droites représentés par les droites $P_{i1} P'_{i1}$, $P_{i1} P'_{i2}$, $P_{i2} P'_{i1}$, $P_{i2} P'_{i2}$, sont des points caractéristiques de la quadrique Φ_i. Ce sont aussi des points caractéristiques de la quadrique Φ_{i-1}.

De même, les sommets des faisceaux de rayons représentés par les droites $P_{i+11} P'_{i+11}$, $P_{i+11} P'_{i+12}$, $P_{i+12} P'_{i+11}$, $P_{i+12} P'_{i+12}$ sont des points caractéristiques de la quadrique Φ_i. On en conclut que

L'enveloppe des quadriques Φ_i se compose de deux nappes touchées chacune en quatre points par les quadriques. L'une de ces nappes fait partie de l'enveloppe des quadriques Φ_{i-1}, et deux quadriques Φ_{i-1}, Φ_i, correspondant aux mêmes valeurs de u, v, *ont en commun les quatre points caractéristiques appartenant à cette nappe.*

Chacune des nappes de l'enveloppe des quadriques Φ_i peut

(*) Nous supposons, comme dans notre première note, que la suite de Laplace à laquelle appartiennent les surfaces (U), (V) est illimitée dans les deux sens.

évidemment être formée de plusieurs surfaces ou, éventuellement, de courbes.

3. Nous allons considérer le cas où la suite de Laplace $\ldots (U_i) \ldots (U_1), (U), (V), \ldots, (V_i), \ldots$ est périodique. Supposons, pour fixer les idées, que la surface (U_n) coïncide avec la surface (V_m), m étant supérieur ou égal à n.

Si $m - n$ est pair, posons $m = n + 2\nu$. Les surfaces (U_{n+1}) et (V_{m-1}) coïncident,... et les surfaces $(U_{n+\nu})$ et $(V_{m-\nu})$ coïncident également.

Si $m - n$ est impair et égal à $2\nu + 1$, les surfaces $(U_{n+\nu})$ et $(V_{m-\nu})$ coïncident.

En changeant de notation, on aura donc deux cas à considérer : 1° $m = n$; 2° $m = n + 1$.

Envisageons le premier cas; les surfaces (U_n), (V_n) coïncident.

L'hyperplan polaire de U_n par rapport à Q contient les points V_{n-2}, V_{n-1}, V_n, V_{n+1}, V_{n+2}, c'est-à-dire les points V_{n-2}, V_{n-1}, U_n, U_{n-1}, U_{n-2}; par suite le point U_n appartient à Q et la surface (U_n) est tracée sur cette hyperquadrique.

L'hyperplan polaire de U_{n-1} par rapport à Q est l'hyperplan $V_{n-3}V_{n-2}V_{n-1}U_nU_{n-1}$; donc U_{n-1} et la surface (U_{n-1}) appartiennent à Q. Il en est de même de la surface (V_{n-1}).

Les plans $U_nU_{n-1}U_{n-2}$ et $U_nV_{n-1}V_{n-2}$ sont conjugués par rapport à l'hyperquadrique Q. Le premier de ces plans est tangent à Q le long de la droite $U_{n-1}U_n$; donc le second plan contient cette droite. Il en résulte que les trois plans $U_{n-1}U_nV_{n-1}$, $U_nU_{n-1}U_{n-2}$, $U_nV_{n-1}V_{n-2}$ sont confondus. Ces plans appartiennent en entier à l'hyperquadrique Q et, par suite, les surfaces (U_{n-2}), (V_{n-2}) appartiennent à Q.

Cela étant, soit (U_i) la première des surfaces (U_1), (U_2), ..., (U_{n-3}) n'appartenant pas à l'hyperquadrique Q, les surfaces (U_{i+1}), ..., (U_{n-2}) appartenant toutes à cette hyperquadrique. Les droites $U_{i+1}U_{i+2}$ appartiennent toutes à Q et, par suite, d'après un théorème de M. Tzitzeica (*), les surfaces (U_{i+1}), (U_{i+2}) représentent les tangentes asymptotiques d'une certaine surface (y) de S_3. Mais alors, les plans $U_{i-1}U_iU_{i+1}$ et $U_{i+2}U_{i+3}U_{i+4}$ sont conjugués par rapport à Q ; les sections de Q par ces plans représentent deux demi-quadriques ayant pour support commun la quadrique de Lie du point y de la surface (y). Observons que, d'une part, le premier de ces plans ne peut appartenir en entier à l'hyperquadrique Q et que, d'autre part, le second de ces plans appartient entièrement à Q. En effet, puisque i est au plus égal à $n-3$, les points U_{i+2}, U_{i+3}, U_{i+4} appartiennent certainement à Q ; de plus, chacun de ces points appartient à l'hyperplan tangent à Q en un quelconque des deux autres; comme ces points ne peuvent être en ligne droite, le plan qu'ils déterminent appartient en entier à Q. Les plans envisagés ne peuvent donc être conjugués; par suite toutes les surfaces (U_1), (U_2), ..., (U_n) appartiennent à Q.

Posons

$$\Omega(p, q) = p_{12}q_{34} + p_{31}q_{24} + \cdots + p_{34}q_{12},$$

de sorte que l'équation de Q est

$$\Omega(p, p) = 0.$$

Le point U_1 devant appartenir à Q pour toutes les valeurs de u, v, nous devons avoir identiquement

$$\Omega(U_1, U_1) = 0,$$

c'est-à-dire, puisque

$$U_1 = M_1 - M_2 - (\log b)^{01} U,$$

$$\Omega(M_1 - M_2 - (\log b)^{01} U, M_1 - M_2 - (\log b)^{01} U) = 0.$$

Cette relation se réduit à

$$\Omega(M_1, M_2) = | \, x \; x^{10} \; x^{01} \; x^{11} \, | = 0,$$

(*) Tzitzeica, *Géométrie différentielle projective des réseaux*. (Paris, Gauthier-Villars, 1924.) Voir p. 257, n° 246.

le second membre représentant le déterminant à seize éléments dont les quatre lignes s'obtiennent en affectant des indices 1, 2, 3, 4 la ligne écrite. Pour tout point de la surface (x), nous devons donc avoir une relation de la forme

$$x^{11} + \alpha x^{10} + \beta x^{01} + \gamma x = 0,$$

ce qui est impossible. Le premier cas ne peut donc se présenter.

4. Passons au second cas : les surfaces (U_n) et (V_{n+1}) coïncident.

Le point U_n a pour hyperplan polaire par rapport à Q l'hyperplan $V_{n-2}V_{n-1}V_nV_{n+1}V_{n+2}$, c'est-à-dire $V_{n-2}V_{n-1}V_nU_nU_{n-1}$. Le point U_n et la surface (U_n) appartiennent donc à l'hyperquadrique Q. Il en est de même de la surface (V_n) ou (U_{n+1}), mais les surfaces (U_{n-1}), (V_{n-1}) n'appartiennent pas à Q.

La droite U_nV_n appartenant constamment à Q, d'après le théorème de M. Tzitzeica qui vient d'être invoqué, les surfaces (U_n), (V_n) représentent les tangentes asymptotiques d'une certaine surface (y) de S_3. De plus, les lignes asymptotiques de la surface (y) sont les lignes u et les lignes v. Les tangentes aux lignes v de la surface (y) sont représentées par les points de la surface (U_n), les tangentes aux lignes v, par les points de la surface (V_n).

Les plans $U_{n-1}U_nU_{n+1}$, $V_{n-1}V_nV_{n+1}$, conjugués par rapport à Q, sont tangents à cette hyperquadrique le long de la droite U_nV_n; par suite la quadrique Φ_{n-1} est dégénérée. La quadrique Φ_n est représentée par les plans $U_nU_{n+1}U_{n+2}$ ou $V_{n-1}V_nV_{n+1}$, $V_nV_{n+1}V_{n+2}$ ou $U_{n-1}U_nU_{n+1}$; elle coïncide donc avec Φ_{n-1}. On établit de même que la quadrique Φ_{n+1} coïncide avec Φ_{n-2}, et ainsi de suite. Nous conviendrons de dire que la suite de quadriques Φ, Φ_1, Φ_2, ... est terminée à la quadrique non dégénérée Φ_{n-2}.

On remarquera que les quadriques Φ_{n-2} sont précisément les quadriques de Lie relatives à la surface (y).

La suite de Laplace (U), (V), (V_1), ..., (V_n), (U_n), ..., (U_1) a la période $2n + 2$.

Si (U), (V) *sont les surfaces de l'hyperquadrique de Klein qui représentent les tangentes asymptotiques d'une surface* (x), *et si la suite de Laplace à laquelle appartiennent* (U), (V) *est périodique, la période de cette suite est paire. Si l'on représente par* $2n + 2$ *cette période, les surfaces* (U_n) *ou* (V_{n+1}), (U_{n+1}) *ou* (V_n) *de la suite appartiennent à l'hyperquadrique de Klein et représentent les tangentes asymptotiques d'une surface* (y). *Entre les surfaces* (x) *et* (y) *existe une correspondance conservant les asymptotiques; deux points homologues* x, y *de ces surfaces sont reliés par une suite de* n *quadriques* Φ, Φ_1, ..., Φ_{n-2} *dont la première est la quadrique de Lie relative au point* x *de* (x), *la dernière la quadrique de Lie relative au point* y *de* (y); *deux quadriques consécutives de la suite se touchent en quatre points.*

Pour $n = 2$, on retrouve la correspondance entre les surfaces (x), (y) considérée par M. Demoulin dans les notes citées au début. Les surfaces (x), (y) ont alors mêmes quadriques de Lie Φ.

5. Reprenons la suite de Laplace (illimitée dans les deux sens) ..., (U_1), (U), (V), (V_1), ... et supposons que la quadrique Φ_{n-2} ne soit pas en général dégénérée et n'ait que cinq points caractéristiques distincts, dont quatre en commun avec la quadrique Φ_{n-3}. En d'autres termes, supposons que les droites $U_{n-1}U_n$, $V_{n-1}V_n$ soient tangentes à l'hyperquadrique Q.

Soit A le point de contact de la droite $U_{n-1}U_n$ avec Q. Lorsque u, v varient, le point A engendre une surface (A), appartenant à Q et à laquelle toutes les droites $U_{n-1}U_n$ sont tangentes. La surface (A) doit par suite être une des surfaces (U_{n-1}), (U_n). Observons que si la surface (U_{n-1}) appartient à Q, le plan tangent à cette surface en un quelconque de ses points est tangent à Q et rencontre cette hyperquadrique suivant une conique dégénérée; cette conique représente les génératrices d'un mode de la quadrique Φ_{n-2} et celle-ci est par suite toujours dégénérée, contrairement à l'hypothèse. Il en résulte que les points A et U_n sont confondus, la droite $U_{n-1}U_n$ touchant Q au point U_n et la surface (U_n) appartenant à Q.

De même, la surface (V_n) appartient à l'hyperquadrique Q et la droite $V_{n-1}V_n$ touche cette hyperquadrique au point V_n.

Les points U_n, V_n sont en général distincts, d'après ce qui a été vu plus haut. Les points U_n et V_n étant conjugués par rapport à Q, la droite U_nV_n appartient à cette hyperquadrique.

Le plan $U_{n-1}U_nU_{n+1}$, tangent à (U_n) et par suite à Q au point U_n, rencontre Q suivant deux droites passant par U_n et dont l'une est U_nV_n. Si ces deux droites sont distinctes, comme les plans $U_{n-1}U_nU_{n+1}$ et $V_{n-1}V_nV_{n+1}$ sont conjugués par rapport à Q, ces deux plans sont confondus. Mais le second de ces plans doit rencontrer Q suivant deux droites passant par V_n; il en résulte que les deux plans confondus envisagés rencontrent Q suivant la droite U_nV_n comptée deux fois. Les points U_{n-1}, V_{n-1} étant conjugués par rapport à Q et par suite par rapport à la conique formée de la droite U_nV_n comptée deux fois, doivent appartenir à cette droite et par suite à Q, contrairement à l'hypothèse. On en conclut que les plans $U_{n-1}U_nU_{n+1}$, $V_{n-1}V_nV_{n+1}$ sont distincts et rencontrent Q suivant la droite U_nV_n comptée deux fois.

Le point U_{n+1} appartient au plan tangent à Q en U_n; si ce point appartient à Q, il est situé sur la droite U_nV_n; si ce point n'appartient pas à Q, la droite U_nU_{n+1} est tangente à Q en U_n. Les points U_n, U_{n+1} sont conjugués et l'on a donc

$$\Omega(U_n, U_{n+1}) = 0.$$

Dérivons cette relation par rapport à u; il vient

$$\Omega(U_n^{10}, U_{n+1}) + \Omega(U^n, U_{n+1}^{10}) = 0.$$

Nous avons

$$U_n^{10} = h_n U_{n-1}, \qquad U_{n+1}^{10} = h_{n+1} U_n,$$

h_n et h_{n+1} ne pouvant être nuls, puisque la suite de Laplace envisagée n'est pas terminée.

La relation précédente devient

$$h_n \Omega(U_{n-1}, U_{n+1}) + h_{n+1}\Omega(U_n, U_n) = 0,$$

et, puisque U_n appartient à Q, on a donc

$$\Omega(U_{n-1}, U_{n+1}) = 0.$$

Les points U_{n-1}, U_{n+1} sont donc conjugués par rapport à Q; d'autre part, U_{n-1} n'appartient pas à Q et la droite $U_{n-1}U_{n+1}$ est tangente à cette hyperquadrique. Il en résulte que U_{n+1} appartient à Q et précisément à la droite U_nV_n. Il en est de même de V_{n+1}, et, par suite, U_{n+1} doit coïncider avec V_n et V_{n+1} avec U_n. La suite de Laplace déterminée par les surfaces (U), (V) est donc périodique.

Si la quadrique Φ_{n-2}, supposée non dégénérée en général, ne possède que cinq points caractéristiques distincts dont quatre en commun avec la quadrique Φ_{n-3}, la suite de Laplace à laquelle appartiennent les surfaces (U), (V) *est périodique.*

Liège, le 22 novembre 1927.

ERRATUM

Bulletin de la Classe des Sciences, 1927, page 814, 3e ligne, lire

$$U^{ik} = \frac{\partial^{i+k}}{\partial u^i \partial v^k} U.$$

Marcel HAYEZ, imprimeur, rue de Louvain, 112, Bruxelles.