1. Considérons une surface (x) non réglée rapportée à ses asymptotiques u, v. Les coordonnées projectives homogènes x_1, x_2, x_3, x_4 d'un point x de la surface (x) sont des fonctions analytiques de u, v. On sait, d'après M. Wilczynski, que l'on peut disposer du facteur de proportionnalité des coordonnées de x de manière que les équations linéaires aux dérivées partielles satisfaites par ces coordonnées prennent la forme

$$\left.\begin{aligned} x^{20} + 2bx^{01} + c_1 x = 0, \\ x^{02} + 2ax^{10} + c_2 x = 0, \end{aligned}\right\}, \tag{1}$$

où l'on pose

$$x^{ik} = \frac{\partial^{i+k} x}{\partial u^i \partial v^k}.$$

a, b, c_1, c_2 sont des fonctions analytiques de u, v dont les deux premières ne peuvent être nulles.

Les conditions d'intégrabilité du système (1) sont

$$\left.\begin{aligned} a^{20} + c_2^{10} + 2ba^{01} + 4ab^{01} = 0, \\ b^{02} + c_1^{01} + 2ab^{10} + 4ba^{10} = 0, \\ c_1^{02} + 2ac_1^{10} - 4c_2 b^{01} = c_2^{20} + 2bc_2^{01} - 4c_1 a^{10}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Les points U, V représentant, sur l'hyperquadrique Q de Klein, dans un espace linéaire S_5 à cinq dimensions, les tangentes xx^{10}, xx^{01} aux lignes asymptotiques de la surface (x), engendrent des surfaces (U), (V) appartenant à une même suite de Laplace. On a

$$U^{10} + 2bV = 0, \qquad V^{01} + 2aU = 0.$$

Nous désignons par

$$U_1 = U^{01} - (\log b)^{01} U, \qquad V_1 = V^{10} - (\log a)^{10} V$$

les transformés de Laplace de U, V respectivement dans le sens des v et dans le sens des u.

Un point y a, par rapport au tétraèdre de sommets x, x^{10}, x^{01}, x^{11}, des coordonnées locales z_1, z_2, z_3, z_4 définies par

$$y = z_1 x + z_2 x^{10} + z_3 x^{01} + z_4 x^{11}.$$

Les arêtes du tétraèdre $xx^{10}\,x^{01}\,x^{11}$ seront représentées, sur l'hyperquadrique Q, par les points

$$U = |x \quad x^{10}|,\quad V = |x \quad x^{01}|,\quad M_1 = |x \quad x^{11}|,\quad M_2 = |x^{10} \quad x^{01}|,$$
$$M_3 = |x^{10} \quad x^{11}|,\quad M_4 = |x^{01} \quad x^{11}|.$$

Les coordonnées radiales générales d'une droite dont les coordonnées radiales locales sont Z_{12}, Z_{13}, ..., Z_{34} sont données par

$$UZ_{12} + VZ_{13} + M_1 Z_{14} + M_2 Z_{23} + M_3 Z_{24} + M_4 Z_{34}.$$

2. Les directrices de Wilczynski r, s ont pour images, sur l'hyperquadrique Q, les points R, S où la droite $U_1 V_1$ coupe cette hyperquadrique. On a précisément

$$R = U_1 + V_1,\qquad S = V_1 - U_1.$$

Comme on a

$$U_1 = M_1 - M_2 - (\log b)^{01} U,$$
$$V_1 = M_1 + M_2 - (\log a)^{10} V,$$

il vient

$$R = 2M_1 - (\log b)^{01} U - (\log a)^{10} V,$$
$$S = 2M_2 + (\log b)^{01} U - (\log a)^{10} V.$$

3. Nous allons rechercher les points et les plans focaux des droites r. Observons que les points de la surface (R), qui représentent les droites d'une développable de la congruence (r), forment une courbe dont les tangentes appartiennent à l'hyperquadrique Q. Si nous posons

$$\Omega(p, q) = p_{12} q_{34} + p_{34} q_{12} - p_{13} q_{24} - p_{24} q_{13} + p_{14} q_{23} + p_{23} q_{14},$$

de manière que l'équation de Q soit

$$\Omega(p, p) = 0,$$

p_{12}, p_{13}, ..., p_{34} étant les coordonnées radiales de droites, l'équation différentielle des courbes tracées sur la surface (R) et dont les tangentes appartiennent à Q sera

$$\Omega(R^{10}\,du + R^{01}\,dv,\quad R^{10}\,du + R^{01}\,dv) = 0. \tag{3}$$

*

On a actuellement

$$\left.\begin{aligned} R^{10} = {} & [8ab - (\log b)^{11}]U - \frac{1}{2}[\alpha - \overline{(\log a)^{10}}^2]V \\ & - (\log a)^{10}(M_1 + M_2) + 2M_3, \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} R^{01} = {} & -\frac{1}{2}[\beta - \overline{(\log b)^{01}}^2]U + [8ab - (\log a)^{11}]V \\ & - (\log b)^{01}(M_1 - M_2) + 2M_4, \end{aligned}\right\}$$

en posant

$$\alpha = 2(\log a)^{20} + \overline{(\log a)^{10}}^2 + 4(b^{01} + c_1),$$

$$\beta = 2(\log b)^{02} + \overline{(\log b)^{01}}^2 + 4(a^{10} + c_2),$$

On a, d'autre part,

$$\Omega(U, M_4) = -\Omega(V, M_3) = \Omega(M_1, M_2) = \Delta,$$

où Δ représente le déterminant qui ne peut être identiquement nul,

$$\Delta = |\, x \quad x^{10} \quad x^{01} \quad x^{11} \,|.$$

On a en outre

$$\Omega(U, V) = \Omega(U, M_1) = \cdots = \Omega(M_3, M_4) = 0.$$

L'équation différentielle (3) s'écrit, par suite,

$$\alpha du^2 + 2\left(\log \frac{a}{b}\right)^{11} du\, dv - \beta dv^2 = 0. \tag{4}$$

Cela étant, considérons la droite joignant le point R au point

$$\lambda R^{10} + \mu R^{01},$$

λ et μ satisfaisant à l'équation

$$\alpha\lambda^2 + 2\left(\log \frac{a}{b}\right)^{11} \lambda\mu - \beta\mu^2 = 0. \tag{5}$$

Les points de cette droite représentent les droites d'un faisceau de rayons ayant pour centre un foyer de la droite *r* et pour plan un plan focal de cette droite.

La droite représentée par le point $\lambda R^{10} + \mu R^{01}$ est commune aux quatre plans

$$\lambda\left[-z_1(\log a)^{10} + \frac{1}{2} z_2 \left\{\alpha - \overline{(\log a)^{10}}^2\right\} + z_3\left\{8ab - (\log b)^{11}\right\}\right]$$
$$+ \mu\left[z_1(\log b)^{01} - z_2\left\{8ab - (\log a)^{11}\right\} - \frac{1}{2} z_3\left\{\beta - \overline{(\log b)^{11}}^2\right\}\right] = 0.$$

$$\lambda\left[2z_3 + z_4(\log a)^{10}\right] - \mu\left[2z_2 + z_4(\log b)^{01}\right] = 0, \tag{6}$$

$$\lambda\left[z_3(\log a)^{10} - \frac{1}{2} z_4\left\{\alpha - \overline{(\log a)^{11}}^2\right\}\right]$$
$$+ \mu\left[z_3(\log b)^{01} + z_4\left\{8ab - (\log a)^{11}\right\} + 2z_1\right] = 0,$$

$$\lambda\left[2z_1 + z_2(\log a)^{10} + z_4\left\{8ab - (\log b)^{11}\right\}\right]$$
$$+ \mu\left[z_2(\log b)^{01} - \frac{1}{2} z_4\left\{\beta - \overline{(\log b)^{01}}^2\right\}\right] = 0.$$

Les équations locales de la droite r sont

$$\frac{z_2}{(\log b)^{01}} = \frac{z_3}{(\log a)^{10}} = \frac{z_4}{-2}.$$

Le plan (6) contient la droite r; par suite, les plans focaux de cette droite seront donnés par l'équation (6), où l'on posera

$$\lambda = \frac{1}{\alpha}\left[-\left(\log\frac{a}{b}\right)^{11} \pm \sqrt{\overline{\left(\log\frac{a}{b}\right)^{11}}^2 + \alpha\beta}\right]\mu. \tag{7}$$

Les trois autres plans sont rencontrés par la droite r au point de coordonnées locales

$$\begin{aligned}
\rho z_1 &= \mu\left[16ab - 2(\log a)^{11} - (\log a)^{10}(\log b)^{01}\right] - \lambda\alpha,\\
\rho z_2 &= 2\mu(\log b)^{01},\\
\rho z_3 &= 2\mu(\log a)^{10},\\
\rho z_4 &= -4\mu.
\end{aligned}$$

En remplaçant λ par ses valeurs (7), on trouve, pour les foyers p, q de la droite r,

$$\left.\begin{aligned}
p = {}&\left[16ab - (\log ab)^{11} - (\log a)^{10}(\log b)^{01}\right]x + 2x^{10}(\log b)^{01}\\
&+ 2x^{01}(\log a)^{10} - 4x^{11} + x\sqrt{\overline{\left(\log\frac{a}{b}\right)^{11}}^2 + \alpha\beta},
\end{aligned}\right\}$$

$$q = [16ab - (\log ab)^{11} - (\log a)^{10}(\log b)^{01}]x + 2x^{10}(\log b)^{01} + 2x^{01}(\log a)^{10} - 4x^{11} - x\sqrt{\overline{\left(\log\frac{a}{b}\right)^{11}}^{2} + \alpha\beta}.$$

4. Occupons-nous maintenant de la congruence (s). Nous avons

$$\begin{aligned} S^{10} &= -\frac{1}{2}[\alpha - \overline{(\log a)^{10}}^{2}]V + U(\log b)^{01} \\ &\quad - (\log a)^{10}(M_1 + M_2) + 2M_3, \\ S^{01} &= \frac{1}{2}[\beta - \overline{(\log b)^{01}}^{2}]U - V(\log a)^{11} \\ &\quad + (\log b)^{01}(M_1 - M_2) - 2M_4. \end{aligned}$$

L'équation différentielle

$$\Omega(S^{10}du + S^{01}dv, \quad S^{10}du + S^{01}dv) = 0$$

des courbes tracées sur la surface (S) et dont les tangentes appartiennent à l'hyperquadrique Q se réduit à l'équation (4).

La droite représentée par le point $\lambda S^{10} + \mu S^{01}$, où λ, μ satisfont à l'équation (5), est l'intersection des quatre plans

$$\left.\begin{aligned} &\lambda\left[-z_1(\log a)^{10} + \frac{1}{2}z_2\{\alpha - \overline{(\log a)^{10}}^{2}\} + z_3(\log b)^{11}\right] \\ &\qquad + \mu\left[-z_1(\log b)^{01} + z_2(\log a)^{11} + \frac{1}{2}z_3\{\beta - \overline{(\log b)^{01}}^{2}\}\right] = 0, \\ &\lambda\left[z_3(\log a)^{10} - \frac{1}{2}z_4\{\alpha - \overline{(\log a)^{10}}^{2}\}\right] \\ &\qquad + \mu[-z_3(\log b)^{01} - z_4(\log a)^{11} - 2z_1] = 0, \\ &\lambda[2z_1 + z_2(\log a)^{10} + z_4(\log b)^{11}] \\ &\qquad + \mu\left[-z_2(\log b)^{01} + \frac{1}{2}z_4\{\beta - \overline{(\log b)^{01}}^{2}\}\right] = 0, \\ &\lambda[2z_3 + z_4(\log a)^{10}] + \mu[2z_2 + z_4(\log b)^{01}] = 0. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Les équations locales de s sont

$$2z_1 + z_2(\log a)^{10} + z_3(\log b)^{01} = 0, \quad z_4 = 0.$$

Cette droite rencontre les quatre plans précédents au point de coordonnées

$$z_1 : z_2 : z_3 = \mu (\log b)^{01} - \lambda (\log a)^{10} : 2\lambda : -2\mu, \quad z_4 = 0. \tag{9}$$

En remplaçant λ par ses valeurs (7), on obtient les foyers m_1, n_1, de la droite s :

$$\left. \begin{aligned} m_1 = [x(\log a)^{10} - 2x^{10}] \left[\left(\log \frac{a}{b}\right)^{11} - \sqrt{\overline{\left(\log \frac{a}{b}\right)^{11}}^2 + \alpha\beta} \right] \\ + \alpha[x(\log b)^{01} - 2x^{01}], \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} n_1 = [x(\log a)^{10} - 2x^{10}] \left[\left(\log \frac{a}{b}\right)^{11} + \sqrt{\overline{\left(\log \frac{a}{b}\right)^{11}}^2 + \alpha\beta} \right] \\ + \alpha[x(\log b)^{01} - 2x^{01}]. \end{aligned} \right\}$$

Les plans focaux de la droite s sont les plans passant par cette droite et par la droite commune aux plans (8), pour les valeurs (7) de λ. On obtient successivement

$$\left. \begin{aligned} \mu [4z_1 + 2z_2 (\log a)^{10} + 2z_3 (\log b)^{01} \\ + z_4 \{ 2 (\log a)^{11} + (\log a)^{10} (\log b)^{01} \}] + \lambda a z_4 = 0 \end{aligned} \right\}$$

et

$$\left. \begin{aligned} 4z_1 + 2z_2 (\log a)^{10} + 2z_3 (\log b)^{01} \\ + z_4 [(\log ab)^{11} + (\log a)^{10} (\log b)^{01}] \pm z_4 \sqrt{\overline{\left(\log \frac{a}{b}\right)^{11}}^2 + \alpha\beta} = 0. \end{aligned} \right\}$$

5. Les plans focaux de la droite s rencontrent la droite r correspondant aux mêmes valeurs de u, v en des points dont les coordonnées locales sont

$$\left. \begin{aligned} z_1 : z_2 : z_3 : z_4 = (\log ab)^{11} - (\log a)^{10} (\log b)^{01} \\ \pm \sqrt{\overline{\left(\log \frac{a}{b}\right)^{11}}^2 + \alpha\beta} : 2(\log b)^{01} : 2(\log a)^{10} : -4. \end{aligned} \right|$$

Ces points pourront donc être représentés par

$$\left.\begin{aligned} m_1' &= [(\log ab)^{11} - (\log a)^{10}(\log b)^{01}]x + 2x^{10}(\log b)^{01} \\ &\quad + 2x^{01}(\log a)^{10} - 4x^{11} + x\sqrt{\left(\log\frac{a}{b}\right)^{11\,2} + \alpha\beta}, \\ n_1' &= [(\log ab)^{11} - (\log a)^{10}(\log b)^{01}]x + 2x^{10}(\log b)^{01} \\ &\quad + 2x^{01}(\log a)^{10} - 4x^{11} - x\sqrt{\left(\log\frac{a}{b}\right)^{11\,2} + \alpha\beta}. \end{aligned}\right\}$$

On en déduit les relations

$$p = m_1' + 2(h_1 + k_1)x,$$
$$q = n_1' + 2(h_1 + k_1)x,$$

où

$$h_1 = -(\log b)^{11} + 4ab, \qquad k_1 = -(\log a)^{11} + 4ab.$$

Ces relations permettent la construction des plans focaux de s en partant des points focaux de la droite r.

D'autre part, les plans menés par la droite r et par les tangentes asymptotiques au point x à la surface (x) ont pour équations

$$2z_2 + z_4(\log b)^{01} = 0, \qquad 2z_3 + z_4(\log a)^{10} = 0.$$

Convenons d'appeler éléments focaux correspondants des droites r, s les éléments focaux donnés par les mêmes racines λ, μ de l'équation (5).

Le plan passant par la droite r et par le foyer (9) de la droite s a pour équation

$$\mu[2z_2 + z_4(\log b)^{01}] + \lambda[2z_3 + z_4(\log a)^{10}] = 0.$$

En comparant cette équation à l'équation (6) du plan focal de la droite r, on voit que :

Un plan focal de la droite r *et le plan projetant de* r *le foyer correspondant de la droite* s *partagent harmoniquement les* *plans projetant de* r *les tangentes asymptotiques de la surface* (x) *au point* x *correspondant aux mêmes valeurs de* u, v *que* r *et* s.

Ce résultat permet de construire les foyers de la droite s connaissant les plans focaux de la droite r.

6. Proposons-nous de rechercher dans quelles conditions les foyers de la droite s appartiennent aux plans focaux de la droite r correspondant aux mêmes valeurs de u, v.

Deux cas peuvent se présenter :

1° Les plans focaux de r passent par les foyers respectivement correspondants de s.

D'après la propriété précédente, les plans focaux de r doivent coïncider avec les plans projetant de r les tangentes asymptotiques de la surface (x) au point x. L'équation (5) doit, par suite, être satisfaite pour $\lambda = 0$ et $\mu = 0$; on doit donc avoir

$$\alpha = 0, \qquad \beta = 0.$$

Dans ces conditions, les quadriques de Lie de la surface (x) n'ont que deux points caractéristiques (*).

2° Les plans focaux de r passent par les foyers de s qui ne leur correspondent pas.

Il résulte de la propriété établie plus haut que les plans focaux de r doivent partager harmoniquement les plans projetant de r les tangentes asymptotiques de la surface (x) au point x. Pour cela, il faut et il suffit que la somme des racines $\lambda : \mu$ de l'équation (5) soit nulle, c'est-à-dire que l'on ait

$$(\log a)^{11} = (\log b)^{11}.$$

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que les plans

(*) Voir la troisième de nos notes citées plus haut. Voir également les notes de M. Demoulin : *Sur la quadrique de Lie* (C. R., 1908, t. CXLVII, pp. 493-496); *Sur les Surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que deux points caractéristiques*. (C. R., 1924, t. CLXXIX, pp. 20-23.)

focaux de la droite r *passent par les foyers de la droite* s *sont que*

1° *Les quadriques de Lie de la surface* (x) *n'aient que deux points caractéristiques, ou que*

2° *Le rapport de* a *à* b *soit le produit d'une fonction de* u *seule par une fonction de* v *seule.*

7. Si une congruence de droites est formée par les tangentes aux lignes asymptotiques d'un système d'une surface, les foyers et les plans focaux de chacune des droites de cette congruence sont confondus. Réciproquement, si cette dernière propriété est vérifiée pour toute droite d'une congruence, celle-ci est formée par les tangentes asymptotiques d'un système d'une surface. La surface qui représente, sur l'hyperquadrique Q de Klein, les droites de cette congruence est caractérisée par le fait que ses plans tangents touchent Q suivant des droites.

Pour que la congruence des droites r soit formée des tangentes aux asymptotiques d'un système d'une surface, il faut et il suffit donc que l'équation (5) ait une racine double, c'est-à-dire que l'on ait

$$\overline{\left(\log \frac{a}{b}\right)^{11}} + \alpha\beta = 0. \tag{10}$$

La congruence formée par les droites s possède alors la même propriété

Si une directrice de Wilczynski d'une surface engendre une congruence formée par des tangentes asymptotiques d'une surface, la congruence engendrée par l'autre directrice jouit de la même propriété. La condition nécessaire et suffisante pour que cette propriété ait lieu est exprimée par la relation (10).

Les droites r sont dans ces conditions des tangentes asymptotiques de la surface engendrée par le point

$$\begin{aligned} p = [16ab - (\log ab)^{11} - (\log a)^{10} (\log b)^{01}]\, x \\ + 2x^{10} (\log b)^{01} + 2x^{01} (\log a)^{10} - 4x_{11}, \end{aligned}$$

et les droites s, de la surface engendrée par le point

$$m = [x(\log a)^{10} - 2x^{10}]\left(\log \frac{a}{b}\right)^{11} + \alpha[x(\log b)^{01} - 2x^{01}].$$

Les asymptotiques considérées sur les deux surfaces sont déterminées par l'une des deux équations différentielles équivalentes

$$\alpha\, du + \left(\log \frac{a}{b}\right)^{11} dv = 0$$

ou

$$\left(\log \frac{a}{b}\right)^{11} du - \beta dv = 0.$$

Liége, le 2 avril 1928.

Marcel Hayez, imprimeur, rue de Louvain, 112, Bruxelles.