GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DIFFÉRENTIELLE.

Sur les lignes asymptotiques d'une surface et l'espace réglé

(*Première note*),

par L. GODEAUX, professeur à l'Université de Liége.

Dans une note déjà ancienne (*), M. Demoulin a montré que l'enveloppe des quadriques de Lie d'une surface se compose de la surface elle-même et d'une seconde surface touchée en quatre points par les quadriques. Vers la même époque, M. Wilczynski (**) a introduit quatre complexes attachés en chaque point d'une surface. Nous nous proposons d'établir les relations qui existent entre les droites joignant les points de contact d'une quadrique de Lie avec l'enveloppe de ces quadriques, et les complexes de M. Wilczynski. Dans ce but, nous utilisons les surfaces qui représentent les tangentes asymptotiques d'une surface de l'espace ordinaire, sur l'hyperquadrique de Klein, et les propriétés de la suite de Laplace dont font partie ces surfaces (***). Nous signalons ensuite l'existence de quadriques en relation avec la quadrique de Lie, quadriques dont nous nous proposons de poursuivre l'étude dans une seconde note.

1. — Considérons une surface (x) non réglée, rapportée à ses asymptotiques. Les coordonnées projectives homogènes

(*) A. Demoulin, *Sur la quadrique de Lie*. (C. R., 1908, t. CXLVII, pp. 493-496.)

(**) Wilczynski, *Projective differential geometry of curved surfaces*, second memoir. (Transactions of the Amer. mathem. Society, 1908, t. IX, pp. 79-120.)

(***) Ces surfaces ont été considérées par M. Bompiani, dans son mémoire *Sull'equazione di Laplace* (Rendiconti del Circ. matem. di Palermo, 1912, t. XXXIV, pp. 383-407), et par M. Tzitzéica, dans son ouvrage sur la *Géométrie différentielle projective des réseaux* (Paris, Gauthier-Villars, 1924).

x_1, x_2, x_3, x_4 d'un point x de la surface (x) sont des fonctions analytiques de deux variables u, v satisfaisant à un système de deux équations aux dérivées partielles du second ordre. M. Wilczynski (*) a montré que l'on peut mettre ces équations sous la forme

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + 2b\frac{\partial x}{\partial v} + c_1 x = 0,$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + 2a\frac{\partial x}{\partial u} + c_2 x = 0,$$

a, b, c_1, c_2 étant des fonctions analytiques de u, v, les fonctions a, b n'étant pas identiquement nulles.

Nous conviendrons de poser

$$x^{ik} = \frac{\partial^{i+k}}{\partial u^i \partial v^k};$$

les équations précédentes s'écriront alors

$$\left.\begin{aligned} x^{20} + 2bx^{01} + c_1 x = 0, \\ x^{02} + 2ax^{10} + c_2 x = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

La tangente asymptotique à la ligne u passant par le point x de la surface (x) passe par le point x^{10} de coordonnées x_1^{10}, x_2^{10}, x_3^{10}, x_4^{10}. Les coordonnées radiales de cette droite sont

$$U_{ik} = x_i x_k^{10} - x_k x_i^{10}, \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4).$$

Nous représenterons par U le point image de cette droite sur l'hyperquadrique Q de Klein et nous écrirons en abrégé

$$U = |x \ x^{10}|.$$

Les coordonnées du point U satisfont à l'équation de Laplace

$$U^{11} - (\log b)^{01} U^{10} - 4ab U = 0, \qquad (2)$$

(*) *Projective differential...*, premier mémoire. (Trans. of the Amer. Math. Society, 1907, t. VIII, pp. 233-260.)

où l'on a posé, d'une manière analogue à ce qui a été fait plus haut,

$$U^{ik} = \frac{\partial^{i+k}}{\partial u^i \partial v^k}.$$

Le point U décrit une surface (U) appartenant à l'hyperquadrique Q.

De même, les tangentes aux lignes asymptotiques v de (x) ont pour images, sur l'hyperquadrique Q, les points V d'une surface (V). Les coordonnées

$$V = |x\ x^{01}|$$

du point V satisfont à l'équation de Laplace

$$V^{11} - (\log a)^{10} V^{01} - 4ab V = 0. \tag{3}$$

Les tangentes à la surface (x) sont représentées, sur l'hyperquadrique Q, par les points d'une variété à trois dimensions lieu des droites joignant les points U, V des surfaces (U), (V) ayant mêmes coordonnées curvilignes u, v. Les tangentes à la surface (x) en un point x sont représentées par les points de la droite UV.

2. — La transformée de Laplace de la surface (U) dans le sens des u est engendrée par le point

$$U^{10} = |x\ x^{20}| = -2bV.$$

Cette transformée est donc la surface (V).

De même, la transformée de Laplace de la surface (V) dans le sens des v est engendrée par le point

$$V^{01} = |x\ x^{02}| = -2aU.$$

Cette transformée est donc la surface (U).

La transformée de Laplace de la surface (U) dans le sens des v est engendrée par le point

$$U_1 = U^{01} - (\log b)^{01} U.$$

Les coordonnées de ce point satisfont à l'équation de Laplace

$$U_1^{11} - (\log b h_1)^{01} U_1^{10} - h_1 U_1 = 0,$$

où l'on a posé

$$h_1 = -(\log b)^{11} + 4ab.$$

La surface (U_2), transformée de Laplace dans le sens des v de la surface (U_1), est engendrée par le point

$$U_2 = U_1^{01} - (\log b h_1)^{01} U_1,$$

dont les coordonnées satisfont à l'équation

$$U_2^{11} - (\log b h_1 h_2)^{01} U_2^{10} - h_2 U_2 = 0,$$

où l'on a posé

$$h_2 = -(\log b h_1)^{11} + h_1.$$

Plus généralement, les transformées successives de Laplace, dans le sens des v, de la surface (U) sont engendrées par les points

$$U_i = U_{i-1}^{01} - (\log b h_1 h_2 \dots h_{i-1})^{01} U_{i-1}, \qquad (i = 1, 2, \dots, 1)$$

où h_1, h_2, ... sont définis par la relation

$$h_{i-1} = -(\log b h_1 h_2 \dots h_{i-2})^{11} + h_{i-2}.$$

Les coordonnées du point U_i satisfont à l'équation de Laplace

$$U_i^{11} - (\log b h_1 h_2 \dots h_i)^{01} U_i^{10} - h_i U_i = 0.$$

De même, la transformée de Laplace dans le sens des u de la surface (V) est une surface (V_1) engendrée par le point

$$V_1 = V^{10} - (\log a)^{10} V,$$

dont les coordonnées satisfont à l'équation

$$V_1^{11} - (\log a k_1)^{10} V_1^{01} - k_1 V_1 = 0,$$

où l'on a posé

$$k_1 = -(\log a)^{11} + 4ab.$$

Les transformées successives de (V_1) dans le sens des u sont engendrées par les points

$$V_2 = V_1^{10} - (\log a k_1)^{10} V_1,$$

$$V_i = V_{i-1} - (\log a k_1 k_2 \ldots k_{i-1})^{10} V_{i-1}, \qquad (i = 3, 4, \ldots)$$

où

$$k_{i-1} = -(\log a k_1 k_2 \ldots k_{i-2})^{11} + k_{i-2}.$$

Les coordonnées du point V_i satisfont à l'équation

$$V_i^{11} - (\log a k_1 k_2 \ldots k_i)^{10} V_i^{01} - k_i V_i = 0.$$

Nous supposerons dans la suite que les surfaces (U_i), (V_i) ne se réduisent pas à une courbe ou à un point, tout au moins pour les premières valeurs de i.

3. — Considérons, sur la surface (x), une ligne asymptotique $u = u_0$. En chaque point de cette ligne, menons la tangente à la ligne des u passant par ce point. La surface réglée R_u formée par ces tangentes a pour image la ligne $u = u_0$ tracée sur la surface (U). De même, la réglée R_v lieu des tangentes aux lignes des v de (x) aux points d'une ligne $v = v_0$ de cette surface a pour image la ligne $v = v_0$ sur la surface (V).

Soit x un point non parabolique de coordonnées u_0, v_0 sur la surface (x). La demi-quadrique osculatrice en x à la réglée R_u (ou mieux le long de la droite $x x^{10}$ de cette surface) a pour image la section de l'hyperquadrique Q par le plan osculateur de la courbe $u = u_0$, de la surface (U), au point $U(u_0, v_0)$, c'est-à-dire la section de Q par le plan $U U_1 U_2$. De même, la demi-quadrique osculatrice en $x(u_0, v_0)$ à la réglée R_v a pour image la section de Q par le plan $V V_1 V_2$ osculateur en $V(u_0, v_0)$ à la ligne $v = v_0$ sur la surface (V).

On sait que ces deux demi-quadriques ont pour support commun la quadrique de Lie (*), c'est-à-dire que les plans

(*) Ce théorème, énoncé sans démonstration par Lie, a été démontré par M. Demoulin, *Sur quelques propriétés des surfaces courbes.* (C. R., 1908, t. CXLVII, pp. 565-568.)

UU_1U_2 et VV_1V_2 sont conjugués par rapport à l'hyperquadrique Q.

La droite VV_1 est, par construction, tangente en $V(u_0, v_0)$ à la surface (V) et, par suite, à l'hyperquadrique Q. Les points V, V_1 sont donc conjugués par rapport à cette hyperquadrique.

L'hyperplan polaire de V par rapport à l'hyperquadrique Q est tangent à celle-ci en V; il passe, d'autre part, par les points V_1, U, U_1, U_2 conjugués de V. Par suite, cet hyperplan $U_2U_1UVV_1$ est déterminé par cinq points consécutifs de la suite de Laplace ... $U_i, \ldots, U, V, \ldots, V_k$.

De cette propriété résulte que les hyperplans $U_4U_3U_2U_1U$, $U_3U_2U_1UV$, $U_1UVV_1V_2$, $UVV_1V_2V_3$ et $VV_1V_2V_3V_4$ ont respectivement pour pôles par rapport à l'hyperquadrique Q les points V_2, V_1, U, U_1, U_2. La suite de Laplace considérée est autopolaire par rapport à l'hyperquadrique Q et les points U_i, V_i $(i > 2)$ ont respectivement pour hyperplans polaires $V_{i-2}V_{i-1}V_iV_{i+1}V_{i+2}$ et $U_{i+2}U_{i+1}U_iU_{i-1}U_{i-2}$.

Le complexe linéaire Γ_u osculateur à la surface réglée R_u le long de la génératrice xx^{10} de cette surface passant par le point $x(u_0, v_0)$ est représenté par l'hyperplan osculateur à la courbe $u = u_0$ de la surface (U) au point $U(u_0, v_0)$, c'est-à-dire par l'hyperplan $UU_1U_2U_3U_4$. Par suite, le point V_2 est la seconde image du complexe Γ_u.

De même, le complexe linéaire osculateur à la réglée R_v le long de la génératrice passant par le point $x(u_0, v_0)$ a pour seconde image le point U_2. Nous désignerons ce complexe par Γ_v. Les complexes Γ_u, Γ_v sont les deux premiers complexes considérés par M. Wilczynski.

4. Reprenons la courbe $u = u_0$ sur la surface (x) et considérons la réglée S_v engendrée par les tangentes à cette courbe. Cette réglée S_v a pour image sur l'hyperquadrique Q la courbe $u = u_0$ de la surface (V). Le complexe linéaire Γ'_v osculateur à la réglée S_v le long de la tangente à la courbe $u = u_0$

au point $x(u_0, v_0)$ a pour image l'hyperplan osculateur en $V(u_0, v_0)$ à la courbe $u = u_0$ de la surface (V), c'est-à-dire l'hyperplan $VUU_1U_2U_3$. La seconde image du complexe Γ'_v est donc le point V_1.

De même, la seconde image du complexe linéaire Γ'_u osculateur à la réglée S_u, lieu des tangentes à la courbe $v = v_0$ de (x), le long de la tangente à cette courbe au point $x(u_0, v_0)$, est le point U_1.

Les quatre complexes linéaires osculateurs de Wilczynski en un point non parabolique $\mathrm{x}(\mathrm{u}_0, \mathrm{v}_0)$ *de la surface* (x) *ont comme secondes images les deux premiers points transformés de Laplace des points* $\mathrm{U}(\mathrm{u}_0, \mathrm{v}_0)$, $\mathrm{V}(\mathrm{u}_0, \mathrm{v}_0)$ *des surfaces* (U), (V) *respectivement dans le sens des* v *et dans le sens des* u.

La droite U_1V_1 rencontre l'hyperquadrique Q en deux points qui sont les images des directrices de Wilczynski.

Représentons par M_1, M_2 les points de Q images des droites xx^{11}, $x^{01}x^{10}$, c'est-à-dire posons

$$M_1 = |x\ x^{11}|, \qquad M_2 = |x^{10}\ x^{01}|.$$

Nous avons (*)

$$U^{01} = M_1 - M_2, \qquad V^{10} = M_1 + M_2,$$

et, par suite,

$$U_1 = M_1 - M_2 - (\log b)^{01}U, \qquad V_1 = M_1 + M_2 - (\log a)^{10}V,$$

$$U_1 + V_1 = 2M_1 - (\log b)^{01}U - (\log a)^{10}V,$$

$$U_1 - V_1 = -2M_2 - (\log b)^{01}U + (\log a)^{10}V.$$

(*) Nous conviendrons, suivant en cela une notation souvent utilisée, de représenter par

$$\lambda A + \mu B + \nu C + \dots$$

un point dont les coordonnées s'obtiennent en additionnant les coordonnées de même nom des points A, B, C, ... multipliées respectivement par les facteurs λ, μ, ν, ... Nous appliquerons cette notation aussi bien à l'espace à trois dimensions contenant la surface (x) qu'à l'espace à cinq dimensions contenant l'hyperquadrique Q.

Ces deux derniers points appartiennent à la droite U_1V_1; ils appartiennent, d'autre part, le premier au plan UVM_1, le second au plan UVM_2. Le premier de ces plans représente la gerbe de droites de sommet $x(u_0, v_0)$; le second représente les droites situées dans le plan tangent $xx^{10}x^{01}$ à la surface (x) au point x. Ces deux plans appartiennent, par suite, en entier à l'hyperquadrique Q et les points $U_1 + V_1$, $U_1 - V_1$, intersections de Q et de la droite U_1V_1, sont les images des directrices de Wilczynski.

5. — Le point $x(u_0, v_0)$ de la surface (x) n'étant pas, par hypothèse, parabolique, les quatre points x, x^{10}, x^{01}, x^{11} ne sont pas situés dans un même plan. Entre les coordonnées y_1, y_2, y_3, y_4 d'un point P par rapport au tétraèdre de référence primitif, et les coordonnées z_1, z_2, z_3, z_4 du même point par rapport au tétraèdre $xx^{10}x^{01}x^{11}$, on a les relations

$$y_i = x_i z_i + x_i^{10} z_2 + x_i^{01} z_3 + x_i^{11} z_4. \qquad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{4}$$

Nous dirons que (y_1, y_2, y_3, y_4) sont les coordonnées générales du point P, (z_1, z_2, z_3, z_4) les coordonnées locales de ce point.

Des formules (4), on déduit les expressions des coordonnées locales d'un point en fonction de ses coordonnées générales. On a

$$z_1 : z_2 : z_3 : z_4 = \begin{vmatrix} y \\ x^{10} \\ x^{01} \\ x^{11} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x \\ y \\ x^{01} \\ x^{11} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x \\ x^{10} \\ y \\ x^{11} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x \\ x^{10} \\ x^{01} \\ y \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Dans le second membre, nous avons représenté des déterminants à seize éléments dont on obtient les quatre colonnes en affectant successivement des indices 1, 2, 3, 4 les éléments écrits.

Nous aurons besoin, dans la suite, des dérivées partielles de

z_1, z_2, z_3, z_4 par rapport à u, v. Nous obtiendrons leurs expressions en fonction de z_1, z_2, z_3, z_4 de la manière suivante :

Les conditions d'intégrabilité du système (1) sont (*)

$$\left.\begin{aligned} a^{20} + c_2^{10} + 2ba^{01} + 4ab^{01} = 0, \\ b^{02} + c_1^{01} + 2ab^{10} + 4ba^{10} = 0, \\ c_2^{20} - 4c_2a^{10} - 2ac_1^{10} = c_1^{02} - 4c_1b^{01} - 2bc_2^{01}. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

En tenant compte des deux premières conditions et des relations (5), on obtient

$$\frac{z_1^{10}}{c_1z_2 - (2bc_2 - c_1^{01})z_4} = \frac{z_2^{10}}{-z_1 - 4abz_4} = \frac{z_3^{10}}{2bz_2 + (2b^{01} + c_1)z_4} - \frac{z_4^{10}}{-z_3}. \qquad (7)$$

$$\frac{z_1^{01}}{c_2z_3 - (2ac_1 - c_2^{10})z_4} = \frac{z_2^{01}}{2az_3 + (2a^{10} + c_2)z_4} = \frac{z_3^{01}}{-z_1 - 4abz_4} = \frac{z_4^{01}}{-z_2}. \qquad (8)$$

6. En coordonnées locales, la quadrique de Lie osculatrice en $x\,(u_0, v_0)$ à la surface (x) a pour équation (**)

$$z_1z_4 - z_2z_3 + 2abz_4^2 = 0. \qquad (9)$$

L'équation en coordonnées générales de cette quadrique s'obtiendra en utilisant les formules (5). En dérivant l'équation ainsi obtenue par rapport à u et à v, on obtiendra les équations de deux surfaces passant par les points caractéristiques de la quadrique de Lie. Les équations de ces deux surfaces s'écriront, en coordonnées locales, en utilisant les formules (7) et (8). On trouve ainsi que les points caractéristiques de la quadrique (9) sont situés sur les surfaces

$$2bz_2^2 + 2b^{01}z_2z_4 + (b^{02} + 2ba^{10} + 2bc_2)z_4^2 = 0, \qquad (10)$$

$$2az_3^2 + 2a^{10}z_3z_4 + (a^{20} + 2ab^{01} + 2ac_1)z_4^2 = 0. \qquad (11)$$

Ces surfaces sont dégénérées : la première en deux plans passant par la droite xx^{01}, la seconde en deux plans passant

(*) Wilczynski, *loc. cit.*, premier mémoire.

(**) Idem, *ibid.*, second mémoire.

par la droite xx^{10} (*). Les quatre plans (10), (11) déterminent sur la quadrique de Lie (9), en dehors du point x, quatre points caractéristiques ; nous désignerons, pour abréger, par « tétraèdre de Demoulin » le tétraèdre ayant ces quatre points pour sommets. Ce tétraèdre peut d'ailleurs avoir des éléments confondus.

Quatre des arêtes du tétraèdre de Demoulin appartiennent à la quadrique de Lie. Deux de ces arêtes, que nous désignerons par d_{11}, d_{12}, sont découpées sur la quadrique de Lie par les plans (10) ; les deux autres, d_{21}, d_{22}, sont découpées par les plans (11). Les deux arêtes du tétraèdre n'appartenant pas à la quadrique de Lie seront désignées par d_1, d_2.

7. Soient P, P′ deux points dont les coordonnées générales sont respectivement (y_1, y_2, y_3, y_4), (y'_1, y'_2, y'_3, y'_4) et les coordonnées locales respectivement (z_1, z_2, z_3, z_4), (z'_1, z'_2, z'_3, z'_4).

Le point Y, image sur l'hyperquadrique Q de la droite PP′, est donné par

$$Y = Z_{12}U + Z_{13}V + Z_{14}M_1 + Z_{23}M_2 + Z_{24}M_3 + Z_{34}M_4, \tag{12}$$

où les quantités

$$Z_{ik} = z_i z'_k - z_k z'_i \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

sont les coordonnées radiales « locales » de la droite PP′ et où U, V, M_1, M_2,

$$M_3 = |x^{10}\ x^{11}|, \qquad M_4 = |x^{01}\ x^{11}|$$

sont les images des arêtes du tétraèdre $xx_{10}x_{01}x_{11}$.

8. Les génératrices de la quadrique de Lie (9), de même mode que la droite xx^{10}, ont pour équations, en coordonnées locales,

$$z_2 - \lambda z_4 = 0, \qquad z_1 - \lambda z_3 + 2abz_4 = 0.$$

(*) Cf. Demoulin, *Sur la quadrique de Lie.* (Loc. cit.)

Les coordonnées radiales locales de cette droite sont

$$\frac{Z_{12}}{\lambda^2} = \frac{Z_{13}}{2ab} = \frac{Z_{14}}{\lambda} = \frac{Z_{23}}{-\lambda} = \frac{Z_{34}}{1}, \qquad Z_{24} = 0.$$

En portant ces valeurs dans (12), on obtient, pour le point Y représentant la génératrice considérée,

$$Y = \lambda^2 U + 2abV + \lambda(M_1 - M_2) + M_4.$$

Ce point Y doit appartenir à la section de l'hyperquadrique Q par le plan UU_1U_2; par suite, on doit avoir

$$\gamma = \alpha_1 U + \alpha_2 U_1 + \alpha_3 U_2.$$

En identifiant, on trouve

$$\frac{\alpha_1}{2b\lambda^2 + 2b^{01}\lambda + b^{02} + 2ba^{10} + c_2} = \frac{\alpha_2}{2b\lambda + b(\log b^2 h_1)^{01}} = \frac{\alpha_3}{b}.$$

Appelons D_{11}, D_{12} les points d'intersection de Q avec la droite U_1U_2; ces points représentent deux génératrices de la quadrique de Lie, génératrices qui sont les directrices de la congruence commune aux deux complexes linéaires Γ_v, Γ'_u.

Pour que le point Y coïncide avec un des points D_{11}, D_{12}, il faut que λ soit choisi de manière à annuler α_1, c'est-à-dire que λ soit racine de l'équation

$$2b\lambda^2 + 2b^{01}\lambda + b^{02} + 2ba^{10} + c_3 = 0. \tag{13}$$

Comparant cette équation à l'équation (10), on voit que les points D_{11}, D_{12} représentent les arêtes d_{11}, d_{12} du tétraèdre de Demoulin.

On obtient de même la représentation des droites d_{21}, d_{22} par les points D_{21}, D_{22}, où la droite V_1V_2 rencontre l'hyperquadrique Q.

En se rappelant que les quatre complexes de Wilczynski peuvent se partager en deux couples Γ_v, Γ'_u et Γ_u, Γ'_v de complexes non en involution, on voit que

Les arêtes du tétraèdre de Demoulin qui appartiennent à la quadrique de Lie sont les directrices des congruences communes *aux couples de complexes linéaires de Wilczynski qui ne sont pas en involution.*

9. Les arêtes d_1, d_2 du tétraèdre de Demoulin qui n'appartiennent pas à la quadrique de Lie s'appuient, d'une part, sur d_{11}, d_{12}, d'autre part, sur d_{21}, d_{22}; ces droites d_1, d_2 appartiennent donc aux quatre complexes Γ_u, Γ_v, Γ'_u, Γ'_v.

Les arêtes du tétraèdre de Demoulin n'appartenant pas à la quadrique de Lie sont les droites communes aux quatre complexes linéaires de Wilczynski.

Les droites d_1, d_2 s'appuient donc en particulier sur les directrices de Wilczynski (*).

10. D'après ce qui a été établi plus haut, les plans $U_1U_2U_3$ et $V_1V_2V_3$ sont conjugués par rapport à l'hyperquadrique Q; les sections de celle-ci par ces plans représentent donc deux demi-quadriques ayant même support. Désignons par Φ_1 cette quadrique-support.

La quadrique Φ_1 passe par les arêtes d_{11}, d_{12}, d_{21}, d_{22} du tétraèdre de Demoulin. En d'autres termes, la quadrique Φ_1 est tangente à la quadrique de Lie aux sommets de ce tétraèdre.

Désignons par λ_1, λ_2 les racines de l'équation (**13**), par μ_1, μ_2 celles de l'équation

$$2a\mu^2 + 2a^{10}\mu + a^{20} + 2ab^{01} + 2ac_1 = 0. \tag{13'}$$

Les arêtes du tétraèdre de Demoulin appartenant à la quadrique de Lie auront pour équations

$$
\begin{aligned}
&z_2 = \lambda_2 z_4, && z_1 - \lambda_1 z_3 + 2abz_4 = 0, && (d_{11})\\
&z_2 = \lambda_2 z_4, && z_1 - \lambda_2 z_3 + 2abz_4 = 0, && (d_{12})\\
&z_3 = \mu_1 z_4, && z_1 - \mu_1 z'_2 + 2abz_4 = 0, && (d_{21})\\
&z_3 = \mu_2 z_4, && z_1 - \mu_2 z_2 + 2abz_4 = 0. && (d_{22})
\end{aligned}
$$

(*) Le fait que d_1, d_2 s'appuient sur la directrice de Wilczynski passant par le point x avait été remarqué par M. Bompiani, dans sa note *Contributi alla geometria proiettivo-differenziale di una superficie*. (Bollettino dell' Unione Matem. Italiana, **1924**, pp. 49-61.)

Par conséquent, la quadrique Φ_1 aura une équation de la forme

$$\left.\begin{aligned}\begin{bmatrix} z_1 - \mu_1 z_2 - \lambda_1 z_3 \\ + (2ab + \lambda_1\mu_1) z_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 - \mu_2 z_2 - \lambda_2 z_3 \\ + (2ab + \lambda_2\mu_2) z_4 \end{bmatrix} \\ + \beta (z_1 z_4 - z_2 z_3 + 2ab z_4^2) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Une génératrice de cette quadrique s'appuyant sur la droite d_{12} aura pour équations

$$\left.\begin{aligned} z_1 - \mu_1 z_2 + 2ab z_4 = \lambda(z_3 - \mu_1 z_4), \\ (\lambda - \lambda_1)[z_1 - \mu_2 z_2 - \lambda_2 z_3 + (2ab + \lambda_2\mu_2) z_4] - \beta(z_2 - \lambda z_4) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Les coordonnées radiales locales de cette droite sont

$$\begin{aligned} Z_{12} &= -2ab(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) + \lambda\lambda_2(\lambda - \lambda_1)(\mu_1 - \mu_2) - \beta\lambda^2, \\ Z_{13} &= -\mu_1\mu_2(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) + 2ab(\lambda - \lambda_1)(\mu_1 - \mu_2) - 2ab\beta, \\ Z_{14} &= (\lambda - \lambda_1)(\lambda_2\mu_1 - \lambda\mu_2) - \beta\lambda, \\ Z_{23} &= (\lambda - \lambda_1)(\lambda_2\mu_2 - \lambda\mu_1) + \beta\lambda, \\ Z_{24} &= -(\lambda - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_2), \\ Z_{34} &= (\lambda - \lambda_1)(\mu_1 - \mu_2) - \beta. \end{aligned}$$

En portant ces valeurs dans la formule (12), on obtient l'expression d'un point Y qui doit appartenir au plan $U_1U_2U_3$; ce point Y doit se présenter sous la forme

$$Y = \alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 + \alpha_3 U_3.$$

En exprimant U_1, U_2, U_3 en fonction de U, V, M_1, M_2, M_3, M_4 et en identifiant les deux expressions de Y, on obtient six relations linéaires en α_1, α_2, α_3, se réduisant à quatre relations indépendantes. En exprimant que ces relations sont compatibles, on obtient la condition

$$4ab\beta = 4ab(\lambda_2\mu_1 + \lambda_1\mu_2) + \rho,$$

où

$$\rho = b^{03} + 2b(a^{11} + c_2^{01}) + 2a^{10}b^{01} + 4b^{01}c_2.$$

En portant cette valeur de β dans l'équation (14) et en tenant compte des relations (13), (13′), on obtient, pour équation de la quadrique Φ_1,

$$\begin{aligned}4(z_1 + 2abz_4)[abz_1 + ba^{10}z_2 + ab^{01}z_3 + (2a^2b^2 + a^{10}b^{01})z_4]\\ + 2Az_2(bz_2 + b^{01}z_4) + 2Bz_3(az_3 + a^{10}z_4) + ABz_4^2\\ + \rho(z_1z_4 - z_2z_3 + 2abz_4^2) = 0,\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$A = a^{20} + 2a(b^{01} + c_1),$$
$$B = b^{02} + 2b(a^{10} + c_2).$$

Observons que si l'on dérive les deux premières relations (6), la première par rapport à u, la seconde par rapport à v; si l'on soustrait membre à membre l'une des relations obtenues de l'autre et si l'on tient compte de la troisième des relations (6), on obtient une seconde expression de ρ :

$$\rho = a^{30} + 2a(b^{11} + c_1^{10}) + 2a^{10}b^{01} + 4a^{10}c_1.$$

On a d'ailleurs encore

$$\rho = A^{10} + 2a^{10}c_1 = B^{01} + 2b^{01}c_2.$$

Nous reviendrons dans une seconde note sur la quadrique Φ_1.

11. Les plans $U_2U_3U_4$, $V_2V_3V_4$ sont conjugués par rapport à l'hyperquadrique Q; les sections de celle-ci par ces plans représentent donc deux demi-quadriques ayant une même quadrique Φ_2 comme support commun.

Plus généralement, les plans $U_iU_{i+1}U_{i+2}$, $V_iV_{i+1}V_{i+2}$ sont conjugués par rapport à Q et les sections de Q par ces plans représentent les demi-quadriques ayant comme support commun une quadrique Φ_i. Si l'on désigne par Φ la quadrique de Lie attachée au point $x(u_0, v_0)$ de la surface (x), on voit qu'à ce point correspond une suite de quadriques $\Phi, \Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_i, \ldots$ Cette suite se termine si la suite de Laplace à laquelle appartiennent les surfaces (U), (V) se termine dans un sens.

Considérons deux quadriques consécutives de la suite, Φ_i, Φ_{i+1}, et soient E_1, E_2 les points de rencontre de la droite $U_{i+1}U_{i+2}$ avec l'hyperquadrique Q, E'_1, E'_2 les points de rencontre de la droite $V_{i+1}V_{i+2}$ avec cette hyperquadrique. Chacun des points E_1, E_2 étant conjugué par rapport à Q avec chacun des points E'_1, E'_2, les droites $E_1E'_1$, $E_1E'_2$, $E_2E'_1$ et $E_2E'_2$ appartiennent à Q. Chacune de ces droites représente le faisceau des tangentes aux quadriques $\Phi_i\Phi_{i+1}$ en un de leurs points communs. Il en résulte que les quadriques Φ_i, Φ_{i+1} se touchent en quatre points (*). Ces quatre points ne sont d'ailleurs pas nécessairement distincts. Si l'une des droites $U_{i+1}U_{i+2}$, $V_{i+1}V_{i+2}$ touche l'hyperquadrique Q, il n'y a que deux points de contact entre Φ_i, Φ_{i+1}; si ces deux droites touchent l'hyperquadrique Q, il n'y a qu'un point de contact entre Φ_i et Φ_{i+1}.

Liége, le 27 octobre 1927.

(*) Nous démontrerons, dans la seconde note, que ces quatre points appartiennent à l'enveloppe des quadriques Φ_i et des quadriques Φ_{i+1}.

Marcel Hayez, imprimeur, rue de Louvain, 112, Bruxelles.