ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE
Extrait des *Bulletins de la Classe des Sciences*, 5e série, t. XVI, no 7.
Séance du 5 juillet 1930, pp. 907-922.

GÉOMÉTRIE. — Sur une variété algébrique représentant les couples de points inverses de l'espace et sur les surfaces du quatrième ordre ayant quatre points doubles uniplanaires,

par L. GODEAUX,
Professeur à l'Université de Liége, Correspondant de l'Académie royale.

Les couples de points inverses du plan forment une involution dont on peut prendre comme image une surface cubique ayant quatre points doubles coniques [1]. Considérons les couples de points inverses de l'espace, en appelant inversion la transformation birationnelle involutive qui fait correspondre aux plans de l'espace des surfaces cubiques passant par les arêtes d'un tétraèdre. On peut construire une variété algébrique image de l'involution formée par ces couples de points inverses comme on a construit la surface cubique dans le cas du plan. On trouve ainsi une variété V_3^{16}, à trois dimensions, d'ordre seize, possédant huit points quadruples coniques et trois points doubles coniques. Nous étudions cette variété dans ce travail. Les sections hyperplanes de la variété V_3^{16} sont des surfaces de genres zéro et de bigenre un. Il existe de plus sur la variété un système linéaire de surfaces de genres un. Chemin faisant, nous obtenons quelques résultats sur les surfaces du quatrième ordre possédant quatre points doubles uniplanaires ordinaires.

Alors que l'inversion plane est une transformation quadra-

(1) Voir notre note Sur l'Inversion et sur une Surface cubique à quatre points doubles. (*Mathesis*, 1922, pp. 19-23.)

tique générale, l'inversion de l'espace est un cas particulier de la transformation involutive obtenue en considérant comme points homologues deux points conjugués par rapport à trois quadriques n'appartenant pas à un même faisceau. L'involution formée par ces couples de points a pour image une variété W_3^{10}, à trois dimensions et d'ordre dix, dont nous étudions les relations avec la variété V_3^{16}.

1. Les surfaces du quatrième ordre ayant les sommets d'un tétraèdre pour points doubles ont en nombre ∞^{18}. Celles de ces surfaces qui sont transformées en elles-mêmes par une inversion ayant ce tétraèdre pour tétraèdre fondamental forment deux systèmes linéaires de dimensions respectives neuf et huit. Prenons en effet le tétraèdre considéré comme figure de référence et l'un des points unis de l'inversion comme point unitaire; l'inversion est représentée par les équations

$$x_1x'_1 = x_2x'_2 = x_3x'_3 = x_4x'_4. \tag{1}$$

Les surfaces du quatrième ordre

$$\left.\begin{aligned} &\lambda x_1x_2x_3x_4 + \lambda_1(x_1^2x_2^2 + x_3^2x_4^2) + \lambda_2(x_1^2x_3^2 + x_2^2x_4^2) \\ &+ \lambda_3(x_1^2x_4^2 + x_2^2x_3^2) + \lambda_{12}x_3x_4(x_1^2 + x_2^2) + \lambda_{13}x_2x_4(x_1^2 + x_3^2) \\ &+ \cdots + \lambda_{34}x_1x_2(x_3^2 + x_4^2) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} &\mu_1(x_1^2x_2^2 - x_3^2x_4^2) + \mu_2(x_1^2x_3^2 - x_2^2x_4^2) + \mu_3(x_1^2x_4^2 - x_2^2x_3^2) \\ &+ \mu_{12}x_3x_4(x_1^2 - x_2^2) + \mu_{13}x_2x_4(x_1^2 - x_3^2) + \cdots + \mu_{34}x_1x_2(x_3^2 - x_4^2) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

sont transformées en elles-mêmes par l'inversion (1). Les surfaces (2) forment un système linéaire ∞^9, de degré 32, que nous désignerons par $|F|$; les surfaces (3) forment un système linéaire ∞^8, de degré 24, que nous désignerons par $|F'|$.

Les couples de points inverses forment une involution I_2, d'ordre deux, au moyen de laquelle les systèmes $|F|$, $|F'|$ sont composés. Pour obtenir une variété image de l'involution I_2, rapportons projectivement les surfaces F aux hyperplans d'un espace linéaire S_9 à neuf dimensions, en posant

$$\left.\begin{array}{c} \rho X = x_1 x_2 x_3 x_4, \\ \rho X_1 = x_1^2 x_2^2 + x_3^2 x_4^2, \quad \rho X_2 = x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_4^2 \quad \rho X_3 = x_1^2 x_4^2 + x_2^2 x_3^2, \\ \rho X_{12} = x_3 x_4 (x_1^2 + x_2^2), \ldots, \rho X_{34} = x_1 x_2 (x_3^2 + x_4^2). \end{array}\right\} \quad (4)$$

On obtient ainsi une variété algébrique V_3^{16}, à trois dimensions, d'ordre seize, dont les équations résulteront de l'élimination de ρ, x_1, x_2, x_3, x_4 entre les équations (4). La variété V_3^{16} appartient aux hypersurfaces

$$\left.\begin{array}{l} X(X_{23}^2 + X_{24}^2 + X_{34}^2) - X_{23}X_{24}X_{34} - 4X^3 = 0, \\ X(X_{34}^2 + X_{13}^2 + X_{14}^2) - X_{13}X_{14}X_{34} - 4X^3 = 0, \\ X(X_{12}^2 + X_{14}^2 + X_{24}^2) - X_{12}X_{14}X_{24} - 4X^3 = 0, \\ X(X_{12}^2 + X_{13}^2 + X_{23}^2) - X_{12}X_{13}X_{23} - 4X^3 = 0, \end{array}\right\} \quad (5)$$

$$\left.\begin{array}{l} X_{12}^2 + X_{34}^2 = X_2 X_3 + 4X^2, \\ X_{13}^2 + X_{24}^2 = X_3 X_1 + 4X^2, \\ X_{14}^2 + X_{23}^2 = X_1 X_2 + 4X^2, \end{array}\right\} \quad (6)$$

$$X_{12}X_{34} = X(X_2 + X_3), \quad X_{13}X_{24} = X(X_3 + X_1), \quad X_{14}X_{23} = X(X_1 + X_2), \quad (7)$$

$$\left.\begin{array}{l} X_{12}X_{13} + X_{24}X_{34} - X_3X_{14} - XX_{23} = 0, \\ X_{12}X_{14} + X_{23}X_{34} - X_2X_{13} - XX_{24} = 0, \\ X_{13}X_{14} + X_{23}X_{24} - X_1X_{12} - XX_{34} = 0, \\ X_{12}X_{23} + X_{14}X_{34} - X_2X_{24} - XX_{13} = 0, \\ X_{12}X_{24} + X_{13}X_{34} - X_3X_{23} - XX_{14} = 0, \\ X_{13}X_{23} + X_{14}X_{24} - X_1X_{34} - XX_{12} = 0. \end{array}\right\} \quad (8)$$

2. L'inversion (1) possède huit points unis, à savoir

$A_1(-1, 1, 1, 1)$, $A_2(1, -1, 1, 1)$, $A_3(1, 1, -1, 1)$, $A_4(1, 1, 1, -1)$;
$B(1, 1, 1, 1)$, $B_{12}(-1, -1, 1, 1)$, $B_{13}(-1, 1, -1, 1)$, $B_{14}(-1, 1, 1, -1)$.

Ces points n'appartiennent pas en général aux surfaces F et par suite l'inversion détermine sur une de celles-ci une involution privée de points unis; cette involution est donc de genres zéro et de bigenre un ($p_x = p_y = 0$, $P_6 = 1$) [1]. Il en résulte que les sections hyperplanes de la variété V_3^{16} sont des surfaces de genres zéro et de bigenre un. Nous désignerons ces surfaces par Φ.

Deux surfaces F ont en commun une courbe du sixième ordre ayant quatre points quadruples, aux sommets du tétraèdre de référence; cette courbe est donc de genre 17 et les sections hyperplanes des surfaces Φ, c'est-à-dire celles de la variété V_3^{16}, sont donc de genre 9. Les surfaces Φ et la variété V_3^{16} sont donc normales.

On sait, d'autre part, que la variété V_3^{16} est rationnelle.

3. Aux points infiniment voisins d'un sommet du tétraèdre de référence, l'inversion (1) fait correspondre les points de la face opposée. Envisageons, pour fixer les idées, le point O_1 (1, 0, 0, 0) et la face opposée ϖ_1 ($x_1 = 0$). Aux couples de I_2 formés d'un point infiniment voisin de O_1 et du point homologue de ϖ_1, correspondent sur V_3^{16} les points d'une surface Ω_1. Il y a une correspondance birationnelle entre les points de ϖ_1 et ceux de Ω_1. Or, les surfaces F découpent sur ϖ_1 le système des quartiques ayant trois points doubles en O_2 (0, 1, 0, 0), O_3 (0, 0, 1, 0), O_4 (0, 0, 0, 1). Ce système de courbes est birationnellement équivalent au système des coniques d'un plan. Par suite, Ω_1 est une surface de Véronèse (du quatrième ordre).

D'ailleurs, si dans les équations (4) on introduit l'hypothèse $x_1 = 0$, on a

$$X = X_{23} = X_{24} = X_{34} = 0$$

et les équations (5), (6), (7), (8) donnent

$$X_{12}^2 = X_2 X_3, \qquad X_{13}^2 = X_3 X_4, \qquad X_{14}^2 = X_4 X_2,$$
$$X_{12} X_{13} = X_3 X_{14}, \qquad X_{12} X_{14} = X_2 X_{13}, \qquad X_{13} X_{14} = X_4 X_{12},$$

qui sont bien les équations d'une surface de Véronèse.

(1) Voir, par exemple, nos Recherches sur les Surfaces algébriques de genres zéro et de bigenre un. (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1926, pp. 726-751, 892-905; 1927, pp. 114-133.)

Aux couples de I_2, formés d'un point infiniment voisin de O_2, O_3 ou O_4 et d'un point de la face opposée du tétraèdre de référence, correspondent respectivement les points de trois surfaces de Véronèse Ω_2, Ω_3, Ω_4.

Les quatre surfaces Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_4 forment la section de la variété V_3^{16} par l'hyperplan $X = 0$.

4. Aux points d'une arête du tétraèdre de référence, l'inversion (1) fait correspondre les points de l'arête opposée; les points de ces deux arêtes forment ∞^2 couples de l'involution I_2. Envisageons les arêtes O_1O_2 et O_3O_4. Les surfaces F contenant ces deux arêtes sont données par $\lambda_1 = 0$ et forment un système linéaire ∞^8 que nous désignerons par $|F_1|$.

Aux surfaces F_1 correspondent dans S_9 les hyperplans passant par le point O_1', dont toutes les coordonnées sont nulles, sauf X_1. Le point O_1' est donc fondamental pour la correspondance birationnelle entre V_3^{16} et les couples de I_2; il lui correspond tous les couples de cette involution formés d'un point de O_1O_2 et d'un point de O_3O_4.

Deux surfaces F_1 ont en commun, outre les droites O_1O_2, O_3O_4, une courbe du quatorzième ordre ayant des points triples en O_1, O_2, O_3, O_4 et s'appuyant sur O_1O_2, O_3O_4 en deux points en dehors des sommets du tétraèdre. Par suite, le système $|F_1|$ a le degré 28 et le point O_1' est double pour la variété V_3^{16}.

Pour déterminer la nature du cône tangent à V_3^{16} en O_1', projetons cette variété de ce point sur un hyperplan de S_9 ne passant pas par O_1'. Cela revient à rapporter projectivement les surfaces F_1 aux espaces S_7 de cet hyperplan. Aux couples de I_2 formés d'un point de O_1O_2 et d'un point de O_3O_4 correspondent, sur la variété obtenue, les points d'une quadrique irréductible, section par l'hyperplan considéré du cône tangent à V_3^{16} en O_1'. Donc O_1' est un point double conique de V_3^{16}.

Aux couples d'arêtes O_1O_3 et O_2O_4, O_1O_4 et O_2O_3 correspondent de même des points doubles coniques $O'_2(0, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, $O'_3(0, 0, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ de V_3^{16}.

Le plan $O'_1 O'_2 O'_3$ ne coupe V_3^{16} qu'en ces trois points. Ce plan a en effet pour équations

$$X = X_{12} = X_{13} = \cdots = X_{34} = 0$$

et si l'on introduit ces hypothèses dans les équations (5), (6), (7) et (8), on a

$$X_2 X_3 = X_3 X_1 = X_1 X_2 = 0.$$

Les points O'_1, O'_2, O'_3 appartiennent aux surfaces Ω_1, Ω_2, Ω_3.

5. Aux points unis A_1, A_2, A_3, A_4, B, B_{12}, B_{13}, B_{14} de l'involution I_2 correspondent sur la variété V_3^{16} huit points de diramation que nous désignerons respectivement par A'_1, A'_2, ..., B'_{14}, et que nous allons étudier. Les huit points unis de I_2 possèdent d'ailleurs les mêmes propriétés chacun et il suffira d'étudier l'un d'eux.

Observons tout d'abord qu'un point uni de I_2 est parfait, c'est-à-dire que tout point infiniment voisin de ce point uni est lui-même uni. En effet, considérons par exemple le point B et un plan quelconque

$$a_1(x_1 - x_4) + a_2(x_2 - x_4) + a_3(x_3 - x_4) = 0$$

passant par ce point. L'inversion fait correspondre à ce plan la surface

$$a_1 x_2 x_3 (x_1 - x_4) + a_2 x_1 x_3 (x_2 - x_4) + a_3 x_1 x_2 (x_3 - x_4) = 0,$$

passant par B et y touchant le plan considéré.

Il est facile de voir que les surfaces F passant par B acquièrent en ce point un point double conique à cône tangent variable. Ces surfaces F forment donc un système linéaire de dimension huit et de degré 24. Par suite, le point B' est quadruple pour la variété V_3^{16}. Les points de diramation sont donc quadruples pour la variété V_3^{16} et en chacun de ces points le cône tangent est irréductible, puisqu'il correspond droite par point au domaine du premier ordre du point uni homologue de I_2.

On sait que les droites joignant un des points A_1, A_2, A, A_4 à un des points B, B_{12}, B_{13}, B_{14} passent par un des points O_1, O_2, O_3, O_4. Chacune de ces droites est unie pour l'inversion (1) et les surfaces F la rencontrent en deux points variables. Par suite, il lui correspond une droite de V_3^{16}. On voit donc que les droites joignant un des points A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 à un des points B', B'_{12}, B'_{13}, B'_{14} appartiennent à V_3^{16}. Chacune de ces droites rencontre d'ailleurs une de ces surfaces Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_4 en un point.

Les arêtes du tétraèdre $A_1 A_2 A_3 A_4$ s'appuient chacune sur deux arêtes opposées du tétraèdre $O_1 O_2 O_3 O_4$; elles sont unies pour l'inversion (1) et rencontrées en quatre points variables par les surfaces F. A chacune de ces droites correspond sur la variété V_3^{16} une conique passant par deux des points A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 et par un des points O'_1, O'_2, O'_3.

De même, aux arêtes du tétraèdre $B B_{12} B_{13} B_{14}$ correspondent sur V_3^{16} des coniques passant chacune par deux des points B', B'_{12}, B'_{13}, B'_{14} et par un des points O'_1, O'_2, O'_3.

6. Les quadriques passant par O_1, O_2, O_3, O_4, transformées en elles-mêmes par l'inversion (1), forment deux réseaux : $|Q_1|$, d'équation

$$\lambda_1 (x_1 x_2 + x_3 x_4) + \lambda_2 (x_1 x_3 + x_2 x_4) + \lambda_3 (x_1 x_4 + x_2 x_3) = 0,$$

et $|Q_2|$, d'équation

$$\lambda'_1 (x_1 x_2 - x_3 x_4) + \lambda'_2 (x_1 x_3 - x_2 x_4) + \lambda'_3 (x_1 x_4 - x_2 x_3) = 0.$$

Les quadriques Q_1 passent par les points A_1, A_2, A_3, A_4 et il leur correspond sur V_3^{16} des surfaces Q'_1 d'ordre huit passant par A'_1, A'_2, A'_3, A'_4; ces surfaces forment un réseau. Aux biqua dratiques γ_1 passant par O_1, O_2, O_3, O_4, A_1, A_2, A_3, A_4 correspondent, sur $V_3^{16}{}_4$ des biquadratiques γ'_1 formant une congruence linéaire G_1. Le réseau $|Q'_1|$ est composé au moyen de G_1. Les courbes γ'_1 passent par A'_1, A'_2, A'_3, A'_4.

De même, aux quadriques Q_2, qui passent par B, B_{12}, B_{13}, B_{14}, correspondent sur V_3^{16} des surfaces d'ordre 8, Q'_2, formant un réseau. Aux biquadratiques γ_2, passant par O_1, O_2, O_3, O_4, B, B_{12}, B_{13}, B_{14}, correspondent des biquadratiques γ'_2 passant par B', B'_{12}, B'_{13}, B'_{14} et formant une congruence linéaire G_2. Le réseau $|Q'_2|$ est composé au moyen de G_2.

On a la relation fonctionnelle

$$|F| = |2Q_1| = |2Q_2|$$

et, par suite, sur la variété V_3^{16},

$$|\Phi| = |2Q'_1| = |2Q'_2|.$$

Il en résulte que les surfaces Q'_1, Q'_2 appartiennent à des espaces S_6.

Aux surfaces Φ découpées sur V_3^{16} par les hyperplans passant par A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 correspondent des surfaces F passant par A_1, A_2, A_3, A_4 et par suite composées au moyen de la congruence formée par les courbes γ_1. Donc les hyperplans passant par les points A' découpent sur V_3^{16} un système linéaire ∞^5 de surfaces Φ composé au moyen de la congruence G_1. De même, les hyperplans passant par les points B' découpent sur V_3^{16} un système linéaire, de dimension cinq, de surfaces Φ, composé au moyen de la congruence G_2.

Il existe ∞^1 surfaces F, formant un faisceau, passant par les points A et B; ce sont les surfaces desmiques. Il leur correspond sur V_3^{16} des surfaces Φ contenant chacune ∞^1 courbes γ'_1 et ∞^1 courbes γ'_2.

Envisageons maintenant les hyperplans passant par quatre points de diramation qui ne soient pas tous des points A' ou tous des points B'. Prenons, pour fixer les idées, les points A'_2, A'_3, A'_4 et B'. Ces hyperplans contiennent les trois droites $B'A'_2$, $B'A'_3$, $B'A'_4$, qui appartiennent donc à toutes les surfaces Φ

qu'ils découpent sur V_3^{16}. Ces surfaces Φ forment un système linéaire ∞^5 de degré six.

7. Les surfaces F' passent simplement par les huit points unis de I_2. Sur une surface F', les couples de cette involution engendrent donc une involution de genres un ($p_a = P_4 = 1$). Désignons par Φ' les surfaces qui correspondent sur V_3^{16} aux surfaces F'. Ces surfaces sont donc de genres un; elles forment un système linéaire $|\Phi'|$ de dimension huit et de degré douze. Deux surfaces F' ont en commun une courbe de genre 17; donc les courbes communes aux surfaces Φ' ont le genre sept.

Soit $\overline{F}$ une surface du quatrième ordre n'appartenant à aucun des systèmes $|F|$, $|F'|$, mais ayant des points doubles en O_1, O_2, O_3, O_4. Il lui correspond sur V_3^{16} une surface Φ et à celle-ci correspondent deux surfaces du quatrième ordre dont l'une est $\overline{F}$. Lorsque $\overline{F}$ varie d'une manière continue et vient coïncider avec une surface de $|F|$, $\overline{\Phi}$ varie d'une manière continue et vient coïncider avec une surface Φ comptée deux fois. On a donc

$$\overline{\Phi} \equiv 2\Phi.$$

Représentons par a_1, a_2, a_3, a_4, b, b_{12}, b_{13}, b_{14} les surfaces équivalentes aux points quadruples A_1, A_2, ..., B_{14} de V_3^{16}, au point de vue des transformations birationnelles. Lorsque $\overline{F}$ varie d'une manière continue et vient coïncider avec une surface de $|F'|$, $\overline{\Phi}$ vient coïncider avec une surface Φ', comptée deux fois, augmentée des composantes provenant des points quadruples de V_3^{16}. On a donc

$$2\Phi \equiv 2\Phi' + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + b + b_{12} + b_{13} + b_{14}. \qquad (9)$$

Les hyperquadriques de S_9 découpent sur V_3^{16} des surfaces du système $|2\Phi|$. Ces hyperquadriques sont en nombre ∞^{54}, mais les douze hyperquadriques (6), (7), (8) déterminent un système linéaire ∞^{11} d'hyperquadriques contenant V_3^{16}. D'autre part, il n'existe aucune autre hyperquadrique contenant V_3^{16};

donc les hyperquadriques de S_9 découpent sur V_3^{16} ∞^{42} surfaces 2Φ formant un système linéaire.

Aux surfaces 2Φ correspondent des surfaces du huitième ordre passant quatre fois par O_1, O_2, O_3, O_4, formant un système linéaire composé au moyen de I_2. Parmi ces surfaces se trouvent les surfaces $2F$ et $2F'$. Les surfaces du huitième ordre passant quatre fois par O_1, O_2, O_3, O_4 découpent, sur une surface F', le double du système découpé par les surfaces F; celui-ci étant de genre 17, le double est de genre 65 et par suite de dimension 65. Dans ce système, il y a un système de dimension 33 composé au moyen de I_2 et dont les courbes ne passent pas par les points unis de cette involution. Les surfaces du huitième ordre découpant ce système forment un système linéaire composé au moyen de I_2; ces surfaces correspondent précisément aux surfaces 2Φ de V_3^{16}. Dans le système envisagé se trouvent les surfaces formées de la surface F' considérée et des ∞^8 surfaces F'. Par suite ce système a la dimension 42. On en conclut que le système $|2\Phi|$ complet est découpé sur V_3^{16} par les hyperquadriques de S_9. Par suite, en vertu de l'égalité fonctionnelle (9), il existe une hyperquadrique touchant V_3^{16} le long de chaque surface Φ'.

8. Les surfaces F passant par un point uni de I_2 ont en ce point un point double à cône tangent variable. Aux points infiniment voisins de ce point uni correspondent les points de V_3^{16} infiniment voisins du point de diramation correspondant. Par suite le cône tangent à V_3^{16} en un point de diramation est un cône projetant de ce point une surface de Véronèse. Nous dirons pour abréger que c'est un cône de Véronèse.

Les surfaces F' ont en général un point simple en un point uni de I_2. Par suite, aux points d'une surface F' infiniment voisins de ce point uni correspondent les points de V_3^{16}, infiniment voisins du point de diramation correspondant et situés sur un cône ∞^2 du second ordre du cône de Véronèse. Les surfaces Φ' ont donc des points doubles coniques aux huit points de diramation de V_3^{16}.

9. Considérons une surface F_1 de $|F|$ et soit Φ_1 la surface Φ homologue. Sur F_1, $|F|$ et $|F'|$ découpent deux systèmes linéaires partiels ∞^8, composés au moyen de I_2 et compris dans un même système linéaire. La surface Φ_1 étant de genres zéro et de bigenre un, à ces systèmes correspondent sur Φ_1 des systèmes linéaires de genre neuf, ∞^8, non équivalents mais dont les doubles sont équivalents. L'un de ces systèmes est celui des sections hyperplanes de Φ_1 ; l'autre est découpé sur Φ_1 par les surfaces Φ'. On sait que chacun de ces systèmes est l'adjoint de l'autre.

Le système $|\Phi'|$ découpe, sur les surfaces Φ, l'adjoint du système des sections hyperplanes.

10. En résumé :

On peut prendre comme variété des couples de points inverses de l'espace une variété V_3^{16}, *d'ordre seize, de* S_9. *Cette variété possède trois points doubles coniques et une section hyperplane formée de quatre surfaces de Véronèse.*

Les huit points de diramation sont quadruples pour la variété. Le cône tangent en un de ces points est un cône projetant une surface de Véronèse.

La variété contient seize droites passant chacune par deux points de diramation et douze coniques passant chacune par deux points de diramation et par un des trois points doubles. Il existe sur la variété deux congruences linéaires de quartiques elliptiques passant, celles d'une congruence par quatre points de diramation, celles de l'autre par les quatre autres points de diramation.

Les sections hyperplanes de V_3^{16} *sont en général des surfaces de genres zéro et de bigenre un* ($p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$). *Il existe un système linéaire* ∞^8 *de surfaces de genres un* ($p_a = P_4 = 1$), *le long de chacune desquelles une hyperquadrique touche la variété. Ces surfaces possèdent des points doubles coniques aux points de diramation; elles découpent, sur les sections hyperplanes, le système adjoint du système découpé par les hyperplans.*

11. Un hyperplan de S_9 coupe les surfaces Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_4 suivant des quartiques rationnelles qui appartiennent à la surface Φ découpée par cet hyperplan sur V_3^{16}. Si la surface F correspondante a des points doubles coniques en O_1, O_2, O_3, O_4, ces quartiques sont irréductibles. Mais si O_1, par exemple, est double biplanaire pour F, la quartique située sur Ω_1 dégénère en deux coniques. Si O_1 est double uniplanaire pour F, la quartique dégénère en deux coniques superposées; l'hyperplan de Φ touche Ω_1 le long d'une conique.

Une surface de quatrième ordre ayant des points doubles uniplanaires en O_1, O_2, O_3, O_4 a une équation de la forme [1]

$$\varphi^2 + \lambda x_1 x_2 x_3 x_4 = 0, \tag{10}$$

où

$$\varphi = a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \cdots + a_{34}x_3x_4.$$

Si cette surface est une surface F, on a

$$a_{12} = a_{34}, \qquad a_{13} = a_{24}, \qquad a_{14} = a_{23} \tag{11}$$

ou

$$a_{12} + a_{34} = 0, \qquad a_{13} + a_{24} = 0, \qquad a_{14} + a_{23} = 0. \tag{12}$$

Dans le premier cas, la surface Φ correspondante sur V_3^{16} est découpée par l'hyperplan

$$\left.\begin{aligned} &2(a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{14}^2)X + a_{12}^2X_1 + a_{13}^2X_2 + a_{14}^2X_3 + 2a_{12}a_{13}(X_{23} + X_{14}) \\ &\quad + 2a_{13}a_{14}(X_{34} + X_{12}) + 2a_{12}a_{14}(X_{24} + X_{13}) + \lambda X = 0; \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

---

(1) Voir notre note Sur les Surfaces du quatrième ordre possédant quatre points doubles uniplanaires ordinaires. (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1924, pp. 418-528.)

dans le second, par l'hyperplan

$$\left.\begin{array}{l} -2(a_{12}^2+a_{13}^2+a_{14}^2)X+a_{12}^2X_1+a_{13}^2X_2+a_{14}^2X_3+2a_{12}a_{13}(X_{23}-X_{14}) \\ \quad +2a_{13}a_{14}(X_{34}-X_{12})+2a_{12}a_{14}(X_{24}-X_{13})+\lambda X=0. \end{array}\right\} \quad (14)$$

Observons que si, dans l'équation (10), on suppose $\lambda=0$ et les relations (11) vérifiées, on obtient une quadrique Q_1 comptée deux fois. L'hyperplan (13) touche V_3^{16} suivant la surface Q_1' correspondante. Donc, si l'on prend un hyperplan touchant V_3^{16} suivant une surface Q_1' et l'hyperplan $X=0$ coupant V_3^{16} suivant les quatre surfaces de Véronèse Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_4, ces hyperplans déterminent un faisceau dont les éléments coupent V_3^{16} suivant des surfaces Φ correspondant à des surfaces F ayant quatre points doubles uniplanaires.

De même, un hyperplan touchant V_3^{16} suivant une surface Q_2' et l'hyperplan $X=0$ déterminent un faisceau dont les hyperplans jouissent de la même propriété. Les surfaces F correspondantes sont ici celles qui sont données par les relations (12).

12. A la surface (10), la transformation (1) fait correspondre la surface

$$\psi^2+\lambda x_1x_2x_3x_4=0,$$

où

$$\psi\equiv a_{12}x_3x_4+a_{13}x_2x_4+\cdots+a_{34}x_1x_2.$$

A l'ensemble de ces deux surfaces correspond sur V_3^{16} une surface découpée par une hyperquadrique dont l'équation est

$$\begin{array}{l} [(a_{12}^2+\cdots+a_{34}^2)X+(a_{12}a_{13}+a_{24}a_{34})X_{14}+\cdots+(a_{13}a_{23}+a_{14}a_{24})X_{34} \\ \qquad +a_{12}a_{34}X_1+a_{13}a_{24}X_2+a_{14}a_{23}X_3]^2 \\ +\lambda X[4(a_{12}a_{34}+a_{13}a_{24}+a_{14}a_{23})X+(a_{12}^2+a_{34}^2)X_1+(a_{13}^2+a_{24}^2)X_2 \\ +(a_{14}^2+a_{23}^2)X_3+2(a_{13}a_{23}+a_{14}a_{24})X_{12}+\cdots+2(a_{13}a_{14}+a_{23}a_{24})X_{34}] \\ +\lambda^2X^2=0. \end{array}$$

Cette hyperquadrique coupe chacune des surfaces Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_4 suivant deux coniques.

Dans le travail qui vient d'être cité, nous nous étions occupé des surfaces du quatrième ordre ayant un point double en dehors des quatre points doubles uniplanaires O_1, O_2, O_3, O_4. Le résultat énoncé dans notre travail doit être rectifié. On voit en effet aisément que la surface

$$\left[a_{12}\frac{z_3z_4x_1x_2+z_1z_2x_3x_4}{z_3z_4}+a_{13}\frac{z_2z_4x_1x_3+z_1z_3x_2x_4}{z_2z_4}+a_{14}\frac{z_2z_3x_1x_4+z_1z_4x_2x_3}{z_2z_3}\right]^2 z_2z_3z_4$$
$$-4z_1(a_{12}z_2+a_{13}z_3+a_{14}z_4)^2 x_1x_2x_3x_4=0$$

possède un point double conique au point z_1, z_2, z_3, z_4, choisi arbitrairement (en dehors des plans de coordonnées).

13. Projetons la variété V_3^{16} des points O'_1, O'_2, O'_3 sur l'espace linéaire S_6 d'équations

$$X_1=X_2=X_3=0.$$

Nous obtenons une variété V_3^{10}, d'ordre dix, possédant huit points quadruples coniques et contenant les droites joignant ces points deux à deux.

L'hyperplan $X=0$, dans S_6, coupe la variété V_3^{10} suivant une surface formée de quatre plans projections des surfaces de Véronèse Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_4 et de trois quadriques, projections des domaines des points O'_1, O'_2, O'_3 sur V_3^{16}.

La variété V_3^{10} rencontrée ici est un cas particulier d'une autre variété du même ordre. On sait, en effet, que l'inversion (1) est un cas particulier de la transformation birationnelle involutive dans laquelle sont homologues les points conjugués par rapport à trois quadriques n'appartenant pas à un même faisceau.

Soient R_1, R_2, R_3 trois quadriques ayant en commun huit points distincts M_1, M_2, ..., M_8; T la transformation qui fait correspondre à un point son conjugué par rapport à ces trois quadriques. On sait que T possède comme seuls points unis les points M_1, M_2, ..., M_8. Le lieu des points dont les homologues sont indéterminés est une courbe C_6 d'ordre six et de genre trois; cette courbe est le lieu des sommets des cônes appartenant au réseau déterminé par les quadriques R_1, R_2, R_3. Les points homologues d'un point de C_6 appartiennent à une trisécante de cette courbe.

Les surfaces du quatrième ordre passant par C_6 sont en nombre ∞^{12}. Parmi ces surfaces, celles qui sont transformées en elles-mêmes par T forment deux systèmes linéaires : l'un, $|F_0|$, est ∞^6 et ne possède pas de points-base en dehors de C_6; l'autre, $|F'_0|$, est ∞^5 et a comme base C_6 et les points $M_1, M_2, \ldots, M_8$.

Le système $|F_0|$ a le degré 20. En rapportant projectivement les surfaces F_0 aux hyperplans d'un espace S_6 à six dimensions, on obtient une variété W_3^{10}, rationnelle, représentant les couples de points homologues dans T. Il est aisé de voir que les points de W_3^{10} qui correspondent à $M_1, M_2, \ldots, M_6$ sont des points quadruples coniques de W_3^{10}; nous les désignerons par $M'_1, M'_2, \ldots, M'_6$.

Considérons la droite $M_1 M_2$ et désignons par $|R|$ le réseau déterminé par les quadriques R_1, R_2, R_3. Il y a ∞^1 quadriques de $|R|$ contenant M_1M_2; ces quadriques ont, en outre, en commun une cubique gauche passant par $M_3, M_5, \ldots, M_8$ et s'appuyant en deux points sur la droite M_1M_2. Ces deux points appartiennent à la courbe C_6. La droite M_1M_2 est transformée en elle-même par T. Une surface F_0 coupe cette droite en ses points d'appui sur C_6 et en deux points homologues dans T. Par suite, il correspond à cette droite sur W_3^{10} une droite passant par M'_1, M'_2.

On voit donc que les droites joignant les points M'_1, $M'_2, \ldots, M'_8$ deux à deux appartiennent à W_3^{10}.

Soit P un point de la courbe C_6. Les points que T fait correspondre à P appartiennent à une trisécante p de C_6. Aux couples formés de P et d'un point de p correspondent sur W_3^{10} les points d'une droite p'. Le lieu de cette droite p' est une surface Ω. Pour avoir l'ordre de cette surface, observons que deux surfaces F_0 ont en commun une courbe d'ordre dix s'appuyant en vingt points sur C_6. Par suite, Ω est d'ordre vingt. Elle est rencontrée par un hyperplan suivant une courbe de genre trois.

On voit, comme dans le cas de V_3^{16}, que les sections hyperplanes de W_3^{10} sont des surfaces de genres zéro et de bigenre un [1]. Aux surfaces F'_0 correspondent sur W_3^{10} des surfaces de genres un découpant, sur une section hyperplane de cette variété, l'adjoint du système des sections hyperplanes.

La variété V_3^{10} est un cas particulier de W_3^{10}, car V_3^{10} s'obtient en rapportant projectivement aux hyperplans de S_6 les surfaces F passant par les arêtes du tétraèdre de référence. La courbe C_6 est formée de ces six arêtes.

Liége, le 24 juin 1930.

[1] Voir nos recherches citées plus haut, 3e note.

M. HAYEZ, imprimeur de l'Académie royale de Belgique, rue de Louvain, 112, Bruxelles.