Sur les homographies planes cycliques.

Nos recherches sur les involutions cycliques n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique, nous ont conduit à classer les points unis en deux catégories suivant que la transformation birationnelle de la surface en elle-même, génératrice de l'involution, agit ou non comme l'identité dans le voisinage d'un tel point (*). La singularité d'un point de diramation d'une surface image de l'involution dépend de la nature du point uni correspondant.

Considérons une involution cyclique I_p, d'ordre premier p, appartenant à une surface algébrique et soit T la transformation birationnelle de F en elle-même génératrice de I_p. Nous disons qu'un point uni de I_p est un point de coïncidence parfaite si à une courbe tracée sur F et passant par ce point, T fait correspondre une courbe

(*) Mémoire sur les surfaces algébriques doubles ayant un nombre fini de points de diramation. (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1914, pp. 289-312.) — Sur les involutions douées d'un nombre fini de points unis appartenant à une surface algébrique. (*Rend. R. Acad. Lincei*, 1er sem., 1914, pp. 408-413.) — Recherches sur les involutions douées d'un nombre fini de points de coïncidence appartenant à une surface algébrique. (*Bull. de la Soc Math. de France*, 1919, pp. 1-16.) — Recherches sur les involutions cubiques appartenant à une surface algébrique. (*Bull. de l'Acad. royale de Belgique*, 1921, pp. 105-125.) — Sur les correspondances ponctuelles entre surfaces. (*Idem*, 1929, pp. 408-520.) — Sur les points unis des involutions cycliques d'ordre trois appartenant à une surface algébrique. (*Idem*, 1929, pp. 553-560.) — Voir aussi nos recherches sur les involutions appartenant aux surfaces de genre un, etc., parues depuis 1912.

touchant la première en ce point, quelle que soit cette première courbe. Nous disons qu'un point uni de I_p est un point de coïncidence non parfaite dans le cas opposé. Si Φ est une surface normale image de l'involution I_p, à un point de coïncidence parfaite correspond un point de diramation qui est un point multiple d'ordre p pour Φ, à cône tangent rationnel et irréductible. Si O est un point de coïncidence non parfaite de I_p, il lui correspond un point de diramation O' qui est en général un point double biplanaire de Φ auquel sont infiniment voisins $\frac{1}{2}(p-1)$ points doubles biplanaires dont le dernier est ordinaire. Mais d'autres singularités peuvent se présenter, comme nous le montrerons dans cette note.

Imaginons que l'on transforme birationnellement F en une surface F' de manière que O soit un point fondamental de la transformation. A ce point O correspond donc une courbe exceptionnelle l de F'. Soient I'_p l'involution d'ordre p et T' la transformation birationnelle de F' en elle-même qui correspondent à I_p, T. La courbe l est transformée en elle-même par T' et il existe deux points de la courbe unis pour T. L'involution I'_p possède ces deux points comme points unis et l'on peut classer ces deux points comme on a classé les points unis de I_p. Et ainsi de suite. Les deux points unis de I'_p situés sur l ont pour homologues, sur F, deux points unis de I_p infiniment voisins de O. On conçoit que l'on peut définir les points unis de I_p dans les domaines du second, du troisième, ... ordre de O, par des transformations birationnelles successives de F. C'est la connaissance de ces points qui permettra de fixer la singularité de la surface Φ au point de diramation correspondant à O.

Dans cette note, nous prenons comme surface F un plan et comme involution I_p l'involution engendrée par une homographie cyclique non homologique de période p. Nous obtenons quelques résultats généraux et nous traitons complètement deux cas particuliers. Ce travail doit être considéré comme un premier pas vers une étude complète des points unis d'une involution I_p, étude qui semble, d'ailleurs, devoir être très difficile. Nous nous sommes occupé voici quelques années du cas d'une involution plane cyclique d'ordre trois (*).

1. — Une homographie plane non homologique, cyclique, dont la période est un nombre premier p (supérieur à deux), peut toujours être représentée par les équations

$$\frac{x_1'}{x_1} = \frac{x_2'}{\varepsilon x_2} = \frac{x_3'}{\varepsilon^\alpha x_3}, \qquad (1).$$

où ε est une racine primitive d'ordre p de l'unité et où α est un entier supérieur à l'unité et inférieur à p.

L'homographie (1) possède trois points unis qui sont les sommets du triangle de référence. Considérons le point O_1 ($x_2 = x_3 = 0$). A la droite

$$\xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$$

passant par O_1, l'homographie (1) fait correspondre la droite

$$\varepsilon^{\alpha-1}\xi_2 x_2' + \xi_3 x_3' = 0.$$

Pour que ces deux droites soient confondues, il faut que l'un des nombres ξ_2, ξ_3 soit nul. L'homographie (1) détermine donc une homographie non identique dans le faisceau de droites de sommet O_1, les droites unies étant $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. En d'autres termes, O_1 est un point de

(*) Étude élémentaire sur l'homographie plane de période trois et sur une surface cubique. (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1916, pp. 49-61.)

coïncidence non parfaite de l'involution I_p d'ordre p engendrée par l'homographie (1). On vérifie qu'il en est de même des points unis $O_2(x_3 = x_1 = 0)$, $O_3(x_1 = x_2 = 0)$.

2. — Pour étudier de plus près la question, effectuons une transformation quadratique ayant pour point fondamental O_1 : par exemple, la transformation

$$\frac{y_1}{x_1 x_2} = \frac{y_2}{x_2^2 - x_3^2} = \frac{y_3}{x_1 x_3}, \tag{2}$$

dont les formules inverses sont

$$\frac{x_1}{y_1^2 - y_3^2} = \frac{x_2}{y_1 y_2} = \frac{x_3}{y_2 y_3}. \tag{3}$$

Aux points infiniment voisins du point O_1 correspondent les points de la droite $y_2 = 0$. En particulier, aux points infiniment voisins de O_1 situés sur les droites $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ correspondent respectivement les points $O'_3(y_1 = y_2 = 0)$, $O'_1(y_2 = y_3 = 0)$.

A l'homographie (1) correspond la transformation

$$\left.\begin{aligned} \rho y'_1 &= y_1 (y_1^2 - y_3^2), \\ \rho y'_2 &= \varepsilon y_2 (y_1^2 - \varepsilon^{2\alpha-2} y_3^2), \\ \rho y'_3 &= \varepsilon^{\alpha-1} y_3 (y_1^2 - y_3^2). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

C'est une transformation birationnelle de Jonquières du troisième ordre. Aux droites du plan correspondent des cubiques planes ayant un point double à tangentes fixes en $O'_2(y_1 = y_3 = 0)$ et passant par les points $(1, 0, 1)$, $(1, 0, -1)$.

La transformation (4) a la période p et possède comme points unis les sommets du triangle de référence.

A une droite

$$\eta_1 y_1 + \eta_2 y_2 = 0 \tag{5}$$

passant par O'_3 correspond la courbe

$$\eta_1 y'_1 (\varepsilon^{2\alpha-2} y'^2_1 - y'^2_3) + \eta_2 \varepsilon^{2\alpha-1} y'_2 (y'^2_1 - y'^2_3) = 0,$$

passant également par O'_3 et ayant pour tangente en ce point la droite

$$\eta_1 y'_1 + \varepsilon^{2\alpha-1} \eta_2 y'_2 = 0. \tag{6}$$

Pour que le point O'_3 soit un point de coïncidence parfaite, c'est-à-dire pour que les droites (5) et (6) soient confondues quelles que soient les quantités η_1, η_2, il faut et il suffit que l'on ait

$$2\alpha - 1 \equiv 0, \qquad (\text{mod.}\, p).$$

$2\alpha - 1$ étant inférieur à $2p$, on a $2\alpha - 1 = p$ et, en posant $p = a\alpha + h$ $(h < \alpha)$,

$$\alpha(2 - a) = h + 1.$$

On a donc $a = 1$, $\alpha = h + 1$, $p = 2h + 1$.

A une droite

$$\eta_2 y_2 + \eta_3 y_3 = 0$$

passant par O'_1 correspond une cubique passant par ce point et y ayant pour tangente la droite

$$\varepsilon^{\alpha-2} \eta_2 y'_2 + \eta_3 y'_3 = 0.$$

Pour que O'_1 soit un point de coïncidence parfaite, on doit donc avoir $\alpha = 2$.

Pour que les points O'_1, O'_3 soient tous deux des points de coïncidence parfaite, on doit avoir

$$\alpha = 2 = h + 1, \qquad h = 1, \qquad p = 3.$$

Désignons par O_{12}, O_{13} les points (impropres) infiniment voisins de O_1 respectivement sur les droites $O_1O_2 (x_3 = 0)$, $O_1O_3 (x_2 = 0)$. Ce sont les points que la transformation (3) fait correspondre respectivement aux points O'_1, O'_3. Nous pouvons répartir en trois classes les points unis de coïncidence non parfaite de l'involution I_p.

1° Points dont les deux points unis infiniment voisins sont des points de coïncidence parfaite. On a alors $p = 3$ et nous avons démontré que l'inverse a lieu (*).

2° Points dont un seul des points unis infiniment voisins est un point de coïncidence parfaite. On a $p > 3$ et $\alpha = 2$ ou $\alpha = h + 1$. Le second cas se ramène au premier en posant $\varepsilon' = \varepsilon^{h+1}$, car on a alors $\varepsilon'^2 = \varepsilon$.

3° Points dont aucun des points unis infiniment voisins n'est un point de coïncidence parfaite. On a $p > 3$, $\alpha > 2$ et de plus α est différent de $\frac{1}{2}(p + 1)$.

Le cas $p = 3$ ayant été étudié pour une surface algébrique quelconque dans la dernière de nos notes citées plus haut, nous supposerons dans la suite $p \geq 5$.

3. — Il est nécessaire d'étudier la manière dont se comporte la transformation (4) dans le voisinage des points O'_1, O'_3, c'est-à-dire la manière dont se comporte l'homographie (1) dans le domaine du second ordre de O_1. On pourrait, dans ce but, opérer sur les points O'_1, O'_3 comme on a opéré sur O_1. Il est plus simple d'utiliser d'autres transformations quadratiques.

Effectuons la transformation quadratique

$$x_1 : x_2 : x_3 = z_1^2 : z_1 z_2 : z_2 z_3, \tag{7}$$

dont les formules inverses sont

$$z_1 : z_2 : z_3 = x_1 x_2 : x_2^2 : x_1 x_3.$$

A l'homographie (1) correspond l'homographie

$$\frac{z'_1}{z_1} = \frac{z'_2}{\varepsilon z_2} = \frac{z'_3}{\varepsilon^{\alpha-1} z_3}. \tag{8}$$

(*) Voir le n° 9 de notre note *Sur les correspondances ponctuelles*... (loc. cit.) et *Sur les points unis des involutions*... (loc. cit.).

Au point O_{12} correspond le point $O_1''(z_2 = z_3 = 0)$. Si $\alpha = 2$, c'est-à-dire si O_{12} et O_1'' sont des points de coïncidence parfaite, l'homographie (8) est une homologie de centre O_1'' et d'axe $z_1 = 0$. Si O_{12} et O_1'' ne sont pas des points de coïncidence parfaite, l'étude du point O_1'' pourra se faire comme celle du point O_1. On aura, dans le domaine du premier ordre de O_1'', deux points unis de l'homographie (8) que nous désignerons par O_{12}'' (sur $z_3 = 0$) et O_{13}'' (sur $z_2 = 0$). Les points unis correspondants dans le domaine du second ordre de O_1 seront désignés par O_{122}, O_{123}; ce sont les points unis de I_p infiniment voisins de O_{12}.

Effectuons maintenant une autre transformation quadratique

$$z_1 : z_2 : z_3 = x_1x_3 : x_1x_2 : x_3^2, \tag{9}$$

dont les formules inverses sont

$$x_1 : x_2 : x_3 = z_1^2 : z_2z_3 : z_1z_3$$

et où les z ont naturellement une autre signification que dans les formules (7). A l'homographie (1) correspond l'homographie

$$\frac{z_1'}{\varepsilon^{\alpha} z_1} = \frac{z_2'}{\varepsilon z_2} = \frac{z_3'}{\varepsilon^{2\alpha} z_3}. \tag{10}$$

Au point O_{13} correspond le point $O_1''(z_2 = z_3 = 0)$. On pourra de même poursuivre l'étude de ce point comme celle du point O_1. Si $\alpha = \frac{1}{2}(p + 1)$, l'homographie (10) est une homologie de centre O_1'' et d'axe $z_1 = 0$; tous les points du domaine du second ordre de O_1, infiniment voisins de O_{13}, sont unis pour l'involution I_p. Pour les autres valeurs de α, il existe deux points unis infiniment voisins de O_1''; nous les désignerons par O_{12}'' (sur $z_3 = 0$) et O_{13}'' (sur $z_2 = 0$). Les points unis du domaine du second ordre de O_1, infiniment voisins de O_{13}, correspondant à O''_{12}, O''_{13}, seront désignés par O_{132}, O_{133}.

Reprenons le point O''_1 défini par la transformation (7). Pour chacun des points O''_{12}, O''_{13} qui n'est pas de coïncidence parfaite, on peut définir des points unis du domaine du second ordre de O''_1, comme on l'a fait pour O_1. On aura ainsi des points O''_{122}, O''_{123}, O''_{132}, O''_{133} et les points que la transformation (7) leur fait correspondre seront désignés par O_{1222}, O_{1223}, O_{1232}, O_{1233}. Ce sont les points unis de l'involution I_p, appartenant au domaine du troisième ordre de O_1, infiniment voisins, les deux premiers de O_{122}, les deux autres de O_{123}. Si le point O''_{12}, par exemple, était un point de coïncidence parfaite, alors tous les points du domaine du troisième ordre de O_1, infiniment voisins de O_{122}, seraient des points unis de I_p.

On définira de même les autres points unis de I_p, du domaine du troisième ordre de O_1, à savoir O_{1322}, O_{1323} infiniment voisins de O_{132} ; O_{1332}, O_{1333}, infiniment voisins de O_{133}, et ainsi de suite.

Le point O_{1323}, par exemple, pourra être étudié en effectuant successivement les transformations (9), (7), (9), c'est-à-dire la transformation

$$x_1 : x_2 : x_3 = z_1^5 : z_2^2 z_3^3 : z_1^2 z_2 z_3^2,$$

dont l'inverse est

$$z_1 : z_2 : z_3 = x_1 x_2 x_3^5 : x_1^2 x_2^3 : x_3^5.$$

A l'homographie (1) correspond l'homographie

$$\frac{z'_1}{\varepsilon^{3\alpha-1} z_1} = \frac{z'_2}{\varepsilon z_2} = \frac{z'_3}{\varepsilon^{3\alpha-2} z_3},$$

et à O_{1323} correspond le point $z_2 = z_3 = 0$. Pour que ce point soit de coïncidence parfaite, il faut que l'homographie précédente soit une homologie de centre $z_2 = z_3 = 0$ et d'axe $z_1 = 0$. Cela peut se présenter dans les cas suivants :

1° $p = 5h + 3, \qquad \alpha = 4h + 3;$

2° $p = 5h_1 + 4, \qquad \alpha = 3(h_1 + 1);$

3° $p = 5h + 6, \qquad \alpha = 2h + 3;$

4° $p = 5h + 12, \qquad \alpha = h + 3.$

4. — D'après ce qui précède, on peut, en effectuant un certain nombre de fois les transformations (7) et (9) dans un ordre convenable, faire correspondre à tout point uni de I_p du domaine de O_1, un point $z_2 = z_3 = 0$ uni pour l'homographie

$$z'_1 : z'_2 : z'_3 = \varepsilon^{\alpha_1} z_1 : \varepsilon^{\alpha_2} z_2 : \varepsilon^{\alpha_3} z_3. \tag{11}$$

On pourra, d'ailleurs, toujours supposer $\alpha_2 = 1$. Nous associerons au point uni considéré le symbole $(\alpha_1, 1, \alpha_3)$. Moyennant cette convention, il sera possible de former un tableau des points unis successifs du point O_1. Pour former ce tableau, on remarquera qu'aux points unis infiniment voisins du point $z_2 = z_3 = 0$, si l'homographie (11) n'est pas une homologie d'axe $z_1 = 0$, sont associés les symboles suivants :

$(\alpha_1, 1, \alpha_1 + \alpha_3 - 1)$ pour le point situé sur la droite $z_3 = 0$.

$(\alpha_3, 1, 2\alpha_3 - \alpha_1)$ pour le point situé sur la droite $z_2 = 0$.

On aura ainsi

$$O_1(0,1,\alpha)\begin{cases} O_{12}(0,1,\alpha-1)\begin{cases} O_{122}(0,1,\alpha-2)\begin{cases} O_{1222}(0,1,\alpha-3),\ \dots \\ O_{1223}(\alpha-2,1,2\alpha-4),\ \dots \end{cases} \\ O_{123}(\alpha-1,1,2\alpha-2),\ \dots \end{cases} \\ O_{13}(\alpha,1,2\alpha)\begin{cases} O_{132}(\alpha,1,3\alpha-1),\ \dots \\ O_{133}(2\alpha,1,3\alpha),\ \dots \end{cases} \end{cases}$$

Dans la formation de ce tableau, on s'arrêtera chaque fois que l'on rencontrera le symbole $(\alpha_1, 1, 1)$, qui correspond à un point de coïncidence parfaite.

Par exemple, pour $p = 5$, $\alpha = 3$, on aura le tableau

$$O_1(0, 1, 3) \left\{ \begin{array}{l} O_{12}(0, 1, 2) \left\{ \begin{array}{l} O_{122}(0, 1, 1). \\ O_{123}(2, 1, 4) \left\{ \begin{array}{l} O_{1232}(2, 1, 0) \left\{ \begin{array}{l} O_{12322}(2, 1, 1). \\ O_{12323}(0, 1, 3). \end{array} \right. \\ O_{1233}(4, 1, 1). \end{array} \right. \end{array} \right. \\ O_{13}(3, 1, 1). \end{array} \right.$$

Reprenons le cas général. Au point $O_{12\ldots 2}$, ayant $\alpha - 1$ fois l'indice 2, est associé le symbole $(0, 1, 1)$ et ce point est donc un point de coïncidence parfaite.

Considérons le point $O_{13\ldots 3}$, ayant λ fois l'indice 3 et soit k la plus petite valeur de λ pour laquelle le nombre $(\lambda + 1)\alpha$, divisé par p, donne pour reste l'unité. Observons que les restes de la division par p des nombres $(\lambda + 1)\alpha - 1$ pour $\lambda = 0, 1, 2, \ldots, p - 1$, sont tous distincts; par suite on aura $k \leq p - 1$. Dans la suite des points $O_{13}, O_{133}, \ldots, O_{13\ldots 3}$, on rencontrera donc un point de coïncidence parfaite dans le domaine du $(p - 1)$ -ième ordre au plus de O_1.

5. — L'homographie (1) transforme les unes dans les autres les courbes d'ordre p. Celles de ces courbes qui sont transformées en elles-mêmes par cette homographie se répartissent en p systèmes linéaires. Un seul de ceux-ci est dépourvu de points-base; nous le désignerons par $|C|$.

En posant, comme on l'a fait plus haut,

$$p = a\alpha + h, \qquad (h < \alpha)$$

l'équation du système $|C|$ peut s'écrire

$$\Sigma \lambda_{ik}\, x_1^{i(\alpha - 1) - (k-1)p}\, x_2^{kp - \alpha i}\, x_3^{i} = 0, \qquad (12)$$

où k est un entier positif ou nul, au plus égal à α, et i un entier positif ou nul tel que

$$(k-1)\frac{p}{\alpha-1} \leq i \leq k\frac{p}{\alpha}.$$

Pour $k=0$, on a $i=0$ et l'on obtient le terme $\lambda_{00}x_1^p$. Pour $k=1$, $i=0$, on a le terme $\lambda_{01}x_2^p$. Pour $k=\alpha$, on a $i=p$ et le terme $\lambda_{p\alpha}x_3^p$.

Nous rechercherons quel est, en dehors de x_1^p, le terme de l'équation (12) contenant la plus haute puissance de x_1. Observons tout d'abord que pour chaque valeur de k, le terme contenant x_1 à la plus haute puissance est donné par la plus grande valeur de i. Celle-ci est au plus égale à $ka+k-1$ et est précisément égale à cette quantité si l'on a $\alpha(k-1) \leq kh$.

Désignons par i_k la plus grande valeur de i correspondant à la valeur k. Le plus grand entier contenu dans $\frac{kp}{\alpha}$ est i_k; le plus grand entier contenu dans $\frac{(k+1)p}{\alpha}$ est au moins égal à i_k et l'on a donc $i_{k+1} \geq i_k$. Posons maintenant

$$i_k = ak + k - 1 - j_k, \qquad (j_k \geq 0).$$

$k-1-j_k$ est le plus grand entier contenu dans $\frac{kh}{\alpha}$; donc $k-j_k$ est le plus grand entier contenu dans $\frac{kh}{\alpha}+1$. Le plus grand entier $k-j_{k+1}$ contenu dans $\frac{(k+1)h}{\alpha}$ est donc au plus égal à $k-j_k$ et l'on a $j_{k+1} \geq j_k$.

Cela étant, voyons dans quelles conditions nous pouvons avoir

$$i_{k+1}(\alpha-1) - kp \geq i_k(\alpha-1) - (k-1)p.$$

L'inégalité précédente entraîne

$$(\alpha-1)(i_{k+1} - i_k - a) \geq a + h$$

On doit donc avoir $i_{k+1} - i_k - a > 0$, c'est-à-dire

$j_{k+1} < j_k + 1$. On en conclut $j_k = j_{k+1}$; par suite $i_{k+1} - i_k - a = 1$ et $\alpha > a + h + 1$. (On ne peut avoir $\alpha = a + h + 1$, car alors p serait divisible par $a + h$.)

En particulier, pour que le terme donné par $i = i_2$, $k = 2$ contienne x_1 à une puissance supérieure à celle du terme donné par $i_1 = a$, $k = 1$, il faut que l'on ait $j_2 = j_1 = 0$ et $\alpha > a + h + 1$.

Supposons que l'inégalité

$$\alpha(k-1) \leq kh \tag{13}$$

soit vérifiée pour $k = 1, 2, \ldots, \theta$, mais que l'on ait $(\theta + 1)h < \theta\alpha$. Il est facile de vérifier que l'inégalité (13) n'est pas vérifiée pour une valeur de k supérieure à θ. La puissance de x_1 dans le terme donné par i_k, k pour $k \leq \theta$ étant $a(\alpha - 1) + (k-1)(\alpha - a - h - 1)$ et ces nombres allant en croissant avec k pour $\alpha > a + h + 1$, on voit que *si l'on ordonne le premier membre de l'équation* (12) *par rapport aux puissances décroissantes de* x_1, *on obtient*

$$\lambda_{00}\, x_1^p + \lambda_{a1}\, x_1^{a(\alpha-1)}\, x_3^h\, x_3^a + \cdots = 0 \tag{14}$$

si $\alpha > a + h + 1$, *et*

$$\lambda_{00}\, x_1^p + \lambda_{a\theta+\theta-1,\,\theta}\, x_1^{a(\alpha-1)+(\theta-1)(\alpha-a-h-1)}\, x_2^{\alpha-\theta(\alpha-h)}\, x_3^{a\theta+\theta-1} + \cdots = 0 \tag{15}$$

si $\alpha > a + h + 1$, θ *étant la plus grande valeur de* k *satisfaisant à l'inégalité* (13).

On remarquera que pour $\theta = 1$, l'équation (15) est identique à l'équation (14).

6. — Considérons le premier cas ($\alpha > a + h + 1$). Les courbes C, soumises à la seule condition de passer par O_1, sont données par $\lambda_{00} = 0$. Désignons-les par C_1. L'équation (14), où l'on fait $\lambda_{00} = 0$, montre que les courbes C_1 ont la multiplicité $a + h$ en O_1, a tangentes étant confondues avec $x_3 = 0$ et h avec $x_2 = 0$.

Effectuons sur la courbe C_1 $\lambda - 1$ fois la transformation (7), c'est-à-dire la transformation

$$x_1 : x_2 : x_3 = z_1^{\lambda} : z_1^{\lambda-1} z_2 : z_2^{\lambda-1} z_3,$$
$$z_1 : z_2 : z_3 = x_1 x_2^{\lambda-2} : x_2^{\lambda} : x_1^{\lambda-1} x_3.$$

L'équation obtenue est divisible par z_2^{a+h} ($a + h$ étant la multiplicité de O_1). Supposons qu'elle soit divisible par $z_2^{(\lambda-1)a+h}$; nous obtenons ainsi l'équation

$$\Sigma \lambda_{ik} z_1^{i(\alpha-\lambda)-(k-\lambda)p} z_2^{(k-1)p+(a-i)(\alpha-\lambda+1)} z_3^{i} = 0, \tag{16}$$
$$(k > 0,\ i \geq 0).$$

La courbe (10) existe pour $\lambda = 1, 2, \ldots, \alpha - 1$. Il est facile de voir, en tenant compte de l'inégalité $\alpha < a + h + 1$, que le terme contenant z_1 à la plus haute puissance est donné par $k = 1$, $i = a$. Ce terme étant $z_1^{a(\alpha-\lambda)+(\lambda-1)p} z_3^{a}$, le point $z_2 = z_3 = 0$ est multiple d'ordre a pour la courbe (10), les a tangentes étant confondues en $z_3 = 0$.

Faisons maintenant $\lambda = \alpha$. La courbe (16) existe encore et les termes contenant [illegible] plus haute puissance sont [illegible]

La courbe (16) possède actuellement en $z_2 = z_3 = 0$ un point multiple d'ordre a, à tangentes distinctes et variables avec la courbe C_1.

On en conclut que la courbe C_1 possède en O_1 la multiplicité $a + h$ et $\alpha - 1$ points infiniment voisins successifs, multiples d'ordre a, à savoir $O_{12}, O_{122}, \ldots, O_{12\ldots 2}$. Le dernier de ces points est le point de coïncidence parfaite rencontré plus haut.

On voit sans difficulté que les résultats précédents subsistent pour $\alpha > a + h + 1$, $\theta = 1$.

$j_{k+1} < j_k + 1$. On en conclut $j_k = j_{k+1}$; par suite $i_{k+1} - i_k - a = 1$ et $\alpha > a + h + 1$. (On ne peut avoir $\alpha = a + h + 1$, car alors p serait divisible par $a + h$.)

En particulier, pour que le terme donné par $i = i_2$, $k = 2$ contienne x_1 à une puissance supérieure à celle du terme donné par $i_1 = a$, $k = 1$, il faut que l'on ait $j_2 = j_1 = 0$ et $\alpha > a + h + 1$.

Supposons que l'inégalité

$$\alpha(k-1) \leq kh \tag{13}$$

soit vérifiée pour $k = 1, 2, \ldots, \theta$, mais que l'on ait $(\theta + 1)h < \theta\alpha$. Il est facile de vérifier que l'inégalité (13) n'est pas vérifiée pour une valeur de k supérieure à θ. La puissance de x_1 dans le terme donné par i_k, k pour $k \leq \theta$ étant $a(\alpha - 1) + (k-1)(\alpha - a - h - 1)$ et ces nombres allant en croissant avec k pour $\alpha > a + h + 1$, on voit que *si l'on ordonne le premier membre de l'équation* (12) *par rapport aux puissances décroissantes de* x_1, *on obtient*

ERRATA

Ligne 20, *lire :* *si* $\alpha < a + h + 1$, *au lieu de :* *si* $\alpha > a + h + 1$,

Ligne 26, *lire :* $(\alpha < a + h + 1)$, *au lieu de :* $(\alpha > a + h + 1)$.

faisant à l'inégalité (13).

On remarquera que pour $\theta = 1$, l'équation (15) est identique à l'équation (14).

6. — Considérons le premier cas $(\alpha > a + h + 1)$. Les courbes C, soumises à la seule condition de passer par O_1, sont données par $\lambda_{00} = 0$. Désignons-les par C_1. L'équation (14), où l'on fait $\lambda_{00} = 0$, montre que les courbes C_1 ont la multiplicité $a+h$ en O_1, a tangentes étant confondues avec $x_3=0$ et h avec $x_2=0$.

Effectuons sur la courbe C_1 $\lambda-1$ fois la transformation (7), c'est-à-dire la transformation

$$x_1 : x_2 : x_3 = z_1^{\lambda} : z_1^{\lambda-1} z_2 : z_2^{\lambda-1} z_3,$$
$$z_1 : z_2 : z_3 = x_1 x_2^{\lambda-2} : x_2^{\lambda} : x_1^{\lambda-1} x_3.$$

L'équation obtenue est divisible par z_2^{a+h} ($a+h$ étant la multiplicité de O_1). Supposons qu'elle soit divisible par $z_2^{(\lambda-1)a+h}$; nous obtenons ainsi l'équation

$$\Sigma \lambda_{ik} z_1^{i(\alpha-\lambda)-(k-\lambda)p} z_2^{(k-1)p+(a-i)(\alpha-\lambda+1)} z_3^{i} = 0, \qquad (16)$$
$$(k > 0,\ i \geq 0).$$

La courbe (10) existe pour $\lambda = 1, 2, \ldots, \alpha-1$. Il est facile de voir, en tenant compte de l'inégalité $\alpha < a+h+1$, que le terme contenant z_1 à la plus haute puissance est donné par $k=1$, $i=a$. Ce terme étant $z_1^{a(\alpha-\lambda)+(\lambda-1)p} z_3^{a}$, le point $z_2=z_3=0$ est multiple d'ordre a pour la courbe (10), les a tangentes étant confondues en $z_3=0$.

Faisons maintenant $\lambda=\alpha$. La courbe (16) existe encore et les termes contenant z_1 à la plus haute puissance sont

$$z_1^{(\alpha-1)p}[\lambda_{01} z_2^{a} + \lambda_{11} z_2^{a-1} z_3 + \cdots + \lambda_{a1} z_3^{a}].$$

La courbe (16) possède actuellement en $z_2=z_3=0$ un point multiple d'ordre a, à tangentes distinctes et variables avec la courbe C_1.

On en conclut que la courbe C_1 possède en O_1 la multiplicité $a+h$ et $\alpha-1$ points infiniment voisins successifs, multiples d'ordre a, à savoir $O_{12}, O_{122}, \ldots, O_{12\ldots2}$. Le dernier de ces points est le point de coïncidence parfaite rencontré plus haut.

On voit sans difficulté que les résultats précédents subsistent pour $\alpha > a+h+1$, $\theta = 1$.

7. — Effectuons maintenant, sur la courbe C_1, la transformation (9). Il vient, après division par z_3^{a+h}, l'équation

$$\Sigma \lambda_{ik} z_1^{i(2\alpha-1)-2(k-1)p} z_2^{kp-\alpha i} z_3^{kp-i(\alpha-1)-\alpha-h} = 0, \qquad (17)$$

$$(k > 0,\ i \geq 0).$$

Supposons d'abord $\alpha = \frac{1}{2}(p+1)$. Dans ce cas, le point O_{13} est un point de coïncidence parfaite, En posant $p = 2n+1$, on a $\alpha = n+1$, $h = n$, $a = 1$. L'inégalité (13) est vérifiée pour toutes les valeurs de k et l'on a $\theta = \alpha$. Pour $i = 2k - 1$ (valeur maximum de i) les termes de l'équation (17) contiennent z_1 à la plus haute puissance et sont

$$x_1^p(\lambda_{11} z_2^n + \lambda_{32} z_2^{n-1} z_3 + \cdots + \lambda_{p\alpha} z_3^n).$$

La courbe C_1 possède donc en O_{13} la multiplicité $h = n$, les tangentes au point $z_2 = z_3 = 0$ correspondant, à la courbe (17), étant distinctes et variables avec C_1.

Le cas où $\alpha = \frac{1}{2}(p+1)$ étant écarté, cherchons quel est le terme de l'équation (17) contenant z_1 à la plus haute puissance.

La plus haute puissance de z_1 contenue dans un terme pour lequel $k \leq \theta$ est

$$a(2\alpha - 1) - (k-1)(a + 2h + 1 - 2\alpha).$$

Pour $k > \theta$, on aura, pour plus haute puissance de z_1, au plus

$$(a-1)(2\alpha - 1) - (k-1)(a + 2h + 1 - 2\alpha).$$

Par suite, si $2\alpha < a + 2h + 1$, la plus haute puissance de x_1 est $a(2\alpha - 1)$, obtenue pour $k = 1$, $i = a$.

Supposons maintenant $2\alpha > a + 2h + 1$, inégalité compatible avec $\alpha < a + h + 1$. Le terme contenant z_1 à la plus haute puissance est alors donné par $k = \theta$, $i_k = a\theta + \theta - 1$. Il suffit, pour le voir, de répéter le raisonnement fait plus haut à propos de l'équation (12).

On voit donc que la courbe C_1 possède en O_{13} un point multiple d'ordre h si $2\alpha < a + 2h + 1$, et un point mutiple d'ordre $h - (\theta - 1)(2\alpha - a - 2h - 1)$ si $2\alpha > a + 2h + 1$. Dans le premier cas, le point $z_2 = z_3 = 0$ correspondant possède, pour la courbe (17), h tangentes coïncidant avec $z_2 = 0$; dans le second, il y a $\theta h - (\theta - 1)\alpha$ tangentes coïncidant avec $z_2 = 0$, les autres coïncident avec $z_3 = 0$.

8. — Désignons par r la dimension du système $|C|$ et rapportons projectivement les courbes de ce système aux hyperplans d'un espace linéaire S_r à r dimensions. Le système $|C|$ ayant le degré p^2 et étant composé au moyen de l'involution I_p d'ordre p, nous obtenons ainsi une surface Φ, d'ordre p, de S_r, rationnelle et normale, image de l'involution I_p.

Soient X_{ik} les coordonnées projectives homogènes de S_r, i et k pouvant prendre les mêmes valeurs que pour les coefficients λ_{ik} de l'équation (12). Nous désignerons par O_{ik} le point de S_r pour lequel toutes les coordonnées sont nulles, sauf X_{ik}. Pour établir la projectivité entre les courbes C et les hyperplans S_r, nous poserons

$$\rho X_{ik} = x_1^{i(\alpha-1)-(k-1)p} x_2^{kp-\alpha i} x_3^{i}. \tag{18}$$

Les équations de Φ s'obtiendront en éliminant x_1, x_2, x_3 et ρ entre les équations (18). On obtient aisément les équations

$$X_{00}^{i(\alpha-1)-(k-1)p} X_{01}^{kp-\alpha i} X_{p\alpha}^{i} = X_{ik}^{p}, \tag{19}$$
$$(i > 0,\ k > 0),$$

mais ces $r - 2$ hypersurfaces ont en commun non seulement la surface Φ, mais aussi une autre surface étrangère à la question.

Au point uni O_1 de l'involution I_p correspond, sur la surface Φ, le point de diramation O_{00}, dont nous allons déterminer la multiplicité pour cette surface. Pour abréger l'écriture, nous désignerons par X la quantité X_{a1} si $\alpha < a + h + 1$, la quantité $X_{a\theta+\theta-1,\theta}$ si $\alpha > a + h + 1$.

Commençons par observer que l'espace $X_{00} = X_{01} = X_{p\alpha} = 0$ ne rencontre pas la surface Φ, car on ne peut avoir $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. De plus, l'espace $X_{01} = X_{p\alpha} = X = 0$ ne rencontre la surface Φ qu'au seul point O_{00}. Cela étant, si nous projetons la surface Φ à partir de l'espace

$$X_{00} = X_{01} = X_{p\alpha} = X = 0$$

sur l'espace S_3 déterminé par les points O_{00}, O_{01}, $O_{p\alpha}$, O, nous obtiendrons une surface Φ' d'ordre p ayant au point O_{00} la même multiplicité que Φ. L'équation de Φ' s'obtiendra en éliminant les X_{ik}, sauf X_{00}, X_{01}, $X_{p\alpha}$, X entre les équations (19) et cette équation sera donc

$$X_{00}^{a(\alpha-1)+(\theta-1)(\alpha-a-h-1)} X_{01}^{\alpha-\theta(\alpha-h)} X_{p\alpha}^{a\theta+\theta-1} = X^p, \tag{20}$$

où l'on fera $\theta = 1$ si $\alpha < a + h + 1$.

La surface Φ possède donc un point multiple d'ordre $\alpha - 1 - \theta(\alpha - a - h - 1)$ au point O_{00}. Le cône des tangentes à Φ' au point O_{00} se compose de deux plans comptés l'un $\alpha - \theta(\alpha - h)$ fois, l'autre, $a\theta + \theta - 1$ fois; on ne peut cependant pas en conclure qu'il en est de même du cône tangent à la surface Φ au point O_{00}, car un des plans en question pourrait être la projection d'un cône proprement dit (et il en est effectivement ainsi dans certains cas). Mais on peut affirmer que le cône tangent à la surface Φ en O_{00} se scinde en deux cônes (au moins).

9. — Nous allons considérer certains cas particuliers; nous commencerons par supposer $\alpha = 2$. Alors on a $h = 1$ et nous poserons $p = 2n + 1$; d'où $a = n$. En changeant de notation, l'équation d'une courbe C peut s'écrire

$$\left.\begin{array}{r}\lambda x_1^p + \lambda_0 x_1^n x_2 x_3^n + \cdots + \lambda_i x_1^{n-i} x_2^{2i+1} x_3^{n-i} + \cdots \\ + \lambda_n x_2^p + \lambda_{n+1} x_3^p = 0.\end{array}\right\} \quad (21)$$

On a $r = n + 2$ et nous poserons, pour obtenir la surface Φ, dans S_{n+2},

$$\frac{X}{x_1^{2n+1}} = \cdots = \frac{X_i}{x_1^{n-i} x_2^{2i+1} x_3^{n-i}} = \cdots = \frac{X_{n+1}}{x_3^p}.$$

Les équations de Φ sont alors

$$\left\| \begin{array}{cccccc} XX_{n+1} & X_0 & X_1 & \ldots & X_{n-2} & X_{n-1} \\ X_0^2 & X_1 & X_2 & \ldots & X_{n-1} & X_n \end{array} \right\| = 0. \qquad (22)$$

Les équations

$$\left\| \begin{array}{ccccc} X_0 & X_1 & \ldots & X_{n-2} & X_{n-1} \\ X_1 & X_2 & \ldots & X_{n-1} & X_n \end{array} \right\| = 0 \qquad (23)$$

représentent un cône à trois dimensions d'ordre n ayant pour sommet la droite $X_0 = X_1 = \cdots = X_n = 0$ et projetant de cette droite une courbe rationnelle normale d'ordre n de l'espace linéaire à n dimensions $X = X_{n+1} = 0$. L'espace à n dimensions $X_0 = X_1 = 0$ coupe le cône (23) suivant $n - 1$ plans confondus avec le plan $X_1 = X_2 = \cdots = X_n = 0$. L'hypersurface cubique

$$XX_1X_{n+1} - X_0^3 = 0 \qquad (24)$$

contient l'espace $X_0 = X_1 = 0$; elle coupe le cône (23) suivant une surface d'ordre $3n$ dont il faut défalquer $n - 1$ fois le plan $X_1 = X_2 = \cdots = X_n = 0$, dont les points ne satisfont pas aux équations (22). Il en résulte que les points satisfaisant aux équations (22) appartiennent tous à la surface Φ.

Appelons A le point de coordonnées $X_0 = X_1 = \cdots = X_{n+1} = 0, \cdots$, A_i le point $X = X_0 = \cdots = X_{i-1} = X_{i+1} = \cdots = X_{n+1} = 0, \cdots$. Au point O_1 correspond le point A. Ce point est multiple d'ordre n pour le cône (23) et double pour l'hypersurface (24). Comme l'intersection de ce cône et de cette hypersurface se compose de Φ et du plan AA_0A_{n+1} compté $n - 1$ fois, le point A est multiple d'ordre $n + 1$ pour Φ, comme on l'avait d'ailleurs trouvé plus haut. Les hyperplans $X_1 = 0$, $X_{a+1} = 0$ sont tangents en A à l'hypersurface (24); par suite le cône des tangentes en A à la surface Φ se compose du plan AA_0A_{n+1} et du cône d'ordre n, section du cône (23) par l'hyperplan $X_{n+1} = 0$. Ce cône a en commun avec ce plan la droite AA_0, et seulement cette droite.

Considérons une courbe C_1 du système (21) passant par O_1 et caractérisée par $\lambda = 0$. Soit Γ_1 la section de Φ correspondante. C_1 a la multiplicité $n + 1$ en O_1 et n tangentes confondues avec $x_3 = 0$, la dernière tangente étant $x_2 = 0$. La courbe Γ_1 possède en A la multiplicité $n + 1$ également et des tangentes distinctes.

Une courbe C est en général de genre $n(2n - 1)$. La courbe C_1 ayant en O_1 un point multiple d'ordre $n + 1$ auquel est infiniment voisin le point O_{12}, multiple d'ordre n, a le genre $n(n - 1)$.

En appliquant la formule de Zeuthen, on trouve aisément que les sections hyperplanes Γ de Φ ont le genre n et les courbes Γ_1 le genre 0.

Projetons la surface Φ du point A sur l'hyperplan $X = 0$. Nous obtenons une surface d'ordre $2n + 1 - (n + 1) = n$ qui est précisément la section du cône (23) par cet hyperplan. Les sections hyperplanes de cette surface, que nous désignerons par Φ_1 et qui est un cône de sommet A_{n+1}, correspondent aux courbes C_1. Aux points de Φ infiniment voisins de A et situés dans le plan AA_0A_{n+1} correspondent les points de la droite A_0A_{n+1} sur la surface Φ_1 ; aux points de Φ infiniment voisins de A situés sur le cône d'ordre n tangent à cette surface en ce point correspondent sur Φ_1 les points de la section de cette surface par l'hyperplan $X_{n+1} = 0$.

Aux courbes représentées par l'équation (21), où l'on pose $\lambda = \lambda_0 = 0$, correspondent sur la surface Φ_1 les sections de celle-ci par les hyperplans passant par A_0 et, sur la surface Φ, les sections de cette surface par les hyperplans passant par la droite AA_0. Ces sections hyperplanes sont rationnelles.

On peut prendre, comme surface image d'une involution d'ordre premier $\mathrm{p} = 2\mathrm{n} + 1$, *engendrée par une homographie plane cyclique et possédant un point uni auquel est infiniment voisin un point (et un seul) de coïncidence parfaite, une surface rationnelle normale d'ordre* p, *de* $\mathrm{S}_{\mathrm{n}+2}$, *ayant au point de diramation correspondant au point uni considéré, un point multiple d'ordre* $\mathrm{n} + 1$, *le cône des tangentes en ce point étant formé d'un cône d'ordre* n *non dégénéré et d'un plan n'ayant qu'une droite en commun avec le cône.*

10. — Passons à l'étude du cas particulier où l'on a $\alpha = p - 1$; d'où $a = 1$, $h = 1$. Nous poserons encore $p = 2n + 1$. L'équation (12) pourra s'écrire, en simplifiant les notations,

$$\left.\begin{aligned}&\lambda_0 x_1^p + \lambda_1 x_1^{p-2} x_2 x_3 + \cdots + \lambda_i x_1^{p-2i} x_2^i x_3^i + \cdots \\ &\qquad + \lambda^n x_1 x_2^n x_3^n + \lambda_{n+1} x_2^p + \lambda_{n-2} x_3^p = 0.\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

En posant

$$\frac{X_0}{x_1^p} = \frac{X_1}{x_1^{p-2} x_2 x_3} = \cdots = \frac{X_i}{x_1^{p-2i} x_2^i x_3^i} = \cdots = \frac{X_{n+1}}{x_2^p} = \frac{X^{n+2}}{x_3^p},$$

on obtiendra les équations de la surface Φ, appartenant à l'espace linéaire $S_{n+2}(r = n + 2)$, sous la forme

$$\left\|\begin{matrix} X_0 & X_1 & \dots & X_{n-2} & X_{n-1} & X_n^2 \\ X_1 & X_2 & \dots & X_{n-1} & X_n & X_{n+1}X_{n+2} \end{matrix}\right\| = 0. \quad (26)$$

Il est aisé de voir que les équations (26) ne s'annulent que pour les points de Φ.

Représentons par A_i le point dont toutes les coordonnées sont nulles, sauf X_i. Au point O_1 correspond le point A_0. Nous savons que ce point est double pour la surface Φ; nous allons retrouver ce résultat et compléter l'analyse de la singularité.

Le cône à trois dimensions, d'ordre n, représenté par les équations

$$\left\|\begin{matrix} X_0 & X_1 & \dots & X_{n-1} \\ X_1 & X_2 & \dots & X_n \end{matrix}\right\| = 0 \quad (27)$$

et l'hypersurface cubique

$$X_0 X_{n+1} X_{n+2} - X_1 X_2^n = 0 \quad (28)$$

ont en commun la surface Φ et le plan $A_0A_{n+1}A_{n+2}$ compté $n - 1$ fois. Le point A_0 est double pour l'hypersurface (28). Ce point est simple pour le cône (27) et par suite double pour la surface Φ, car le cône $X_{n+1}X_{n+2} = 0$, dégénéré, tangent en A_0 à l'hypersurface (28), ne contient pas le plan $A_0A_{n+1}A_{n+2}$. On voit sans peine que la surface Φ a deux plans tangents en A_0, à savoir les plans $A_0A_1A_{n+1}$ et $A_0A_1A_{n+2}$. Le point A_0 est double biplanaire pour Φ.

Projetons la surface Φ du point A_0 sur l'espace $X_0 = 0$; nous obtenons la surface Φ_1 :

$$\left\|\begin{matrix} X_1 & \dots & X_{n-1} & X_n^2 \\ X_2 & \dots & X_n & X_{n+1}X_{n+2} \end{matrix}\right\| = 0, \qquad X_0 = 0.$$

Aux points infiniment voisins de A_0 sur Φ, situés dans les plans $A_0A_1A_{n+1}$, $A_0A_1A_{n+2}$, correspondent respectivement les points des droites A_1A_{n+1}, A_1A_{n+2} sur la surface Φ_1. On voit immédiatement que pour cette surface, A_1 est un point double biplanaire dont les plans tangents sont $A_1A_2A_{n+1}$, $A_1A_2A_{n+2}$.

En projetant Φ_1 de A_1 sur $X_1 = 0$, on obtient une surface Φ_2 possédant en A_2 la même singularité que Φ_1 en A_1 et Φ en A_0, et ainsi de suite. On parviendra finalement à la surface Φ_{n-1} :

$$X_{n-1}X_{n-1}X_{n+2} - X_n^3 = 0, \qquad X_0 = X_1 = \ldots = X_{n-2} = 0,$$

possédant un point double biplanaire ordinaire en A_{n-1}. Il en résulte que

On peut prendre comme surface image de l'involution d'ordre premier $p = 2n + 1$, *engendrée par l'homographie plane*

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^{p-1} x_3, \qquad \left(\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{p}}\right)$$

une surface rationnelle normale d'ordre p, *de* S_{n+2}. *Au point uni* $x_2 = x_3 = 0$ *correspond un point de diramation qui est un point double biplanaire de la surface image, auquel sont infiniment voisins successifs* $n - 1$ *points doubles biplanaires dont le dernier est ordinaire.*

Les sections hyperplanes des surfaces $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{n-1}$ correspondent respectivement aux courbes (25), où l'on fait $\lambda_0 = 0$; $\lambda_0 = \lambda_1 = 0$; $\cdots$; $\lambda_0 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-2} = 0$.

11. — Reprenons le cas $\alpha = 2$ (n° 9). L'involution considérée est engendrée par l'homographie

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1 : \varepsilon x_3 : \varepsilon^2 x_3,$$

de période $p = 2n + 1$. En posant $\eta = \varepsilon^{p-1}$, les équations de cette homographie peuvent aussi s'écrire

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = \eta^2 x_3 : \eta r_2 : x_3,$$

et par suite le point O_3 est un point uni de même nature que O_1.

Les équations de l'homographie considérée peuvent encore s'écrire

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = \varepsilon^{p-1} x_1 : x_2 : x_3,$$

et par suite O_2 est un point uni de même espèce que celui qui vient d'être étudié (n° 10).

On conclut de ce qui précède que

La surface rationnelle normale Φ, *d'ordre* p, *de* S_{n+2}, *image de l'involution d'ordre premier* p $= 2$n $+ 1$ *engendrée par l'homographie plane*

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^2 x_3,$$

possède

Deux points multiples d'ordre n $+ 1$, *le cône tangent en chacun de ces points étant formé d'un cône irréductible d'ordre* n *et d'un plan ayant une seule droite en commun avec le cône;*

Un point double biplanaire auquel sont infiniment voisins successifs n $- 1$ *points doubles biplanaires dont le dernier est ordinaire.*

12. — Retournons au cas général et considérons un point uni O_1 dont les points unis infiniment voisins O_{12}, O_{13} ne sont pas des points de coïncidence parfaite, les autres cas ayant été étudiés.

Appelons, comme plus haut, C_1 les courbes C soumises à la condition de passer par O_1; elles sont représentées par l'équation (12), où l'on fait $\lambda_{00} = 0$. Les tangentes en

O_1 à ces courbes sont toutes confondues avec les droites $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Appelons C_2 les courbes C_1 soumises à la condition d'avoir en O_1 une tangente distincte des droites $x_2 = 0$, $x_3 = 0$; ces courbes sont représentées par l'équation (12), où l'on fait $\lambda_{\alpha 1} = 0$ si $\alpha < a + h + 1$, $\lambda_{\alpha\theta+\theta-1,\theta} = 0$ si $\alpha > a + h + 1$. Appelons Γ, Γ_1, Γ_2 les sections hyperplanes de la surface Φ qui correspondent respectivement aux courbes C, C_1, C_2. Les systèmes $|C_1|$, $|C_2|$ ont la dimension $r - 1$, $r - 2$.

Effectuons la transformation quadratique (3) et soient C'_1, C'_2 les courbes qui correspondent aux courbes C_1, C_2, et I'_p l'involution qui correspond à I_p. Si nous rapportons projectivement les courbes C'_1 aux hyperplans d'un espace linéaire S_{r-1} à $r - 1$ dimensions, nous obtenons une transformée homographique de la projection Φ_1 de Φ à partir de O_{00} sur l'hyperplan $X_{00} = 0$ de S_r. Nous désignerons encore cette surface par Φ_1. Aux points de Φ infiniment voisins de O_{00} correspondent, sur Φ_1, les points d'une courbe qui, d'après une remarque faite plus haut, se compose certainement de deux parties que nous désignerons par γ_1, γ_2.

Aux points O_{12}, O_{13} correspondent respectivement, par la transformation (3), les points O'_1 $(y_2 = y_3 = 0)$ et O'_3 $(y_1 = y_2 = 0)$. Les courbes C'_1 ne rencontrent la droite $y_2 = 0$ qu'en O'_1, O'_3 et ont en chacun de ces points des tangentes fixes qui ne peuvent être que $y_2 = 0$, $y_3 = 0$ pour O'_1, $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ pour O'_3. Les courbes C'_2 sont des courbes C'_1 passant par un point de $y_2 = 0$ distinct de O'_1, O'_3 et contenant par suite cette droite un certain nombre de fois.

Les courbes γ_1, γ_2 provenant d'un point de diramation de la surface Φ sont des courbes de diramation pour la correspondance $(1, p)$ entre Φ_1 et le plan du système $|C'_1|$.

Il en résulte qu'à un point de l'une de ces courbes correspond un point uni de I'_p infiniment voisin de O'_1 ou de O'_3. Pour fixer les idées, nous associerons la courbe γ_1 et le point O'_1, la courbe γ_2 et le point O'_3.

Aux courbes C'_2 correspondent sur la surface Φ_1 des courbes Γ_2 sections de cette surface par des hyperplans passant par les points communs à γ_1, γ_2. Comme les courbes Γ_2, de même que les courbes C'_2, sont en nombre ∞^{r-2}, les courbes γ_1, γ_2 doivent avoir tous leurs points d'intersection confondus en un seul. Ce point correspond aux groupes de I'_p appartenant à la droite $y_2 = 0$.

Supposons que la courbe γ_1 ait l'ordre ν. Alors, les courbes C'_1 doivent avoir ν tangentes distinctes et distinctes de $y_2 = 0$ au point O'_1. Comme, d'autre part, ces courbes ne peuvent avoir comme tangente que $y_3 = 0$ en dehors de $y_2 = 0$, on a $\nu = 1$ et γ_1 est une droite. On démontre de même que γ_2 est une droite. Il en résulte que le cône tangent en O_{00} à la surface Φ est formé de deux plans (ceux qui projettent γ_1, γ_2 de O_{00}) comptés chacun un certain nombre de fois, fixé par l'équation (20).

Si une surface rationnelle normale d'ordre p *est l'image d'une involution* I_p *d'ordre premier* p *engendrée par une homographie plane cyclique et si* O_1 *est un point uni de* I_p *auquel sont infiniment voisins deux points de coïncidence non parfaite, le point de diramation correspondant est un point multiple de la surface dont le cône tangent est formé de deux plans (comptés éventuellement chacun un certain nombre de fois).*

Liége, le 26 septembre 1929.