ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE
Extrait des *Bulletins de la Classe des Sciences*, 5e série, t. XVI, n° 4.
Séance du 5 avril 1930, pp. 450-467.

Recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique,

par Lucien GODEAUX,
Professeur à l'Université de Liége.

Nous avons repris récemment l'étude des points unis d'une involution cyclique d'ordre premier p, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique F. Rappelons que ces points unis peuvent être répartis en deux catégories (1).

1° Points unis parfaits, tels que tous les points de la surface, infiniment voisins d'un pareil point, soient tous unis pour l'involution;

2° Points unis non parfaits, tels que les points de la surface infiniment voisins d'un de ces points ne soient pas en général unis pour l'involution.

Lorsque $p = 2$, M. Severi a montré que le premier cas se présente toujours (2). Nous supposerons donc dans la suite $p > 2$.

Un point uni non parfait possède, dans son domaine du premier ordre, deux points unis qui peuvent, à leur tour, être parfaits ou non. On est donc conduit à partager les points unis non parfaits en trois groupes suivant que (3) :

a) Les points unis du domaine du premier ordre sont des points unis parfaits;

(1) Recherches sur les involutions douées d'un nombre fini de points de coïncidence appartenant à une surface algébrique. (*Bull. de la Soc. Math. de France*, 1919, pp. 1-16.)

(2) F. Severi, Sulle superficie algebriche che ammettono un gruppo continuo permutabile a due parametri di trasformazioni birazionali. (*Atti del R. Istituto Veneto*, 1907-1908, pp. 409-419.)

(3) Sur les points unis des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique. (*Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique*, 1929, pp. 959-965.)

b) ou que l'un de ces points est uni parfait, l'autre uni non parfait ;

c) ou que les deux points sont unis non parfaits.

Nous avons montré que dans le premier cas ([1]) on a $p = 3$. Nous avions fait voir précédemment que ce cas se présente toujours pour $p = 3$ ([2]). Dans ce travail, nous étudions le second cas.

Soit donc I_p une involution cyclique, d'ordre premier impair p, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique F. Nous construisons, sur F, un système linéaire $|C_0|$, dépourvu de points-base, composé au moyen de l'involution I_p. Si P est un point uni non parfait de I_p de l'espèce envisagée, t_1, t_2 les tangentes à F en P contenant les points unis infiniment voisins, et si l'on pose $p = 2n + 1$, nous montrons que les courbes C_0 passant par P acquièrent la multiplicité $n + 1$ en ce point, n tangentes étant confondues avec t_1, la dernière avec t_2. Nous examinons les systèmes de courbes C_0 ayant en P une multiplicité supérieure à $n + 1$. Nous établissons ensuite le théorème suivant :

Si Φ *est une surface normale, image d'une involution cyclique* I_p, *d'ordre premier* $p = 2n + 1$, *n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique* F, *à un point uni non parfait de* I_p *auquel sont infiniment voisins un point uni parfait et un point uni non parfait, correspond sur la surface* Φ *un point de diramation qui est un point multiple d'ordre* $n + 1$ *de cette surface, le cône tangent étant formé d'un cône d'ordre* n *et d'un plan.*

Pour arriver à ces propriétés, nous établissons différentes propriétés valables pour les points unis non parfaits quel-

([1]) Sur les points unis... (*loc. cit.*).

([2]) Sur les points unis des involutions cycliques d'ordre trois appartenant à une surface algébrique. (*Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique*, 1929, pp. 533-560.) Voir aussi notre note sur les correspondances ponctuelles entre surfaces. (*Idem*, pp. 408-420.)

conques. Nous retrouvons aussi le résultat que nous avons obtenu antérieurement sur les points unis non parfaits auxquels sont infiniment voisins deux points unis parfaits, par une voie légèrement différente de la voie primitivement utilisée. Nous espérons pouvoir eontinuer ces recherches en considérant les points unis non parfaits auxquels sont infiniment voisins des points unis non parfaits. La question paraît assez difficile; cela tient surtout à la nature des branches d'origine P des courbes C_0 passant par ce point, comme on peut le voir par l'exemple des homographies planes cycliques, que nous avons étudiées récemment (¹).

1. Soient I_p une involution cyclique d'ordre premier impair p, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique F, et Φ une surface image de cette involution. Désignons par T la transformation birationnelle de la surface F en elle-même, génératrice de l'involution I_p.

Nous avons montré (²) que l'on peut construire sur F un système linéaire $|C_0|$, privé de points-base, composé au moyen de l'involution I_p et non au moyen d'une autre involution, appartenant à un système complet $|C|$, plus ample que $|C_0|$. De plus, la dimension r de $|C_0|$ peut être supposée aussi grande que l'on veut; nous la supposerons supérieure à trois. Le système $|C|$ est nécessairement simple et privé de points-base.

Soit R $(R > r)$ la dimension de $|C|$. Rapportons projectivement les courbes C aux hyperplans d'un espace linéaire S_R à R dimensions. A la surface F correspond une surface normale, birationnellement identique à F. Cette surface est simple, son

(¹) Sur les homographies planes cycliques. (*Mémoires de la Soc. roy. des Sciences de Liége*, 1930, t. XV, pp. 1-26.) Sur les surfaces représentant les involutions planes engendrées par des homographies cycliques. (*Idem*, sous presse.) Voir aussi une note sur les points unis des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique. (*C. R.*, 20 janvier 1930, pp. 154-155.)

(²) Recherches... (*loc. cit.*).

ordre est égal au degré de $|C|$ et par suite de $|C_0|$. C'est ce modèle projectif de la surface F que nous désignerons dorénavant par F.

En rapportant projectivement les courbes C_0 aux hyperplans d'un espace linéaire S_r à r dimensions, F se transforme en une surface simple, normale, birationnellement identique à Φ. C'est ce modèle projectif de Φ que nous désignerons dans la suite par Φ. Soient n l'ordre de la surface Φ, $|\Gamma|$ le système de ses sections hyperplanes, π le genre des courbes Γ. Le système $|C_0|$ et par suite le système $|C|$ sont de degré pn. D'après la formule de Zeuthen appliquée à la correspondance $(1, p)$ sans points de diramation existant entre une courbe Γ et la courbe C_0 homologue, le genre de cette dernière est $p(\pi - 1) + 1$. Tel est aussi le genre des courbes C. La surface F est donc d'ordre pn et ses sections hyperplans C ont le genre $p(\pi - 1) + 1$.

Les courbes du système $|C|$ sont échangées entre elles par la transformation T. Par conséquent, celle-ci est déterminée sur F par une homographie cyclique de l'espace S_R ; nous désignerons encore par T cette homographie.

L'homographie T étant cyclique est générale; elle possède au plus p axes (espaces linéaires dont tous les points sont unis). Si les axes de T sont en nombre inférieur à p, observons que pour certaines valeurs d'un entier λ positif, suffisamment grandes, il correspond à T, dans l'espace linéaire dont les hyperplans représentent projectivement les hypersurfaces d'ordre λ de S_R, une homographie cyclique ayant p axes. Il suffira donc, dans les raisonnements précédents, de remplacer les systèmes linéaires $|C_0|$, $|C|$ respectivement par $|\lambda C_0|$, $|\lambda C|$, pour obtenir p axes pour l'homographie T. C'est ce que nous supposons fait.

Cela étant, désignons par $S^{(0)}$, $S^{(1)}$ ..., $S^{(p-1)}$ les axes de l'homographie T, par r, r_1, r_2, ..., r_{p-1} les dimensions respectives de ces espaces linéaires. Les hyperplans de S_R, passant par $p - 1$ de ces axes, sont unis pour l'homographie T et découpent sur F les courbes C transformées en elles-mêmes par T. Il y a donc, sur F, p systèmes linéaires (partiels) de courbes C composés au moyen de l'involution I_p; l'un de ces systèmes est $|C_0|$. Nous désignerons par Σ_i le système (linéaire) d'hyperplans passant par les axes $S^{(0)}, S^{(1)}, \ldots, S^{(i-1)}, S^{(i+1)}, \ldots, S^{(p-1)}$ et nous supposerons que les hyperplans de Σ_0 découpent les courbes C_0 sur F.

Le système $|C_0|$ étant dépourvu de points-base, les axes $S^{(1)}, \ldots, S^{(p-1)}$ ne peuvent rencontrer la surface F. Les points unis de I_p sont par suite les points communs à F et à l'espace $S^{(0)}$. Nous supposerons ces points simples pour la surface F, ce qui n'est pas une restriction.

2. Soit P un point uni de I_p. Le plan ϖ, tangent en P à la surface F, est uni pour l'homographie T. Le plan ϖ ne peut avoir que le point P en commun avec l'axe $S^{(0)}$, car autrement les courbes C_0 passant par P auraient un point simple en P et sur chacune de ces courbes existerait une involution d'ordre p n'ayant qu'un point uni, ce qui est impossible.

Deux cas peuvent se présenter :

1° L'homographie T détermine, dans le plan, une homologie dont le centre est nécessairement le point P. Le plan ϖ rencontre alors l'un des axes $S^{(1)}, \ldots, S^{(p-1)}$ suivant une droite qui est l'axe de l'homologie. Le point P est un point uni parfait de I_p.

2° L'homographie T détermine, dans le plan ϖ, une homographie non homologique h. Le plan ϖ rencontre en un point deux des axes $S^{(1)}, \ldots, S^{(p-1)}$. Supposons, pour fixer les idées, que ϖ rencontre l'axe $S^{(1)}$ en un point P_1' et l'axe $S^{(2)}$ en un point P_2'. Les trois points unis de l'homographie h sont P, P_1', P_2'. Le point P est un point uni non parfait que nous nous proposons d'étudier.

3. Soit donc P un point uni non parfait de I_p; il lui correspond un point de diramation Π sur la surface Φ.

Les hyperplans de Σ_0 passant par C contiennent le plan ϖ et découpent sur F des courbes C_0 ayant un point double au moins en P ; nous désignerons ces courbes par C_1. Ce sont les courbes C_0 assujetties à la seule condition de passer par P.

Si les courbes C_1 ont une tangente variable en P, elles en ont nécessairement p, puisque T échange entre elles les droites de ϖ passant par P. D'autre part, nous avons montré [1] qu'il existe, dans $|C_0|$, un système linéaire de courbes ayant en P un point multiple d'ordre p, les tangentes en ce point étant variables. Si donc les courbes C_1 ont une tangente variable en P, ce point est multiple d'ordre p pour ces courbes et celles-ci ont p tangentes variables en ce point. Désignons par Γ_1 les sections hyperplanes de Φ correspondant aux courbes C_1 ; ce sont les sections de Φ par les hyperplans passant par Π. Le système $|C_1|$ a le degré $pn - p^2$, le genre $p(\pi - 1) + 1 - \frac{1}{2}p(p-1)$ et la dimension $r - 1$. Par conséquent, le système $|\Gamma_1|$ a le degré $n - p$, le genre $\pi - \frac{1}{2}(p - 1)$ et la dimension $r - 1$. Le point Π est donc multiple d'ordre p pour la surface Φ. D'autre part, une courbe C_1 possède un seul groupe de I_p infiniment voisin de P ; donc les courbes Γ_1 ont en Π un point multiple d'ordre p, à tangentes confondues, auquel est infiniment voisin un point simple nécessairement variable, puisque $|\Gamma_1|$ a la dimension $r - 1$. Mais cela est impossible [2]; donc les courbes C_1 ont en P les tangentes fixes PP'_1, PP'_2.

Cela étant, désignons par C_2 les courbes C_1 assujetties à avoir en P une tangente distincte de PP'_1, PP'_2; elles forment un système linéaire $|C_2|$ de dimension $r - 2$. Les courbes C_2 ont

(1) Recherches... (*loc. cit.*).

(2) D'ailleurs, un point multiple d'ordre p d'une surface abaisse le genre des sections hyperplanes de p-1 unités au moins.

en P une multiplicité supérieure à celle des courbes C_1 ; si elles ont des tangentes variables en P, elles ont en ce point la multiplicité p. Si les courbes C_2 ont en P des tangentes fixes, confondues avec PP'_1, PP'_2, désignons par C_3 les courbes C_2 assujetties à avoir en P une tangente distincte de PP'_1, PP'_2. Le système linéaire $|C_3|$ formé par ces courbes a la dimension $r - 3$. Et ainsi de suite. Nous parviendrons finalement à un système $|C_\nu|$ dont les courbes ont en P la multiplicité p et les tangentes variables. Nous aurons ainsi construit, sur F, ν systèmes linéaires, de dimensions $r - 1$, $r - 2, \ldots, r - \nu$,

$$|C_1|, |C_2|, \ldots, |C_\nu|$$

dont les $\nu - 1$ premiers ont en P des tangentes fixes, confondues avec PP'_1, PP'_2. Si nous désignons par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\nu-1}$ les multiplicités des courbes $C_1, C_2, \ldots, C_{\nu-1}$ en P, nous aurons

$$1 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{\nu-1} < p.$$

Rapportons projectivement les courbes C_1 aux hyperplans d'un espace linéaire S_{r-1} à $r - 1$ dimensions. A la surface F correspond une surface Φ_1 image de l'involution I_p. Il est clair que Φ_1 est projectivement identique à la surface obtenue en projetant la surface Φ du point Π sur un hyperplan de S_r ne passant pas par ce point. Nous désignerons par Γ_1 les sections hyperplanes de Φ_1. Aux courbes C_2 correspondent les sections de Φ_1 par les hyperplans passant par un point Π_1. Comme le degré de $|C_2|$ est inférieur à celui de $|C_1|$, le point Π_1 appartient à la surface Φ_1.

D'une manière générale, en rapportant projectivement les courbes C_i aux hyperplans d'un espace S_{r-i} à $r - i$ dimensions, on obtient une surface Φ_i, image de I_p, dont nous désignerons les sections hyperplanes par Γ_i. Aux courbes C_{i+1} correspondent les sections de Φ_i par les hyperplans passant par un point Π_i appartenant à cette surface ($i = 1, 2, \ldots, \nu$). La surface Φ_i est projectivement identique à la projection de la surface Φ_{i-1} à partir du point Π_{i-1} sur un hyperplan de S_{-1} ne contenant pas ce point.

4. Une courbe C_1 ayant en P la multiplicité $\alpha_1 < p$, ce point est l'origine d'un certain nombre de branches de cette courbe. Ces branches ont pour tangentes l'une des droites PP'_1, PP'_2 et leur nombre est au plus égal à α_1 et, par suite, inférieur à p. Considérons une transformée birationnelle $\overline{C}_1$ de la courbe C_1 dépourvue de points multiples. La courbe $\overline{C}_1$ est transformée en elle-même par une transformation birationnelle $\overline{T}$, correspondant à T, et le nombre de points de $\overline{C}_1$ du groupe uni pour $\overline{T}$ est égal au nombre de branches de C_1 d'origine P. Comme ce nombre est inférieur à p et que p est premier, $\overline{T}$ ne peut échanger entre eux deux points du groupe en question. Il en résulte que sur une courbe C_1, il y a un point uni de I_p, infiniment voisin de P, sur chaque branche de cette courbe d'origine P. Par suite les courbes Γ passant par Π ont en ce point une multiplicité au moins égale au nombre de branches d'une courbe C_1 d'origine P. Ce nombre est de plus égal au nombre de branches d'origine Π d'une courbe Γ passant par ce point.

Observons que le système des courbes Γ passant par Π a la dimension $r - 1$ et que par suite ces courbes ont en Π des tangentes variables. Par suite l'ordre du cône tangent à la surface Φ au point Π est égal au nombre de branches des courbes C_1 d'origine P, mais certaines parties de ce cône peuvent être multiples et ces parties ne sont comptées qu'une fois chacune dans l'évaluation précédente.

5. Soit S'_{R-1} un hyperplan de Σ_0 ne contenant pas P. Projetons la surface F de P sur cet hyperplan. Nous obtenons une surface F', d'ordre $pn - 1$, transformée en elle-même par l'homographie T. Celle-ci engendre sur F' une involution I'_p, projection de I_p et dont les surfaces $\Phi, \Phi_1, \ldots, \Phi_\nu$ sont donc des images.

La surface F' passe par les points P'_1, P'_2 qui sont des points unis de I'_p. Elle contient également la droite $P'_1 P'_2$ qui est simple pour la surface. Aux courbes C_1, $C_2, \ldots$, $C'_{\nu-1}$ correspondent sur F' des courbes que nous désignerons par C'_1, C'_2, $\ldots$, $C'_{\nu-1}$ et qui ne rencontrent pas la droite $P'_1 P'_2$ en dehors de P'_1, P'_2. Aux courbes C_ν correspondent les courbes C'_ν rencontrant $P'_1 P'_2$ en p points variables, formant des groupes de I'_p.

Désignons par ϖ'_1 le plan tangent à F' au point P'_1. Ce plan est uni pour l'homographie T et celle-ci détermine dans ce plan soit une homologie de centre P'_1, soit une homographie dont P'_1 est un point uni, sans que les droites du plan passant sur P'_1 soient unies.

Dans le premier cas, le plan ϖ'_1, qui contient la droite $P'_1 P'_2$, rencontre l'axe $S^{(2)}$ suivant une droite, passant par P'_2, qui est l'axe de l'homologie. P'_1 est alors un point uni parfait de l'involution I'_p.

Examinons le second cas ; l'homographie h' déterminée par T dans le plan ϖ'_1 peut être une homologie de centre P'_2 et dont l'axe passe par P'_1 et appartient donc à l'axe $S^{(1)}$. Ce cas ne peut se présenter. Les plans Σ_1 découpent sur F' des courbes d'un certain genre X, sur lesquelles existe une involution d'ordre p, cyclique, ayant un certain nombre δ de points unis. Si x est le genre des courbes images de ces involutions, on a, par la formule de Zeuthen,

$$2p(x-1) + \delta(p-1) = 2(X-1).$$

Les hyperplans de Σ_1 passant par P'_1 découpent sur F' des courbes ayant en P'_1 un point simple et par suite de genre X également. On a donc

$$2p(x'-1) + (\delta+1)(p-1) = 2(X-1);$$

d'où

$$2p(x'-x) + p - 1 = 0;$$

ce qui est impossible.

On en conclut que l'homographie h' est non homologique; elle possède comme points unis les points P'_1, P'_2 et un troisième point appartenant à l'un des axes de T, distinct de $S^{(1)}$, $S^{(2)}$. Le point P'_1 est un point uni non parfait de I'_p.

On peut faire les mêmes raisonnements au sujet du plan tangent ϖ'_2 à la surface F' en P'_2, Si l'on tient compte du fait que les points de la droite $P'_1 P'_2$ représentent les points de F infiniment voisins de P et, en particulier, que P'_1, P'_2 représentent les points infiniment voisins de P unis pour l'involution I_p, on est conduit à classer les points unis non parfaits de l'involution I_p en trois catégories:

1° Points unis auxquels sont infiniment voisins deux points parfaits;

2° Points unis auxquels sont infiniment voisins deux points unis dont l'un est parfait et l'autre non parfait;

3° Points unis auxquels sont infiniment voisins deux points unis non parfaits.

6. — Le système $|C_\nu|$ est de degré $pn - p^2$ et de genre $p(\pi - 1) + 1 - \frac{1}{2}p(p-1)$; par suite la surface Φ_ν est d'ordre $n - p$ et ses sections hyperplanes Γ_ν ont le genre $\pi - \frac{1}{2}(p-1)$. Aux groupes de I_p formés de points infiniment voisins de P correspondent sur Φ_ν les points d'une droite, car toute courbe C_ν contient un et un seul de ces groupes. Cette droite est nécessairement simple pour Φ_ν, car deux courbes C_ν ayant même tangentes en P se rencontrent encore en $np - p^2 - p$ points et par suite les courbes Γ_ν correspondantes se rencontrent encore en $n - p - 1$ points en dehors du point de la droite en question qu'elles ont en commun. Nous désignerons cette droite par p_ν.

Parmi les courbes C_ν se trouvent celles qui ont p tangentes confondues avec PP'_1; elles forment un système linéaire de dimension $r - \nu - 1$ et de degré $np - 2p^2$. Il leur correspond des sections hyperplanes de la surface Φ_ν, les hyperplans de ces sections passant par un point $P_{\nu 1}$ de la droite p_ν. Ces sections hyperplanes formant un système linéaire $\infty^{r-\nu-1}$ de degré $n - 2p$, le point $P_{\nu 1}$ est multiple d'ordre p pour la surface Φ_ν. En partant des courbes C_ν ayant p tangentes confondues avec PP'_2, on obtient de même un second point $P_{\nu 2}$ de $p_{\nu 1}$, multiple d'ordre p pour la surface Φ_ν.

On peut préciser davantage la nature des points $P_{\nu 1}$, $P_{\nu 2}$. Reprenons les courbes C_ν ayant leurs p tangentes confondues avec PP'_1 . A ces courbes correspondent sur F' des courbes C'_ν ayant en P'_1 un point multiple d'ordre p à tangentes variables. Si P'_1 est un point uni parfait de I'_p, le point $P_{\nu 1}$ est un point multiple d'ordre p, conique, de Φ_ν. Si au contraire P'_1 est un point uni non parfait de I'_p, les courbes Γ_ν passant par $P_{\nu 1}$ ont leurs p tangentes confondues en ce point et un point simple infiniment voisin de $P_{\nu 1}$. Ce point est multiple d'ordre p, uniplanaire, pour Φ_ν. D'après la formule de Zeuthen, le genre des courbes Γ_ν passant par $P_{\nu 1}$ est d'ailleurs abaissé de $p - 1$ unités.

Considérons la surface $\Phi_{\nu-1}$. Aux points de cette surface, infiniment voisins du point $\Pi_{\nu-1}$, correspondent sur Φ_ν les points de la droite p_ν ; par suite, si $\Pi_{\nu-1}$ n'est pas un point simple de $\Phi_{\nu-1}$, c'est un point uniplanaire. Plaçons-nous dans cette dernière hypothèse ; aux points $P_{\nu 1}$, $P_{\nu 2}$ de la surface Φ_ν correspondent deux points de $\Phi_{\nu-1}$, infiniment voisins de $\Pi_{\nu-1}$, multiple d'ordre p pour cette surface. Il en résulte que $\Pi_{\nu-1}$ est au moins multiple d'ordre p pour $\Phi_{\nu-1}$. Mais alors $\Phi_{\nu-1}$ est d'ordre au moins égal à $n - p + p = n$ et est donc précisément d'ordre n, $\Pi_{\nu-1}$ étant exactement multiple d'ordre p. On en conclut que $\Phi_{\nu-1}$ coïncide avec Φ et que l'on a $\nu = 1$. Observons que les sections hyperplanes de Φ, passant par Π, ont le genre abaissé de $\frac{1}{2}(p-1)$ unités, ce qui est incompatible avec le fait que Π est un point uniplanaire multiple d'ordre p. On conclut de tout ceci que le point $\Pi_{\nu-1}$ est simple pour la surface $\Phi_{\nu-1}$.

7. — Nous venons de voir que la surface $\Phi_{\nu-1}$ a en $\Pi_{\nu-1}$ un point simple; par suite cette surface est d'ordre $n - p + 1$.

Aux sections de la surface Φ_ν par les hyperplans passant par $P_{\nu 1}$ correspondent les sections de la surface $\Phi_{\nu-1}$ par les hyperplans passant par $\Pi_{\nu-1}$ et formant un système linéaire de dimension $r - \nu - 1$. Par suite, ces hyperplans passent par une droite tracée sur $\Phi_{\nu-1}$ et dont les points correspondent aux points de Φ_ν infiniment voisins de $P_{\nu 1}$. Nous désignerons cette droite par $p'_{\nu-1}$. Elle est, comme le point $\Pi_{\nu-1}$ qu'elle contient, simple pour la surface $\Phi_{\nu-1}$.

D'après les raisonnements faits plus haut, les points infiniment voisins de $P_{\nu 1}$ sur Φ_ν correspondent aux points de F' infiniment voisins de P'_1; donc les points de $p'_{\nu-1}$ correspondent à ces mêmes points. Il y a lieu de distinguer deux cas.

Si P'_1 est un point uni parfait de I'_p, il y a une correspondance biunivoque entre les points de F' infiniment voisins de P'_1 et les points de $p'_{\nu 1}$. Les sections de la surface $\Phi_{\nu-1}$ par les hyperplans contenant cette droite sont des courbes d'ordre $n-p$ coupant $p'_{\nu 1}$ en p points variables.

Si P'_1 est un point uni non parfait de I'_p, les points de la droite $p'_{\nu 1}$ représentent les groupes de I'_p formés de points infiniment voisins de P'_1 et les sections de la surface $\Phi_{\nu-1}$ par les hyperplans contenant $p'_{\nu-1}$ sont des courbes d'ordre $n-p$ ayant un contact d'ordre $p-1$ avec cette droite en un point.

Il existe de même une droite $p''_{\nu-1}$, simple pour $\Phi_{\nu-1}$, passant par $\Pi_{\nu-1}$, correspondant au point P'_2 et au sujet de laquelle on peut faire les mêmes remarques que pour $p'_{\nu-1}$.

Envisageons une section hyperplane $\Gamma_{\nu-1}$ de $\Phi_{\nu-1}$ ne passant pas par le point $\Pi_{\nu-1}$. Il lui correspond sur F une courbe $C_{\nu-1}$ et sur F' une courbe $C'_{\nu-1}$ qui a des points simples en P', P'_2. Cette courbe $C'_{\nu-1}$ ne peut rencontrer la droite $P'_1 P'_2$ en dehors de P'_1, P'_2; donc elle a avec cette droite, en ces points, des contacts équivalents ensemble à $\alpha_{\nu-1}$ points d'intersection.

On voit que par suite les courbes $C_{\nu-1}$ n'ont que deux branches d'origine P, l'une ayant pour tangente la droite PP'_1, l'autre la droite PP'_2.

Les courbes $\Gamma_{\nu-1}$ ont le même genre, $\pi - \frac{1}{2}(p-1)$, que les courbes Γ_ν, puisque le point $\Pi_{\nu-1}$ est simple pour $\Phi_{\nu-1}$.

Observons que deux courbes $C_{\nu-1}$ ont $\alpha^2_{\nu-1} + \alpha_{\nu-1}$ points d'intersection absorbés en P et que le système $|C_{\nu-1}|$ a par suite le degré $pn - \alpha_{\nu-1} - \alpha_{\nu-1}$. D'autre part, $\Phi_{\nu-1}$ est d'ordre $n-p+1$; on a donc

$$\alpha^2_{\nu-1} + \alpha_{\nu-1} = p^2 - p;$$

d'où $\alpha_{\nu-1} = p - 1$. Le genre des courbes $C_{\nu-1}$ est donc $p(\pi - 1) + 1 - \frac{1}{2}(p-1)(p-2)$, et comme l'involution d'ordre p appartenant à une de ces courbes possède deux points unis infiniment voisins de P, la formule de Zeuthen appliquée à la correspondance $(1, p)$ entre une courbe $\Gamma_{\nu-1}$ et la courbe $C_{\nu-1}$ homologue donne une vérification des résultats précédents.

8. Considérons la surface $\Phi_{\nu-2}$. Au domaine du point $\Pi_{\nu-2}$ correspond sur la surface $\Phi_{\nu-1}$ l'ensemble du point $\Pi_{\nu-1}$ et des droites $p'_{\nu-1}$, $p''_{\nu-1}$. Deux cas peuvent se présenter :

1° Le point $\Pi_{\nu-2}$ est double biplanaire ordinaire pour la surface $\Phi_{\nu-2}$. Aux points de cette surface infiniment voisins de $\Pi_{\nu-2}$ dans un des plans tangents correspondent sur $\Phi_{\nu-1}$ les points de l'une des droites $p'_{\nu-1}$, $p''_{\nu-1}$. La surface $\Phi_{\nu-2}$ est d'ordre $n-p+3$ et ses sections hyperplanes $\Gamma_{\nu-3}$ sont de genre $\pi - \frac{1}{2}(p-3)$.

2° Le point $\Pi_{\nu-2}$ est simple pour la surface $\Pi_{\nu-2}$. Alors au point $\Pi_{\nu-2}$ correspond, sur la surface $\Phi_{\nu-1}$, une des droites $p'_{\nu-1}$, $p''_{\nu-2}$, par exemple la seconde. Il doit exister, sur la surface $\Phi_{\nu-2}$, une courbe d'ordre λ, passant $\lambda - 1$ fois par $\Pi_{\nu-2}$, dont $p'_{\nu-1}$ est la projection. Nous désignerons cette courbe par $p'_{\nu-2}$. La courbe $p'_{\nu-2}$ est plane et si $\lambda > 2$, son plan coïncide avec le plan tangent à $\Phi_{\nu-2}$ en $\Pi_{\nu-2}$. Mais comme $\Phi_{\nu-}$ est projectivement identique à une projection de $\Phi_{\nu-2}$ à partir de $\Pi_{\nu-2}$ sur un hyperplan ne passant par ce point, les droites $p'_{\nu-1}$, $p'_{\nu-1}$ coïncideraient, ce qui est absurde. Il en résulte que $\lambda = 2$ et que la courbe $p'_{\nu-2}$ est une conique. La surface $\Phi_{\nu-2}$ est d'ordre $n - p + 2$ et ses sections hyperplanes $\Gamma_{\nu-2}$ ont le genre $\pi - \frac{1}{2}(p-1)$.

9. Retournons à la surface F. Nous allons tout d'abord montrer que les courbes C_i ($i = 1, 2, \dots \nu - 2$) ont effectivement comme tangente en P les deux droites PP'_1, PP'_2.

Supposons, par exemple, que les courbes C_i puissent n'avoir que PP'_1 comme tangentes en P. Considérons les courbes $C^{(1)}$ découpées sur F par les hyperplans de Σ_1. Ces hyperplans coupent le plan tangent ϖ à F en P suivant la droite PP_2 et les courbes $C^{(1)}$ ne peuvent donc avoir que cette droite comme tangente P. Aux courbes $C^{(1)}$ correspondent sur la surface F' les courbes découpées par les hyperplans de Σ_1; ceux-ci ne peuvent contenir la droite $P'_1 P'_2$ et par suite les courbes envisagées ont l'ordre $pn - 1$. Il en résulte que les courbes $C^{(1)}$ ont un point simple en P.

Une courbe C_i et une courbe $C^{(1)}$ ont en commun des groupes de l'involution I_p; par suite le nombre des intersections de ces courbes absorbées en P doit être multiple de p. Or, ce nombre est α_i et inférieur à p. Nous arrivons donc à une absurdité et les courbes C_i ont, en P, un certain nombre de tangentes confondues avec la droite PP'_1, les autres avec la droite PP'_2.

10. Examinons le cas où le point P'_1 est uni parfait pour I'_p. Soit α'_{i1} la multiplicité de ce point pour les courbes C'_i. Ces courbes sont découpées sur F' par des hyperplans de Σ_0 passant par P et contenant par suite le plan tangent à F' en P'_1, puisque celui-ci coupe l'axe $S^{(2)}$ suivant une droite. Les $\alpha'_{\nu 1}$ tangentes en P'_1 aux courbes C'_i sont par suite variables.

On peut d'ailleurs remarquer qu'aux points de F', infiniment voisins de P'_1, qui sont des points unis de I'_p, ne peut correspondre un même point fixe de la surface Φ_i, sans quoi on aurait $\alpha'_{i1} = o$, ce qui est impossible. A ces points correspondent donc ceux d'une courbe tracée sur Φ_i et les points de rencontre des courbes Γ_i avec cette courbe sont donc variables. Cette courbe est d'ailleurs d'ordre α'_{i1}.

Désignons par $C^{(2)}$ les courbes découpées sur F par les hyperplans de Σ_2, par $C'^{(2)}$ les courbes qui leur correspondent sur F'. Comme on l'a vu plus haut pour les courbes $C^{(1)}$, les courbes $C^{(2)}$ passent simplement par P en y touchant la droite PP'_1. Les hyperplans de Σ_2 rencontrent le plan ϖ'_1 tangent à F' en P'_1 suivant une droite variable passant par P'_1; donc les courbes $C'^{(2)}$ ont en P'_1 un point simple à tangente variable. Il en résulte que, les courbes C_i et $C^{(2)}$ se coupant suivant des groupes de I_p, le nombre des points d'intersection de ces courbes absorbés en P, soit $\alpha_i + \alpha'_{i1}$, doit être multiple de p. On a donc $\alpha'_{i1} = p - \alpha_i$.

11. Nous allons étudier le cas où les points P'_1, P'_2 sont tous deux des points unis parfaits de l'involution I'_p.

Considérons les courbes $C_{\nu-2}$ sur F'. Ces courbes ne peuvent rencontrer la droite $P'_1 P'_2$ en dehors de P'_1, P'_2. D'autre part, ces points sont tous deux multiples d'ordre $p - \alpha_{\nu-2}$ pour les courbes $C'_{\nu-2}$ et celles-ci ont des tangentes variables en ces points. On a donc

$$2(p - \alpha_{\nu-2}) = \alpha_{\nu-2}.$$

D'ailleurs $\alpha_{\nu-2} < \alpha_{\nu-1}$ et puisque $\alpha_{\nu-1} = p - 1$, $\alpha_{\nu-2} < p - 1$. On en déduit $p = 3$. Nous trouvons ainsi le résultat que nous avons obtenu récemment par une voie un peu différente.

12. Etudions maintenant le cas où l'on a pour I'_p un point uni parfait P'_1 et un point uni non parfait P'_2. On a alors $p > 3$.

Les branches des courbes C_i, d'origine P, tangentes à la droite PP'_1, sont linéaires, puisqu'elles ne peuvent être projetées de P sur F' suivant des branches tangentes à la droite $P'_1 P'_2$ en P'_1. Il en résulte que les courbes $C_{\nu-2}$ ont une tangente confondue avec PP'_1 et $p - 2$ tangentes confondues avec PP'_2.

Sur la surface Φ_i se trouve une courbe p'_i d'ordre $p - \alpha_i$, qui représente les points de F' infiniment voisins de P'_1. A cette courbe p'_i correspond, sur la surface Φ_{i+1}, la courbe p'_{i+1}, d'ordre $p - \alpha_{i+1}$. Puisque Φ_{i+1} est projectivement identique à une projection de Φ_i à partir de Π_i sur un hyperplan ne contenant pas ce point, la courbe p'_i passe $\alpha_{i+1} - \alpha_i$ fois par le point Π_i. Appliquons cette remarque pour $i = \nu - 2$. On voit immédiatement que $\Pi_{\nu-2}$ doit être un point simple de $\Phi_{\nu-2}$ et que la courbe $p'_{\nu-2}$ est une conique (cfr. n° 8). On a donc $\alpha_{\nu-2} = p - 2$. Les courbes $C_{\nu-2}$ ont deux de leurs tangentes en P confondues avec PP'_1 et les $p - 4$ autres tangentes en ce point confondues avec PP'_2.

Les courbes $C'_{\nu-1}$ ont en P'_2 un point simple et un contact d'ordre $p - 3$ avec la droite $P'_1 P'_2$ en ce point. Les courbes $C'_{\nu-2}$ rencontrent $P'_1 P'_2$ en $p - 4$ points confondus en P'_2.

Les courbes C'_i $(i < \nu - 2)$ rencontrent la droite $P'_1 P'_2$ en α_i points. P'_1 étant multiple d'ordre $p - \alpha_i$, à tangentes variables pour ces courbes, celles-ci ont $\alpha_i - (p - \alpha_i) = 2\alpha_i - p$ points d'intersection avec $P'_1 P'_2$ confondus en P'_2. Il en résulte que le point P absorbe

$$\alpha_i(p - 1) + (p - \alpha_i) + 2\alpha_i - p = p\alpha_i$$

points d'intersection d'une courbe C_i et d'une courbe $C_{\nu-1}$. Ces courbes se rencontrent donc en $p(n - \alpha_i)$ points variables, formant $n - \alpha_i$ groupes de I_p. Aux courbes C_i, $C_{\nu-1}$ correspondent des sections hyperplanes de la surface Φ_i; donc celle-ci est d'ordre $n - \alpha_i$. On en conclut que le point Π_i est multiple d'ordre $\alpha_{i+1} - \alpha_i$ pour Φ_i.

Sur la surface F', le système $|C'_i|$ a la dimension $r - i$ et ses courbes possèdent, en P'_1, un point multiple d'ordre $p - \alpha_i$, à tangentes variables. Comme on l'a fait remarquer plus haut, on peut choisir le système $|C|$ de manière que r soit aussi grand qu'on le veut; en particulier, on peut s'arranger de manière à avoir $r - i > p - \alpha_i$. Cela étant, on pourra toujours trouver quelque courbe C_i ayant en P'_1 $p - \alpha_i$ tangentes assignées arbitrairement. Il en résulte que sur la surface Φ_i, on pourra toujours trouver une section hyperplane passant par $p - \alpha_i$ points arbitrairement choisis sur la courbe p'_i. Cela exige que cette courbe appartienne à un espace linéaire ayant au moins $p - \alpha_i$ dimensions.

Considérons en particulier la surface $\Phi_{\nu-3}$ et la courbe $p'_{\nu-3}$. Celle-ci doit appartenir à un espace linéaire ayant au moins $p - \alpha_{\nu-3}$ dimensions. D'autre part, elle possède un point multiple d'ordre $p - \alpha_{\nu-3} - 2$ en $\Pi_{\nu-3}$; donc elle appartient à un espace linéaire à trois dimensions. On a donc $\alpha_{\nu-3} \geq p - 3$. Comme, d'autre part, $\alpha_{\nu-3} < \alpha_{\nu-2}$ ou $p - 2$, on a exactement $\alpha_{\nu-3} = p - 3$. La surface $\Phi_{\nu-3}$ est d'ordre $n - p + 3$; le point $\Pi_{\nu-3}$ est simple par cette surface et la courbe $p'_{\nu-3}$ est une cubique gauche passant par $\Pi_{\nu-3}$.

Le raisonnement précédent peut être appliqué successivement aux surfaces $\Phi_{\nu-4}, \Phi_{\nu-5}, \ldots, \Phi_1$ et donne

$$\alpha_{\nu-4} = p - 4, \quad \alpha_{\nu-5} = p - 5, \ldots, \alpha_1 = p - \nu + 1.$$

La surface Φ_i est d'ordre $n - p + i$; le point Π_i est simple pour cette surface; la courbe p'_i est une courbe rationnelle normale d'ordre i, passant par Π_i; les sections hyperplanes Γ_i de Φ_i ont le genre $\pi - \frac{1}{2}(p - 1)$.

Les courbes C_1 ont en P la multiplicité $p - \nu + 1$, $\nu - 1$ tangentes confondues avec PP'_1 et $p - 2(\nu - 1)$ tangentes confondues avec PP'_2. Pour la surface Φ, le point Π est donc multiple d'ordre $p - \nu + 1$ et le cône tangent à la surface en ce point comprend un cône d'ordre $\nu - 1$ qui correspond à la courbe p'_1, d'ordre $\nu - 1$, tracée sur Φ_1. L'autre partie du cône tangent à Φ en Π peut être multiple, mais alors, il lui correspond nécessairement sur Φ_1 une courbe simple, puisque cette courbe doit passer par Π_1, qui est simple pour la surface. Il en résulte que le point Π abaisse le genre des sections hyperplanes de Φ qui le contiennent de $p - \nu$ unités. Or, ces sections hyperplanes correspondent point par point à celles de Φ_1, et l'on a donc

$$\pi - p + \nu = \pi - \frac{1}{2}(p - 1).$$

Posons $p = 2n + 1$; nous avons $\nu = n + 1$. Le point Π est donc multiple d'ordre $n + 1$ pour la surface Φ, le cône tangent en ce point étant formé d'un cône d'ordre n et d'un plan, n'ayant qu'une droite en commun avec le cône.

On peut observer que les courbes C_i n'ont jamais qu'une branche d'origine P tangente à la droite PP'_2.

Liége, le 26 février 1930.

Marcel HAYEZ, imprimeur, rue de Louvain, 112, Bruxelles.