Sur les surfaces représentant les involutions planes engendrées par des homographies cycliques.

Dans un travail récent (*), nous avons entrepris l'étude des surfaces représentant les involutions engendrées par des homographies cycliques du plan. Le problème que nous nous sommes posé consiste en ceci : Une homographie non homologique du plan, cyclique, dont la période est un nombre premier p, posséde trois points unis. Elle engendre une involution d'ordre p. On peut aisément construire une surface Φ d'ordre p, image de cette involution I_p, c'est-à-dire une surface dont les points correspondent birationnellement aux groupes de l'involution I_p. Aux points unis correspondent trois points de diramation de la surface Φ. Il s'agit de déterminer la singularité de cette surface en ces points. Dans le travail cité plus haut, nous avions résolu cette question dans deux cas particuliers. Dans ce nouveau travail, nous exposons une méthode qui permet de déterminer la singularité de la surface Φ en un point de diramation dans tous les cas possibles.

Aux sections de la surface Φ par des hyperplans passant par un point de diramation O' correspondent des

---

(*) Sur les homographies planes cycliques. (*Mémoires de la Société royale des Sciences de Liége,* t. XV, 1930, pp. 1-26.)

courbes C_1 passant par le point uni correspondant O, transformées en elles-mêmes par l'homographie considérée. Des développements qui suivent, il résulte qu'à toute branche d'une courbe C_1 correspond une branche de la section hyperplane correspondante de Φ. Le cône tangent à Φ en O' peut dégénérer en deux, trois ou quatre cônes, certains de ceux-ci pouvant d'ailleurs être comptés un certain nombre de fois, dans des conditions que nous indiquons. Nous terminons cette note par un exemple.

1. — Soit I_p l'involution d'ordre premier $p > 2$ engendrée dans un plan ϖ par l'homographie

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^\alpha x_3, \qquad (1)$$

où ε est une racine primitive d'ordre p de l'unité et α un nombre entier supérieur à l'unité et inférieur à p. Les courbes d'ordre p, transformées en elles-mêmes par l'homographie (1) se distribuent en p systèmes linéaires $|C|$, $|C'|$, ..., $|C^{(p-1)}|$ dont un seul, pour fixer les idées $|C|$, est dépourvu de point-base. Soient r, r_1, r_2, ..., r_{p-1} les dimensions respectives de ces systèmes linéaires.

Considérons une courbe irréductible $\overline{C}$, du système $|C|$, ne passant pas par les points unis de l'homographie (1), c'est-à-dire par les sommets du triangle de référence. Sur cette courbe $\overline{C}$, l'homographie (1) engendre une involution d'ordre p, privée de points unis, dont nous désignerons par Γ une courbe image. La courbe $\overline{C}$ a le genre égal à $\frac{1}{2}(p-1)(p-2)$, donc, en appliquant la formule de Zeuthen, le genre de la courbe Γ est égal à $\frac{1}{2}(p-3)+1$. Les systèmes linéaires $|C|$, $|C'|$, ..., $|C^{(p-1)}|$ découpent sur $\overline{C}$ des séries linéaires d'ordre p^2, composées au moyen de I_p, dont les dimensions sont respectivement $r-1$,

$r_1, \ldots, r_{p-1}$. A ces séries correspondent, sur Γ, des séries complètes de mêmes dimensions, d'ordre p et par suite non spéciales. D'après le théorème de Riemann-Roch, on a par suite

$$r - 1 = r_1 = \cdots = r_{p-1} = \frac{1}{2}(p+1).$$

Posons $p = 2n + 1$. Le système $|C|$ a la dimension $r = n + 2$ et les systèmes $|C'|, |C''|, \ldots, |C^{(p-1)}|$ la dimension $r_1 = \cdots = r_{p-1} = n + 1$.

En rapportant projectivement les courbes C de $|C|$ aux hyperplans d'un espace linéaire S_{n+2} à $n + 2$ dimensions, on obtiendra une surface rationnelle normale Φ, d'ordre p, image de l'involution I_p, possédant trois points de diramation qui correspondent respectivement aux points unis O_1 $(x_2 = x_3 = 0)$, O_2 $(x_3 = x_1 = 0)$, O_3 $(x_1 = x_2 = 0)$ de I_p.

2. — Si nous posons $\eta = \varepsilon^\alpha$, l'homographie (1) peut également s'écrire

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = x_1 : \eta^\beta x_2 : \eta x_3,$$

β étant le plus petit nombre tel que

$$\alpha\beta \equiv 1, \qquad (\text{mod. } p).$$

Voyons tout d'abord dans quelles conditions on peut avoir $\alpha = \beta$. Alors $\alpha^2 - 1$ est multiple de p et, puisque p est premier, il doit diviser $\alpha - 1$ ou $\alpha + 1$. Comme α est inférieur à p, on a nécessairement $\alpha = p - 1$. Nous avons étudié ce cas dans notre travail cité plus haut. Au point uni O_1 correspond, sur la surface Φ, un point de diramation qui est un point double biplanaire auquel sont infiniment voisins successifs $n - 1$ points doubles biplanaires dont le dernier est ordinaire. Ce cas se présente nécessairement pour $p = 3$.

Supposons $\alpha < p - 1$. Les restes de la division par p des nombres $\lambda\alpha - 1$ pour $\lambda = 1, 2, \ldots, p$ sont tous différents et par suite l'un d'eux est nul. On a donc $\beta < p$, car on ne peut avoir $\beta = p$. D'autre part, si $\beta = p - 1$, on a $\alpha = p - 1$. Donc, si $\alpha < p - 1$, on a $\beta < p - 1$.

On peut d'ailleurs obtenir la valeur de β par le procédé suivant : Posons

$$p = a\alpha + h, \qquad (h < \alpha).$$

Si $h = 1$, on a $\beta = p - a$. Si $h > 1$, comme p étant premier, α et h sont premiers entre eux, les restes de la division de $\alpha, 2\alpha, \ldots, (h-1)\alpha$ par h sont tous distincts et distincts de zéro. L'un d'eux est égal à l'unité. Supposons que l'on ait

$$b\alpha = ch + 1.$$

On a alors $\beta = ac + b$, d'où $bp = h\beta + a$.

3. — L'équation du système linéaire $|C|$ s'écrit

$$\Sigma\lambda_{ik}\, x_1^{i(\alpha-1)-(k-1)p} x_2^{kp-\alpha i} x_3^i = 0, \tag{2}$$

où k est un entier pouvant prendre les valeurs $0, 1, 2, \ldots, \alpha$ et i un entier satisfaisant, pour chaque valeur de k, à la double inégalité

$$(k-1)\frac{p}{\alpha - 1} \leq i \leq k\frac{p}{\alpha}. \tag{3}$$

Pour $k = 0$, i est nul et l'on obtient le terme $\lambda_{00}\, x_1^p$.

Appelons $|C_1|$ le système linéaire formé par les courbes C passant par O_1. Son équation s'obtiendra en posant $\lambda_{00} = 0$ dans l'équation (**2**). Nous avons montré que le terme contenant x_1 a la plus haute puissance, dans l'équation de $|C_1|$ est :

1° Si $\alpha < a + h + 1$,

$$\lambda_{a1} x_1^{a(\alpha-1)} x_2^h x_3^a; \qquad (k = 1,\ i = a).$$

2° Si $\alpha > a + h + 1$,

$$\lambda_{a\theta+\theta-1,\theta}x_1^{a(\alpha-1)+(\theta-1)(\alpha-a-h-1)}x_2^{\alpha-\theta(\alpha-h)}x_3^{a\theta+\theta-1},$$

obtenu pour $k = \theta$, $i = a\theta + \theta - 1$, θ étant un entier satisfaisant aux inégalités

$$(\theta - 1)\alpha \leq \theta h, \qquad (\theta + 1)h < \theta\alpha.$$

Pour $\theta = 1$, le second cas équivaut d'ailleurs au premier.

4. — Désignons par X_{ik} les coordonnées projectives homogènes des points de l'espace S_{n+2} contenant la surface Φ, i et k prenant les mêmes valeurs que plus haut. Les coordonnées des points de la surface Φ sont données par

$$\rho X_{ik} = x_1^{i(\alpha-1)-(k-1)p}x_2^{kp-\alpha i}x_3^{i}. \tag{4}$$

Si nous désignons par O_{ik} le point dont toutes les coordonnées sont nulles sauf X_{ik}, le point O_{00} sera le point de la surface Φ qui correspondra au point uni O_1 de l'involution I_p. Notre but est d'étudier la singularité de la surface Φ au point de diramation O_{00}.

A cet effet, projetons la surface Φ à partir du point O_{00} sur l'hyperplan $X_{00} = 0$; nous obtenons une surface Φ_1 dont les sections hyperplanes Γ_1 correspondent projectivement aux courbes du système $|C_1|$. Aux points de la surface Φ infiniment voisins des points O_{00} correspondront sur la surface Φ_1 les points d'une courbe intersection du cône tangent à Φ en O_{00} avec l'hyperplan $X_{00} = 0$. L'étude que nous avons en vue se ramène donc à celle de cette courbe.

Observons que si l'on effectue dans le plan ϖ une transformation birationnelle, le système $|C_1|$ est transformé en un système $|C_1'|$ composé au moyen de l'involution I_p' engendrée par l'homographie transformée de l'homographie (1). Les surfaces Φ et Φ_1 représentent également l'involution I'_p. Entre les systèmes $|C_1|$, $|C'_1|$, où les courbes sont considérées comme éléments, existe une homographie et par suite les courbes C'_1, Γ_1, se correspondent dans une homographie. En d'autres termes, si l'on rapportait projectivement les courbes de $|C'_1|$ aux sections des hyperplans de l'espace S_{n+2} par $X_{00} = 0$, on obtiendrait la surface Φ_1 ou une surface projectivement identique à Φ_1,

L'ordre de la surface Φ_1 est d'ailleurs égal à p, diminué de la multiplicité du point O_{00} pour la surface Φ.

5. — Supposons $\alpha < a + h + 1$ et reprenons les notations de notre note *sur les homographies planes cycliques* pour les points infiniment voisins de O_1. Le point $O_{12\ldots2}$, où figure $\alpha - 1$ fois l'indice deux, est un point uni parfait. Effectuons $\alpha - 1$ fois la transformation quadratique

$$x_1 : x_2 : x_3 = z_1^2 : z_1 z_2 : z_2 z_3, \tag{5}$$

c'est-à-dire la transformation

$$x_1 : x_2 : x_3 = z_1^\alpha : z_1^{\alpha-1} z_2 : z_2^{\alpha-1} z_3.$$

Au système $|C_1|$ correspond un système linéaire dont l'équation, débarrassée du facteur z_2^{p-a}, s'écrit

$$\Sigma \lambda_{ik} z_1^{(\alpha-k)p} z_2^{(k-1)p+a-i} z_3^i = 0, \tag{6}$$

dans laquelle $k = 1, 2, \ldots, \alpha$; i étant donné par l'inégalité (3).

A l'homographie (1) correspond l'homographie

$$z'_1 : z'_2 : z'_3 = z_1 : \varepsilon z_2 : \varepsilon z_3,$$

qui est une homologie de centre $z_2 = z_3 = 0$ et d'axe $z_1 = 0$. Le point $O_{12\ldots2}$ dont il a été question plus haut est précisément le point $z_2 = z_3 = 0$.

Le terme contenant z_1 à la plus haute puissance est donné par $k = 1$ et on voit que les courbes (6) ont en $z_2 = z_3 = 0$ un point multiple d'ordre a, dont les a tangentes variables sont données par

$$\lambda_{01} z_2^a + \lambda_{11} z_2^{a-1} z_3 + \cdots + \lambda_{a1} z_3^a = 0.$$

Les courbes C_1 ont en O_1 un point multiple d'ordre $a + h$ auquel sont infiniment voisins successifs, dans la direction de la tangente $x_3 = 0$, $\alpha - 1$ points multiples d'ordre a, dont le dernier est ordinaire (c'est-à-dire à tangentes distinctes). En d'autres termes, les courbes C_1 ont a branches linéaires d'origine O_1, tangentes à la droite $x_3 = 0$.

Les équations paramétriques de la surface Φ_1 peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} &X_{00} = 0, \\ &\rho X_{ik} = z_1^{(\alpha-k)p} z_2^{(k-1)p+a-i} z_3^i. \end{aligned} \tag{7}$$

Aux points infiniment voisins du point $z_2 = z_3 = 0$ correspondent, sur Φ_1, les points d'une courbe rationnelle d'ordre a, puisque les courbes (6) ont a tangentes variables en ce point. Les équations de cette courbe sont

$$\left.\begin{aligned} &\left\| \begin{matrix} X_{01} & X_{11} & \cdots & X_{a-1,1} \\ X_{11} & X_{21} & \cdots & X_{a1} \end{matrix} \right\| = 0, \\ &X_{00} = 0, \quad X_{i2} = X_{i3} = \cdots = X_{i\alpha} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Les points de cette courbe correspondent aux a branches des courbes C_1 d'origine O_1, tangentes à $x_3 = 0$ et par suite, le cône projetant cette courbe de O_{00} est tangent à la surface Φ en ce point.

Il existe naturellement un autre cône tangent à Φ en O_{00} et provenant des branches des courbes C_1, d'origine O_1, tangentes en ce point à $x_2 = 0$.

Lorsque $\alpha < \mathrm{a} + \mathrm{h} + 1$, *la surface* Φ *possède, au point de diramation correspondant à* O_1, *un point de multiplicité supérieure à* a *et en lequel le cône tangent à la surface contient comme partie un cône irréductible, rationnel, d'ordre* a.

On observera que l'hypothèse $\alpha < a + h + 1$ entraîne $\alpha \leq n + 1$.

6. — On peut naturellement répéter pour la tangente $x_2 = 0$ ce qui se fait pour la tangente $x_3 = 0$. Si l'on pose $p = a_1 \beta + h_1$, et si $\beta < a_1 + h_1 + 1$, la surface Φ possède, en O_{00}, un cône tangent irréductible d'ordre h.

Supposons en particulier que l'on ait $\alpha = h + 1$. Avec les notations du n° 2, on a $b = 1$, $c = 1$, $\beta = a + 1$ et $p = h\beta + a$. De plus, $\beta < a + h + 1$. Ces résultats sont encore valables pour $h = 1$; on trouve d'ailleurs sous cette hypothèse un cas qui a été étudié dans notre note citée plus haut.

D'après ce qui précède, on peut énoncer le théorème suivant :

Si $\alpha = \mathrm{h} + 1$, *la surface* Φ *possède, au point de diramation correspondant à* O_1, *un point multiple d'ordre* $\mathrm{a} + \mathrm{h}$ *en lequel le cône tangent est formé de deux parties irréductibles : un cône d'ordre* a *et un cône d'ordre* h, *rationnels.*

Effectuons, sur l'équation des courbes C_1, a fois la transformation quadratique

$$x_1 : x_2 : x_3 = z_1^2 : z_2 z_3 : z_1 z_3, \tag{9}$$

c'est-à-dire la transformation

$$x_1 : x_2 : x_3 = z_1^{a+1} : z_2 z_3^a : z_1^a z_3.$$

L'équation des courbes qui correspondent aux courbes C_1 est, après suppression du facteur $z_3^{a\alpha}$,

$$\Sigma \lambda_{ik} z_1^{[i-(k-1)(a+1)]p} z_2^{kp-\alpha i} z_3^{p(ak-1)-i(a\alpha-1)+h} = 0. \tag{10}$$

A l'homographie (1) correspond une homologie de centre $z_2 = z_3 = 0$ et d'axe $z_1 = 0$.

Les courbes (10) ont la multiplicité h en $z_2 = z_3 = 0$ et l'équation des tangentes en ce point est

$$\lambda_{a1} z_2^h + \lambda_{2a+1,2} z_2^{h-1} z_3 + \cdots + \lambda_{p,\alpha} z_3^h = 0.$$

En raisonnant comme dans le paragraphe précédent, on voit que le cône projetant de O_{00} la courbe

$$\left\| \begin{matrix} X_{a1} & X_{2a+1,2} \cdots X_{p-a-1,h} \\ X_{2a+1,2} & X_{3a+2,3} \cdots X_{p\alpha} \end{matrix} \right\| = 0,$$

appartenant à l'espace $O_{a1} O_{2a+1,2} \ldots O_{p\alpha}$, est tangent à Φ en O_{00}. Le cône projetant la courbe (8) de O_{00} et le cône qu'on vient de rencontrer n'ont en commun qu'une génératrice, la droite $O_{00} O_{a1}$.

7. — Envisageons maintenant le cas $\alpha > a + h + 1$. Pour préciser cette hypothèse, nous définirons un entier μ par la double inégalité

$$\mu(a+1) + h < \alpha < (\mu+1)(a+1) + h.$$

Pour abréger les écritures, nous poserons

$$\varphi = \alpha - \mu(a+1) - h.$$

Les inégalités précédentes donnent alors

$$0 < \varphi < a + 1.$$

On observera d'ailleurs que l'on ne peut avoir

$$\alpha = \mu(a+1) + h,$$

car alors p serait divisible par $a + 1$.

Effectuons λ fois la transformation quadratique (5). Il correspond au système $|\,C_1\,|$ le système

$$\Sigma \lambda_{ik} z_1^{i(\alpha-\lambda-1)-p(k-\lambda-1)} z_2^{kp-i(\alpha-\lambda)} z_3^{i} = 0. \qquad (11)$$

Pour $k = 1$, $i = a$, l'exposant de z_1 est

$$a(\alpha - \lambda - 1) + \lambda p$$

Pour $k = \theta$, $i = \theta\,(a + 1) - 1$, l'exposant de z_1 est

$$\theta\,[\alpha - (\lambda + 1)(a + 1) - h] + (\lambda + 1)(p + 1) - \alpha.$$

Si $\theta > 1$, pour $\lambda \leq \mu - 1$, c'est le second de ces nombres qui est supérieur à l'autre. Pour $\lambda \geq \mu$, c'est au contraire le premier. Lorsque $\theta = 1$, ils sont égaux, quel que soit λ (*). Nous laisserons provisoirement de côté le cas $\theta = 1$.

Pour $\lambda = 1, 2, \ldots, \mu - 1$, il est facile de voir que le terme de l'équation (11) contenant z_1 à la plus haute puissance est donné par $k = \theta$, $i = \theta\,(a + 1) - 1$. Par suite, les courbes C_1 ont, dans la direction de la tangente $x_3 = 0$, une suite de $\mu - 1$ points multiples d'ordre $\theta\,(a + 1) - 1$, infiniment voisins successifs de O_1. Dans l'équation (11), on peut mettre en évidence z_2 à la puissance $\lambda\,[\theta\,(a + 1) - 1] + \alpha - \theta\,(\alpha - h)$, L'exposant de z_2, dans le terme donné par $k = \theta$, $i = \theta\,(a + 1) - 1$ est nul et celui de z_3 est $\theta\,(a + 1) - 1$.

Faisons maintenant $\lambda = \mu$; après suppression du facteur z_2, l'équation (11) devient

$$\Sigma \lambda_{ik} z_1^{i(\alpha-\mu-1)-p(k-\mu-1)} z_2^{kp+\theta p-(i+1)(\alpha-\mu)} z_3^{i} = 0. \qquad (12)$$

Le terme contenant z_1 à la plus haute puissance est donné par $k = 1$, $i = a$. Ce terme s'écrit

$$z_1^{a(\alpha-1)(\mu+1)+\mu h} z_2^{(\theta-1)p} z_3^{a}.$$

(*) Pour $\theta = 1$, on a $\theta\,(a + 1) - 1 = a$ et les deux termes considérés sont confondus.

Les courbes (12) possède donc, au point $z_2 = z_3 = 0$, la multiplicité $(\theta - 1)\varphi + a$, $(\theta - 1)\varphi$ tangentes étant confondues avec $z_2 = 0$, a tangentes avec $z_3 = 0$. On a d'ailleurs

$$(\theta - 1)\varphi + a < \theta(a + 1) - 1.$$

Les courbes C_1 ont donc en O_1, dans la direction de la tangente $x_3 = 0$, une suite de μ point infiniment voisins successifs, les $\mu - 1$ premiers multiples d'ordre $\theta(a+1) - 1$, le dernier multiple d'ordre $(\theta - 1)\varphi + a$.

8. — Lorsque, dans l'équation (11), on fait $\lambda > \mu$, on peut mettre en évidence, d'après ce qui précède, z_2 exposant $a + \alpha - \mu - \varphi$ au moins. Le terme contenant z_1 à la puissance la plus élevée sera d'ailleurs donné par $k = 1$, $i = a$. Observons que pour $\lambda = \mu + 1$, ce terme est

$$z_1^{a(\alpha-1)(\mu+2)+(\mu+1)h} z_3^a,$$

et la courbe (11) a en $z_2 = z_3 = 0$ la multiplicité a, toutes les tangentes étant confondues avec $z_3 = 0$. On vérifie qu'il en est de même pour $\lambda = \mu + 2, \mu + 3, \ldots, \alpha - 1$. Pour $\lambda = \alpha - 1$, on pourra mettre en évidence, dans l'équation (11), z_2 à la puissance $p - a$. Cette équation devient, après suppression de ce facteur

$$\Sigma \lambda_{ik} z_1^{p(\alpha-k)} z_2^{(k-\iota)p+a-i} z_3^i = 0. \tag{13}$$

Les courbes (13) ont, au point $z_2 = z_3 = 0$, la multiplicité a et des tangentes variables, données par

$$\lambda_{01} z_2^a + \lambda_{11} z_2^{a-1} z_3 + \cdots + \lambda_{a1} z_3^a = 0$$

On trouve donc a branches des courbes C_1, d'origine O_1, ayant $x_3 = 0$ comme tangente en ce point, et ayant en commun $\alpha - 1$ points infiniment voisins successifs de O_1.

La surface Φ_1 peut être représentée par les équations paramétriques

$$X_{00} = 0, \quad \rho X_{ik} = z_1^{p(\alpha-k)} z_2^{(k-1)p+a-i} z_3^i.$$

Aux a branches des courbes C_1 considérées correspondent sur cette surface les points de la courbe d'ordre a

$$\left\| \begin{matrix} X_{01} & X_{11} & \cdots & X_{a-1,1} \\ X_{11} & X_{21} & \cdots & X_{a1} \end{matrix} \right\| = 0,$$

$$X_{00} = 0, \quad X_{ik} = 0, \quad (k > 1).$$

Le cône projetant cette courbe du point O_{00} est tangent à la surface Φ en ce point.

9. — Reprenons les courbes (12). Elles peuvent avoir en commun un certain nombre de points multiples infiniment voisins successifs du point $z_2 = z_3 = 0$, dans la direction $z_2 = 0$.

Opérons λ fois la transformation quadratique (9). Aux courbes (12) correspondent les courbes représentées par l'équation

$$\Sigma \lambda_{ik} z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3} = 0, \tag{14}$$

où l'on a

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= (\lambda + 1)[i(\alpha - \mu - 1) - p(k - \mu - 1)] + \lambda i, \\ \alpha_2 &= kp + \theta\varphi - (i + 1)(\alpha - \mu), \\ \alpha_3 &= \lambda kp + \lambda\theta\varphi - \lambda(i + 1)(\alpha - \mu) + i. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Pour que le terme donné par $k = 1$, $i = a$ contienne z_1 à une puissance inférieure à celui qui est donné par $k = \theta$, $i = \theta(a + 1) - 1$, il faut que l'on ait

$$(\lambda + 1)\varphi > a + 1,$$

c'est-à-dire

$$\alpha > \left(\mu + \frac{1}{\lambda + 1}\right)\left(a + 1\right) + h.$$

Il existe un entier ν défini par la double inégalité

$$\left(\mu + \frac{1}{\nu+1}\right)\left(a+1\right) + h \leq \alpha < \left(\mu + \frac{1}{\nu}\right)\left(a+1\right) + h,$$

c'est-à-dire par

$$\nu\varphi < a + 1 \leq (\nu + 1)\,\varphi.$$

Dans ces conditions, pour $k \leq \nu$, c'est le terme donné par $k = 1$, $i = a$ qui contiendra z_1 à la plus haute puissance, dans l'équation (14). On supposera en premier lieu $a + 1 < (\nu + 1)\,\varphi$.

On peut voir que pour $k \leq \nu$, α_3 est supérieur à $a + \lambda(\theta - 1)\,\varphi$. Débarrassée du facteur z_3 élevé à cette puissance, l'équation (14) conserve, dans son terme général, les exposants α_1, α_2 donnés par (15), mais on a

$$\alpha_3 = \lambda kp - \lambda(i+1)(\alpha - \mu) - a + i + \lambda\varphi.$$

Pour $k = 1$, $i = a$, on a

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= (\lambda + 1)(\mu + 1)(\alpha - 1)\,a + (\lambda + 1)\,\mu h + \lambda a,\\
\alpha_2 &= (\theta - 1)\,\varphi,\\
\alpha_3 &= 0.
\end{aligned}$$

Les courbes (12) ont donc une suite de ν points multiples d'ordre $(\theta - 1)\,\varphi$, infiniment voisins successifs du point $z_2 = z_3 = 0$, dans la direction $z_2 = 0$.

Faisons maintenant $\lambda = \nu + 1$. Aux courbes (12) correspondent des courbes représentées par l'équation (14) où l'on a

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_1 &= (\nu + 1)\left[i(\alpha - \mu - 1) - p(k - \mu - 1)\right] + \nu i,\\
\alpha_2 &= kp + \theta\varphi - (i + 1)(\alpha - \mu),\\
\alpha_3 &= \nu kp - \nu(i + 1)(\alpha - \mu) - a + i + \nu\varphi.
\end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Pour $k=\theta$, $i=\theta(a+1)-1$, qui donne le terme contenant z_1 à la plus haute puissance, on a

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= (\nu+1)\theta\varphi-(a+1)\theta+(\nu+1)(\alpha-\mu-1)-\nu,\\
\alpha_2 &= 0,\\
\alpha_3 &= (\theta-1)[\alpha+1-\nu\varphi].
\end{aligned}$$

On a donc pour les courbes (12), un $(\nu+1)$-ième point, infiniment voisin au dernier de ceux dont il vient d'être question, et qui est de multiplicité

$$(\theta-1)(a+1-\nu\varphi)<(\theta-1)\varphi.$$

Les tangentes au point $z_2=z_3=0$, aux courbes (14), où α_1, α_2, α_3 sont donnés par (16), sont confondues avec $z_3=0$; il y a donc des points infiniment voisins au point considéré, communs à toutes ces courbes.

Supposons maintenant $a+1=(\nu+1)\varphi$. Les développements précédents sont encore valables pour $\lambda\leq\nu$. Pour $\lambda=\nu+1$, le point $z_2=z_3=0$ est ordinaire à tangentes variables pour les courbes (14) où α_1, α_2, α_3 sont donnés par (16). Pour $1\leq k\leq\theta$ la plus haute valeur de i est en effet

$$i=k(a+1)-1.$$

La valeur de α_1, dans les formules (16), pour cette valeur de i, est

$$\alpha_1=p(\mu+1)(\nu+1)-(\nu+1)(\alpha-\mu-1)-\nu;$$

elle est donc indépendante de k. Les tangentes aux courbes envisagées au point $z_3=z_2=0$ sont données par

$$\lambda_{a1}z_2^{(\theta-1)\varphi}+\cdots+\lambda_{ik}z_2^{(\theta-k)\varphi}z_3^{\varphi(k-1)}+\cdots+\lambda_{a\theta+\theta-1,\theta}z_3^{(\theta-1)\varphi}=0, \quad (17)$$

où $1\leq k\leq\theta$, $i=k(a+1)-1$.

La surface Φ_1 pouvant être représentée par les équations

$$X_{00}=0, \quad \rho X_{ik}=z_1^{\alpha_1}z_2^{\alpha_2}z_3^{\alpha_3},$$

où α_1, α_2, α_3 ont les valeurs données par les formules (16), on voit que le cône projetant du point O_{00} la courbe

$$\left\Vert \begin{matrix} X_{2a+1,2} & X_{2a+1,2} & \cdots & X_{a(\theta-1)+\theta-2,\theta-1} \\ X_{a1} & X_{3a+2,3} & \cdots & X_{a\theta+\theta-1,\theta} \end{matrix} \right\Vert = 0, \tag{18}$$

toutes les autres coordonnées X_{ik} étant nulles, est tangent en ce point à la surface Φ.

Ce cône, rationnel et irréductible, est d'ordre $\theta - 1$. Observons que la série des tangentes (17) est composée au moyen d'une involution d'ordre φ; par suite tout point de la courbe (18) correspond à un groupe de cette involution et le cône tangent à la surface Φ qui vient d'être rencontré doit être compté φ fois.

10. — Retournons à l'hypothèse $a + 1 < (\nu + 1)\varphi$. Représentons par α_{1k}, α_{2k}, α_{3k} les valeurs prises par α_1, α_2, α_3 dans les formules (16) lorsque l'on donne à i la plus grande valeur possible. On a donc

$$\alpha_{21} = (\theta - 1)\varphi, \quad \alpha_{2\theta} = 0, \quad \alpha_{31} = 0, \quad \alpha_{3\theta} = (\theta - 1)(\alpha + 1 - \nu\varphi).$$

Introduisons ensuite l'entier ν_1 satisfaisant aux inégalités

$$\frac{\nu_1 + 1}{\nu(\nu_1 + 1) + 1}(a + 1) \geq \varphi > \frac{\nu_1}{\nu\nu_1 + 1}(a + 1).$$

Opérons sur la courbe (14), où α_1, α_2, α_3 ont les valeurs (16), λ fois la transformation quadratique (5); on obtient ainsi l'équation

$$\Sigma\lambda_{ik} z_1^{(\lambda+1)\alpha_1 + \lambda\alpha_2} z_2^{\alpha_2 + \lambda\alpha_3} z_3^{\alpha_3} = 0.$$

Il est facile de voir que l'on peut diviser les deux membres de cette équation, pour $\lambda \leq \nu_1$, par la puissance $\lambda(\theta - 1)(a + 1 - \nu\varphi) = \lambda\alpha_{3\theta}$ de z_2. La courbe ainsi obtenue,

$$\Sigma\lambda_{ik} z_1^{(\lambda+1)\alpha_1 + \lambda\alpha_2} z_2^{\alpha_2 + \lambda(\alpha_3 - \alpha_{3\theta})} z_3^{\alpha_3} = 0 \tag{19}$$

possède la multiplicité $\alpha_{3\theta}$ au point $z_2 = z_3 = 0$, pour $\lambda \leq \nu_1 - 1$, les tangentes en ce point étant toutes confondues avec $z_3 = 0$. Le terme de puissance le plus élevée en z_1 est donné par $k = \theta$, $i = a\theta + \theta - 1$. Pour $\lambda = \nu_1$, le terme contenant z_1 à la plus haute puissance est donnée par $k = 1$, $i = a$ et est précisément

$$z_1^{(\nu_1+1)\,\alpha_{11}+\nu_1(\theta-1)\,\varphi}\, z_2^{(\theta-1)[(\nu\nu_1+1)\,\varphi-\nu_1(a+1)]},$$

dans le cas où l'on a

$$(\nu_1 + 1)(a + 1) > \varphi(\nu\nu_1 + \nu + 1).$$

Lorsque l'on a au contraire

$$(\nu_1 + 1)(a + 1) = \varphi(\nu\nu_1 + \nu + 1),$$

tous les termes donnés par $1 \leq k \leq \theta$, $i = k(a + 1) - 1$ contiennent z_1 à la même puissance. Les courbes (19) ont en $z_2 = z_3 = 0$ des tangentes variables données par ($\lambda = \nu_1$)

$$\left.\begin{aligned} \lambda_{a1}\, z_2^{(\theta-1)(a+1-\nu\varphi)} + \lambda_{2a+1,2}\, z_2^{(\theta-2)(a+1-\nu\varphi)}\, z_3^{a+1-\nu\varphi} + \cdots \\ + \lambda_{a\theta+\theta-1,\theta}\, z_3^{(\theta-1)(a+1-\nu\varphi)} = 0. \end{aligned}\right\}$$

On en conclut, en raisonnant comme plus haut, que le cône projetant la courbe (18) du point O_{00}, compté $a + 1 - \nu\varphi$ fois, fait partie du cône tangent à Φ en ce point.

Reprenons l'hypothèse $(\nu_1 + 1)(a + 1) > \varphi(\nu\nu_1 + \nu + 1)$. Un raisonnement analogue à ceux qui ont été fait plus haut conduit à définir un entier ν_2 par les inégalités

$$\frac{(\nu_2 + 1)\,\nu_1 + 1}{(\nu_2 + 1)(\nu\nu_1 + 1) + \nu}\,(a + 1) \leq \varphi < \frac{\nu_2\nu_1 + 1}{\nu(\nu_1\nu_2 + 1) + \nu_2}\,(a + 1).$$

Si la première inégalité est en particulier une égalité, on trouve, dans le cône tangent à la surface Φ au point

O_{00}, le cône projetant la courbe (18) de ce point, compté $(\nu\nu_1 + 1)\varphi - \nu_1(a+1)$ fois. Dans le cas de l'inégalité proprement dite, on applique de nouveau le procédé utilisé plus haut, et ainsi de suite. Comme dans les courbes que l'on obtient successivement en appliquant les transformations (5) et (9), la différence entre les exposants de z_1 dans les termes donnés par $k = 1$, $i = a$ et par $k = \theta$, $i = \theta a + \theta - 1$, va en diminuant en valeur absolue, il est clair que cette différence finira par être nulle. On trouvera alors, dans le cône tangent en O_{00} à Φ, le cône projetant de ce point la courbe (18), un certain nombre de fois.

Si $\alpha > a + h + 1$, *et s'il existe un nombre* $\theta > 1$ *tel que l'on ait* $(\theta - 1)\alpha \leq \theta h$, *le cône tangent à la surface* Φ *au point* O_{00} *comprend un cône d'ordre* a, *un cône d'ordre* $\theta - 1$, *compté un certain nombre de fois, provenant des branches des courbes* C_1 *tangentes en* O_1 *à la droite* $x_3 = 0$, *et un troisième cône, éventuellement réductible, provenant des branches des courbes* C_1 *tangentes en* O_1 *à la droite* $x_2 = 0$.

On voit d'ailleurs que les cônes d'ordre a et d'ordre $\theta - 1$ dont il vient d'être question, n'ont en commun qu'une seule génératrice, la droite $O_{00}O_{a1}$.

11. — Nous avons exclu plus haut le cas $\alpha > a + h + 1$, $\theta = 1$. Il est facile de voir que, dans ces conditions, le cône d'ordre $\theta - 1$ disparaît. Les branches des courbes C_1 tangentes en O_1 à la droite $x_3 = 0$ donnent naissance à un seul cône d'ordre a, tangent en O_{00} à la surface Φ. Ce cas conduit aux mêmes conclusions que lorsque l'on a $\alpha < a + h + 1$.

12. — Nous allons examiner un cas particulier. Supposons $p = 23$, $\alpha = 9$. On a alors $a = 2$, $h = 5$, $\theta = 2$,

$\mu = 1$, $\varphi = 1$, $\nu = 2$, $\beta = 18$. L'équation du système $|C|$ s'écrit

$$
\begin{aligned}
\lambda_{00}x_1^{23} &+ \lambda_{21}x_1^{16}x_2^5x_3^2 + \lambda_{11}x_1^8x_2^{14}x_3 + \lambda_{01}x_2^{23} \\
&+ \lambda_{52}x_1^{17}x_2x_3^5 + \lambda_{42}x_1^9x_2^{10}x_3^4 + \lambda_{32}x_1x_2^{19}x_3^3 \\
&+ \lambda_{73}x_1^{10}x_2^6x_3^7 + \lambda_{63}x_1^2x_2^{15}x_3^6 + \lambda_{10,4}x_1^{11}x_2^2x_3^{10} \\
&+ \lambda_{94}x_1^3x_2^{11}x_3^9 + \lambda_{12,5}x_1^4x_2^7x_3^{12} + \lambda_{15,6}x_1^5x_2^3x_3^{15} + \lambda_{23,9}x_3^{23} = 0.
\end{aligned}
$$

L'équation des courbes C_1 s'obtient en posant $\lambda_{00} = 0$ dans l'équation précédente. Ces courbes ont en commun :

Le point O_1, multiple d'ordre six;

Un point triple infiniment voisin de O_1 sur la droite $x_3 = 0$. A ce point triple sont infiniment voisins d'une part une suite de sept points doubles infiniment voisins successifs, d'autre part deux points simples infiniment voisins successifs;

Une suite de dix-sept points simples infiniment voisins successifs dont le premier est infiniment voisin de O_1 sur la droite $x_2 = 0$.

Si l'on adopte les notations de notre note *Sur les Homographies planes cycliques* pour les points des domaines des divers ordres du point O_1, unis pour l'involution I_p, cela revient à dire que le point O_{12} est triple, les points O_{122}, O_{1222}, ..., $O_{12\ldots2}$ (huit fois l'indice deux) sont doubles, les points O_{123}, O_{1233} sont simples, les points O_{13}, O_{133}, ..., $O_{13\ldots3}$ (dix-sept fois l'indice trois) sont simples. Ces points forment le groupe-base du système $|C_1|$.

Le système $|C_1|$ a le degré $437 = 19 \times 23$. Par suite la surface Φ_1 est d'ordre 19 et le point O_{00} est quadruple pour la surface Φ.

Le cône tangent à la surface Φ au point O_{00} se compose :

1° Du cône de second ordre

$$X_{11}^2 - X_{01}X_{21} = 0$$

appartenant à l'espace $O_{00}O_{01}O_{11}O_{31}$;

2° Du plan $O_{00}O_{21}O_{52}$;

3° Du plan $O_{00}O_{52}O_{23,9}$.

Ajoutons que l'on peut obtenir une représentation plane de la surface Φ en posant

$$u_1 : u_2 : u_3 = x_1^7 x_2^5 : x_2^9 x_3^2 : x_1^8 x_3^3.$$

On obtient ainsi, pour le système linéaire de courbes correspondant au système des sections hyperplanes de Φ, c'est-à-dire au système $|C|$,

$$\begin{aligned}&\lambda_{00}u_1^9u_3^2 + u_1^8u_2(\lambda_{21}u_3^2 + \lambda_{11}u_2u_3 + \lambda_{01}u_2^2)\\ &+ u_1^7u_2u_3(\lambda_{52}u_3^2 + \lambda_{42}u_2u_3 + \lambda_{32}u_2^2) + u_1^6u_2^2u_3^2(\lambda_{73}u_3 + \lambda_{63}u_2)\\ &+ u_1^5u_2^2u_3^3(\lambda_{10,4}u_3 + \lambda_{94}u_2) + \lambda_{12,5}u_1^4u_2^3u_3^4 + \lambda_{15,6}u_1^3u_2^3u_3^5\\ &+ \lambda_{23,9}u_2^4u_3^7 = 0.\end{aligned}$$

Ces courbes possèdent un point de rebroussement ordinaire en O_1' ($u_2 = u_3 = 0$), la tangente de rebroussement étant $u_3 = 0$; un point septuple O_2' ($u_3 = u_1 = 0$) auquel est infiniment voisin, sur la droite $u_3 = 0$, un point simple, les sept tangentes étant confondues avec cette droite; un point quadruple O_3' ($u_1 = u_2 = 0$) auquel sont infiniment voisins successifs un point quadruple et un point simple situés sur la droite $u_2 = 0$.

Aux points de la surface Φ, infiniment voisins de O_{00} sur le cône du second ordre tangent à cette surface en ce point, correspondent les points infiniment voisins de O_1'. Aux points de Φ, infiniment voisins de O_{00} dans le plan $O_{00}O_{21}O_{52}$ correspondent les points de la droite $u_2 = 0$. Enfin, aux points de Φ, infiniment voisins de O_{00} dans le plan $O_{00}O_{52}O_{23,9}$ correspondent des points du domaine du point O_2', et précisément les points du domaine du troisième ordre de O_2' appartenant aux courbes

$$\lambda_1 u_1^7 + \lambda_2 u_2^3 u_3^4 = 0.$$

Liége, le 9 février 1930.