ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE
Extrait des *Bulletins de la Classe des Sciences*, 5e série, t. XV, no 6.
Séance du 1er juin 1929, pp. 553-560.

Géométrie. — Sur les points unis des involutions cycliques d'ordre trois appartenant à une surface algébrique,

par Lucien GODEAUX, professeur à l'Université de Liége (*).

Nous avons étudié antérieurement les involutions cycliques n'ayant qu'un nombre fini de points unis appartenant à une surface algébrique (**) et plus particulièrement les involutions du troisième ordre (***). Nous avons montré que les points unis de ces involutions peuvent être de deux espèces. Soient F une surface algébrique contenant une involution I_n d'ordre premier n, n'ayant qu'un nombre fini de points unis ; T la transformation birationnelle de cette surface en elle-même, génératrice de l'involution I_n. Considérons un point uni A de I_n et soit α le plan tangent en ce point à la surface F. La transformation T échange entre eux les points de la surface F infiniment voisins du point A et cette transformation détermine donc une involution dans le faisceau de sommet A et de plan α des tangentes à F en A. Si cette involution est l'identité, le point A est appelé point de coïncidence parfaite. Dans le cas opposé, cette involution est d'ordre n et le point A est appelé point de coïncidence non parfaite. Alors, il existe deux droites unies distinctes pour cette involution dans le faisceau des

(*) Présenté par M. Mineur.

(**) Sur les involutions douées d'un nombre fini de points unis appartenant à une surface algébrique. (*Rend. R. Accad. dei Lincei*, 1er sem. 1914, pp. 408-413); Recherches sur les involutions douées d'un nombre fini de points de coïncidence appartenant à une surface algébrique. (*Bull. de la Société mathématique de France*, 1919, pp. 1-16.)

(***) Recherches sur les involutions cubiques appartenant à une surface algébrique. (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1921, pp. 105-124.)

tangentes et l'involution I_n possède deux points unis distincts dans le domaine du premier ordre du point A.

Dans cette note, nous nous proposons de poursuivre l'étude des points de coïncidence non parfaite dans le cas des involutions d'ordre trois. Nous montrons que les points unis de l'involution dans le voisinage d'un point de coïncidence non parfaite doivent être considérés comme des points de coïncidence parfaite. Nous supposerons connus du lecteur les résultats obtenus dans les notes citées plus haut.

1. Soit F une surface algébrique contenant une involution cyclique I_3, d'ordre trois, n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Nous pouvons prendre comme modèle projectif de la surface F une surface d'ordre $3n$, à sections hyperplanes C de genre $3\pi - 2$, appartenant à un espace linéaire S_r à r dimensions, sur laquelle l'involution I_3 est déterminée par une homographie cyclique H possédant trois axes (espaces linéaires dont tous les points sont unis pour l'homographie). Désignons par $S^{(0)}$, $S^{(1)}$, $S^{(2)}$ les axes de l'homographie H, par r_0, r_1, r_2 les dimensions respectives de ceux-ci. Nous avons montré que la surface F de S_r peut être construite de manière que les points unis de I_3 appartiennent tous à l'axe $S^{(0)}$, les axes $S^{(1)}$, $S^{(2)}$ ne rencontrant pas F. Ces points unis sont, d'autre part, des points simples de la surface F.

Il existe dans S_r trois systèmes linéaires d'hyperplans unis pour H; nous les désignerons par Σ_0, Σ_1, Σ_2. Le premier, Σ_0, est formé des hyperplans passant par les axes $S^{(1)}$, $S^{(2)}$; le second, Σ_1, par les hyperplans passant par $S^{(2)}$, $S^{(0)}$; le troisième, Σ_2, par les hyperplans passant par $S^{(0)}$, $S^{(1)}$. Les dimensions de Σ_0, Σ_1, Σ_2 sont respectivement r_0, r_1, r_2.

Nous pouvons, sans restriction, supposer $r \geq 3$. En rapportant projectivement les hyperplans de Σ_0 aux hyperplans d'un espace linéaire à r_0 dimensions, la surface F se transforme en une surface Φ, d'ordre n, image de l'involution I_3. Les sections hyperplanes Γ de la surface Φ ont le genre π et il leur correspond, sur F, les courbes C découpées par les hyperplans de Σ_0.

2. Supposons que l'involution I_3 possède un point uni A de coïncidence non parfaite. Le point A appartient à l'axe $S^{(0)}$ et nous avons montré que le plan tangent α à F en A s'appuie en un seul point A_1 sur $S^{(1)}$ et en un seul point A_2 sur $S^{(2)}$. Le plan α est uni pour l'homographie H et celle-ci détermine dans ce plan une homographie de période trois, non homologique, ayant pour points unis les points A, A_1, A_2. Les points de la surface F infiniment voisins de A sur les tangentes $a_1 = AA_1$, $a_2 = AA_2$ sont les seuls points du domaine du premier ordre de A qui soient unis pour l'homographie H et, par suite, pour l'involution I_3.

Les hyperplans de Σ_0 passant par A contiennent le plan α et découpent sur F des courbes C_1 ayant un point double en A, les tangentes en ce point étant a_1, a_2.

Le point de diramation A' de la surface Φ correspondant à A est un point double biplanaire ordinaire de cette surface. Aux courbes C_1 correspondent sur Φ les courbes Γ_1 sections de cette surface par les hyperplans passant par A'. Si l'on désigne par α'_1, α'_2 les plans tangents en A' à la surface Φ, les points de cette surface infiniment voisins de A' dans α'_1 correspondent au point de F infiniment voisin de A sur la droite a_1, et les points de Φ infiniment voisins de A' dans α'_2 correspondent au point infiniment voisin de A sur la droite a_2.

Les courbes C_1 assujetties à avoir en A une tangente distincte de a_1, a_2 acquièrent un point triple en A. Il existe donc un système linéaire $|C_2|$, de dimension $r_0 - 2$, dont les courbes sont découpées par des hyperplans de Σ_0 et ont un point triple à tangentes variables en A. Aux courbes C_2 correspondent sur Φ les courbes Γ_2 découpées par les hyperplans passant par la droite a' commune aux plans α'_1, α'_2. Les courbes Γ_2 ont un point de rebroussement en A'. Le point de a' infiniment voisin de A' correspond à tous les groupes de l'involution I_3 formés de points distincts du domaine du premier ordre de A.

3. Le système linéaire $|\Gamma_1|$, sur la surface Φ, a le degré $n - 2$ et, par suite, sur la surface F, le système $|C_1|$ a le degré $3n - 6$. Il en résulte que le point A absorbe six des intersections de deux courbes C_1, celles-ci ayant le degré virtuel $3n$ égal au degré du système $|C|$. Par conséquent, les branches de deux courbes C_1 ayant même tangente au point A ne s'osculent pas en ce point. Une courbe C_1 a, au point A, deux plans osculateurs, l'un passant par la droite a_1, l'autre par la droite a_2. D'après ce qui précède, ces plans osculateurs sont variables avec la courbe. De plus, une courbe C_1 étant transformée en elle-même par l'homographie H et chacune des tangentes a_1, a_2 étant unie pour cette homographie, chacun des plans osculateurs à une courbe C_1 en A est uni pour l'homographie H.

Considérons un hyperplan S_{r-1} du système Σ_0 ne passant pas par A et projetons la surface F sur cet hyperplan en prenant A comme centre de projection. Soit F_1 la surface obtenue. La surface F_1 est d'ordre $n - 1$ et passe par la droite $a = A_1A_2$, dont les points correspondent aux points de F infiniment voisins de A. La surface F_1 est transformée en elle-même par H et cette homographie détermine sur la surface une involution I'_3, projection de l'involution I_3.

Les points A_1, A_2 de la surface F_1 sont unis pour l'involution I'_3. Si nous désignons par α_1, α_2 les plans tangents à la surface F_1 respectivement en A_1, A_2, ces plans sont unis pour l'homographie H. Ces plans passent par la droite a (unie pour l'homographie H).

Une courbe C_1 a pour projection, sur F_1, une courbe C'_1 d'ordre $n - 2$ passant par A_1, A_2. La tangente à cette courbe en A_1 est l'intersection du plan α_1 et du plan osculateur passant par a_1 à la courbe C_1 au point A. Ce plan osculateur et le plan α_1 étant unis pour H, la tangente à la courbe C'_1 en A_1 est unie pour cette homographie. D'autre part, le plan osculateur envisagé étant variable avec la courbe C_1, la tangente en A_1 à la courbe C'_1 est variable avec celle-ci. L'homographie H détermine donc, dans le plan uni α_1, une homologie de centre A_1. L'axe d'homologie passe nécessairement par A_2 et est donc une droite s_2 de l'espace $S^{(2)}$. Le point A_1 est donc un point de coïncidence parfaite pour l'involution I'_3.

Le lieu des plans osculateurs passant par a_1 aux courbes C_1 au point A est un espace linéaire à trois dimensions $S_3^{(1)}$ déterminé par les points A, A_1 et par la droite s_2.

De même, le plan α_2 coupe l'espace $S^{(1)}$ suivant une droite s_1 et le point A_2 est un point de coïncidence parfaite pour l'involution I'_3. Le lieu des plans osculateurs passant par α_2 aux courbes C_1 au point A est un espace linéaire à trois dimensions $S_3^{(2)}$ déterminé par les points A_1, A_2 et par la droite s_2.

Dans le domaine du premier ordre d'un point de coïncidence non parfaite d'une involution cyclique du troisième ordre appartenant à une surface algébrique, se trouvent deux points unis distincts qui sont des points de coïncidence parfaite de cette involution.

Les espaces $S_3^{(1)}$, $S_3^{(2)}$ sont distincts, car le premier, par exemple, ne peut contenir la droite s_1. Ces espaces ont en commun le plan α et appartiennent, par suite, à un espace linéaire à quatre dimensions S_4. Celui-ci est uni pour l'homographie H et cette homographie détermine dans cet espace S_4 une homographie ayant comme axes le point A et les droites s_1, s_2.

Les hyperplans de Σ_0 passant par A contiennent l'espace S_4.

4. Fixons l'attention sur une courbe $\overline{C}_2$ du système $|C_2|$ ayant en A un point triple à tangentes distinctes t_1, t_2, t_3. La courbe $\overline{C}_2$ possède en A trois plans osculateurs τ_1, τ_2, τ_3 passant respectivement par t_1, t_2, t_3.

L'homographie H transforme la courbe C_2 en elle-même et échange entre elles les tangentes t_1, t_2, t_3 ; par suite elle échange entre eux les plans osculateurs τ_1, τ_2, τ_3. Désignons par Σ_0' le système linéaire formé par les hyperplans de Σ_0 contenant le plan τ_1. Ce système a la dimension $r_0 - 2$, car le plan τ_1 rencontre en un point la droite a qui est commune à tous les plans de Σ_0. Les hyperplans de Σ_0' étant unis par H, contiennent les plans τ_2, τ_3; par suite, ces hyperplans coupent la courbe $\overline{C}_2$ en $3n$ points dont neuf sont réunis au point A. Les courbes découpées sur F par les hyperplans de Σ_0' contiennent trois points du domaine du premier ordre de A formant un groupe de I_3 et il leur correspond donc sur Φ des courbes Γ_2. Il en résulte que l'un des hyperplans de Σ_0' contient $\overline{C}_2$ et que, plus généralement, Σ_0' ayant la même dimension $r_0 - 2$ que $|C_2|$, les courbes de ce système sont découpées par les hyperplans de Σ_0'. Ces hyperplans contiennent donc les plans osculateurs en A aux différentes courbes tracées sur F et passant par ce point.

Désignons par $S^{(\alpha)}$ l'espace linéaire de dimension minimum contenant ces plans osculateurs. On sait que le nombre de dimensions de cet espace $S^{(\alpha)}$ est quatre ou cinq (*). Actuellement, cet espace $S^{(\alpha)}$ ne peut avoir quatre dimensions, car alors il coïnciderait avec l'espace S_4 rencontré plus haut, puisqu'il contient $S_3^{(1)}$ et $S_3^{(2)}$; dans ces conditions, puisque les hyperplans de Σ_0 passant par A contiennent S_4, les systèmes linéaires $|C_1|$, $|C_2|$ coïncideraient, ce qui est absurde. Par suite, le nombre de dimensions de l'espace $S^{(\alpha)}$ est cinq et l'espace sera indiqué par $S_5^{(\alpha)}$.

Par sa construction, l'espace $S_5^{(\alpha)}$ contient l'espace S_4 et est uni pour l'homographie H. Celle-ci détermine dans $S_5^{(\alpha)}$ une homographie h qui ne peut être l'identité. L'homographie h

(*) Segre, Su una classe di superficie degl' iperspazi legata colle equazioni lineari alle derivate parziali du 2° ordine. (*Atti R. Accad. Torino*, 1907, t. XLII, pp. 1047-1079.) Voir aussi Del Pezzo, Sugli spazii tangenti ad una superficie o ad una varietà immersa in uno spazio di più dimensioni. (*Rend. R. Accad. di Napoli* 1886.)

est cyclique et, par suite, générale; elle possède donc trois axes. Le point A et les points des droites s_1, s_2 sont unis pour h. Cette homographie ne peut posséder comme axe un plan passant par s_1 (ou s_2), car ce plan appartiendrait à $S^{(1)}$ (ou $S^{(2)}$) et les hyperplans de Σ_0 passant par A contiendraient $S_5^{(\alpha)}$. Mais alors les systèmes $|C_1|$, $|C_2|$ coïncideraient, ce qui est absurde. Les axes de l'homographie h sont donc les droites s_1, s_2 et une troisième droite s_0 passant par A et située dans l'espace $S^{(0)}$.

On sait (*) que les plans osculateurs en A aux courbes tracées sur F et ayant même tangente en ce point ont pour lieu un espace linéaire à trois dimensions passant par le plan α. Le lieu de ces espaces est une variété V_4^2 conique du second ordre. Cette variété contient $S_3^{(1)}$, $S_3^{(2)}$ et appartient à l'espace $S_5^{(\alpha)}$; elle est nécessairement transformée en elle-même par h et H. Ces homographies déterminent dans l'ensemble des espaces S_3 de la variété V_4^2 une involution non identique et, par suite, du troisième ordre. Cette involution possède deux espaces unis $S_3^{(1)}$, $S_3^{(2)}$. De tout ceci résulte que la droite s_0 ne peut appartenir à la variété V_4^2 et que les espaces linéaires à quatre dimensions passant par s_0 et tangents à V_4^2 touchent cette variété suivant les espaces $S_3^{(1)}$, $S_3^{(2)}$.

Ces résultats montrent quelle est la structure d'un point de coïncidence non parfaite d'une involution cubique n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique.

5. La plus simple des involutions cubiques I appartenant à une surface algébrique est l'homographie cyclique de période trois

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^2 x_3, \tag{1}$$

où ε est une racine cubique primitive de l'unité. L'involution I engendrée par (1) possède trois points unis qui sont les

(*) Segre, *loc. cit.*; Del Pezzo, *loc. cit.*

sommets du triangle de référence. Il est facile de voir que ce sont des points de coïncidence non parfaite. En chacun de ces points, les points unis infiniment voisins sont situés sur les côtés du triangle de référence. Il est aisé de vérifier dans ce cas le résultat obtenu plus haut.

Opérons la transformation quadratique

$$x_1 : x_2 : x_3 = y_2(y_1 + y_2) + y_3(y_1 - y_3) : y_1y_2 : y_1y_3 .$$

A l'homographie (1) correspond la transformation de Jonquières

$$\left.\begin{aligned} \rho y_1' &= y_1(\varepsilon y_2^2 - y_3^2), \\ \rho y_2' &= y_2[y_2(y_1 + y_2) + y_3(y_1 - y_3) - \varepsilon y_1 y_3 - \varepsilon^2 y_1 y_3], \\ \rho y_3' &= \varepsilon y_3[y_2(y_1 + y_2) + y_3(y_1 - y_3) - \varepsilon y_1 y_2 - \varepsilon^2 y_1 y_3]. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Aux points unis (0, 1, 0), (0, 0, 1) de l'homographie (1) correspondent respectivement les points unis (1, — 1, 0), (1, 0, 1) de la transformation (2). Aux points infiniment voisins du point (1, 0, 0) correspondent les points de la droite $y_1 = 0$. En particulier, aux points unis de l'homographie (1) infiniment voisins du point (1, 0, 0) situés sur les droites $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ correspondent respectivement les points (0, 0, 1) et (0, 1, 0). Pour la transformation (2) ou, mieux pour l'involution d'ordre trois engendrée par cette transformation, ces points sont des points de coïncidence parfaite. A une droite

$$y_1 + \lambda y_2 = 0$$

passant par le premier, par exemple, correspond une courbe

$$y_1(\varepsilon y_2^2 - y_3^2) + \lambda y_2[y_2(y_1 + y_2) + y_3(y_1 - y_3) - \varepsilon y_1 y_2 - \varepsilon^2 y_1 y_3] = 0$$

tangente à cette droite au point considéré.

Liége, le 3 avril 1929.

Marcel Hayez, imprimeur, rue de Louvain, 112, Bruxelles.