

ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE.

Extrait des *Bulletins de la Classe des Sciences*, 5^e série, t. XV, n^o 1.

Séance du 5 janvier 1929, pp. 25-36.

GÉOMÉTRIE ALGÈBRE.

Sur certaines involutions cycliques appartenant aux courbes algébriques.

par L. GODEAUX, professeur à l'Université de Liège.

1. Soient C une courbe algébrique, non hyperelliptique, de genre π , contenant une involution cyclique I_p , d'ordre p et de genre $\pi' > 1$; T la transformation birationnelle de C en elle-même, de période p , génératrice de I_p ; C' une courbe de genre π' image de l'involution I_p (*).

Le système canonique $|G|$ de C est transformé en lui-même par T et il existe, dans ce système, un certain nombre de systèmes linéaires partiels $|G_1|, |G_2|, \dots, |G_k|$ composés au moyen de l'involution I_p . L'un de ces systèmes est, comme on sait, le transformé du système canonique $|G'|$ de C' ; supposons, pour fixer les idées, que ce soit $|G_1|$. Nous nous proposons de rechercher s'il est possible que les systèmes $|G_2|, |G_3|, \dots, |G_k|$ soient les transformés respectivement des systèmes bicanonique $|2G'|$, tricanonique $|3G'|, \dots, k$ — canonique $|kG'|$ de C' .

(*) Nous utilisons dans cette note des théorèmes connus de la Géométrie sur une courbe algébrique. On trouvera un exposé de cette géométrie, par exemple, dans SEVERI, *Trattato di Geometria algebrica*, vol. I (Bologne, Zanichelli, 1926), ou dans ENRIQUES-CHISINI, *Courbes et fonctions algébriques d'une variable* (Paris, Gauthier-Villars, 1926).

2. Prenons comme modèle projectif de la courbe C la courbe d'ordre $2\pi - 2$, de l'espace linéaire $S_{\pi-1}$ à $\pi - 1$ dimensions, sur laquelle les hyperplans découpent les groupes de la série canonique $|G|$ (ce qui est toujours possible, puisque C n'est pas hyperelliptique). Sur cette courbe, que nous continuerons à désigner par C , la transformation birationnelle T est déterminée par une homographie de période p , de $S_{\pi-1}$, que nous désignerons toujours par T . Cette homographie T , étant cyclique, est générale; elle possède k systèmes d'hyperplans unis $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_k$ découpant respectivement sur C les groupes des séries partielles $|G_1|, |G_2|, \dots, |G_k|$. L'homographie T possède par suite k espaces fondamentaux ou axes $S^{(1)}, S^{(2)}, \dots, S^{(k)}$. Les hyperplans de Σ_i passent par les espaces $S^{(1)}, \dots, S^{(i-1)}, S^{(i+1)}, \dots, S^{(k)}$. Nous désignerons par r_i le nombre de dimensions de l'espace fondamental $S^{(i)}$; r_i sera donc la dimension du système d'hyperplans Σ_i et du système linéaire $|G_i|$.

Le système canonique $|G'|$ de C' a la dimension $\pi' - 1$; par suite,

$$r_1 = \pi' - 1.$$

Le système i — canonique $|iG'|$ de C' a la dimension $(2i - 1)(\pi' - 1) - 1$, pour $i > 1$. Par suite, nous avons

$$r_i = (2i - 1)(\pi' - 1) - 1. \quad (i > 1).$$

D'après la théorie des homographies, on a

$$r_1 + r_2 + \dots + r_k + k = \pi,$$

d'où, en remplaçant r_1, r_2, \dots, r_k par leurs valeurs,

$$k^2(\pi' - 1) = \pi - 1. \quad (1)$$

3. Le système i — canonique $|iG'|$ de C' est dépourvu de points fixes et a l'ordre $2i(\pi' - 1)$; par suite la série qui lui correspond sur C est formée de groupes de $2ip(\pi' - 1)$ points variables. Il en résulte que la série $|G_i|$, qui est d'ordre $2\pi - 2$, possède

$$2\pi - 2 - 2ip(\pi' - 1) = 2(k^2 - ip)(\pi' - 1)$$

points fixes. Ce nombre étant positif ou nul, on a

$$k^2 \geq ip. \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Pour $i = k$, on en déduit $k \geq p$. Comme, d'autre part, une homographie cyclique de période p ne peut avoir plus de p espaces fondamentaux, on a $k \leq p$ et, par suite, $k = p$. La formule (1) devient

$$p^2 (\pi' - 1) = \pi - 1 \quad (2)$$

et le nombre des points fixes de la série $|G_i|$ est égal à

$$2p(p - i)(\pi' - 1).$$

Le nombre δ des points unis de l'involution I_p est, d'après la formule de Zeuthen, donné par

$$2p(\pi' - 1) + (p - 1)\delta = 2(\pi - 1).$$

En utilisant (2), on a

$$\delta = 2p(\pi' - 1).$$

Par suite, le nombre de points fixes de la série $|G_i|$ est

$$(p - i)\delta.$$

4. Désignons par $S^{(i)}$ l'espace linéaire commun à tous les hyperplans de Σ_i . Les $(p - i)\delta$ points fixes de la série $|G_i|$ appartiennent à cet espace et ceux de ces points qui ne sont pas unis pour l'involution I_p forment des groupes de cette involution. Soit h le nombre de ces groupes de p points distincts; il leur correspond, sur la courbe C' , h points formant un groupe H' . La série $|iG' + H'|$ est certainement non spéciale et a la dimension $(2i - 1)(\pi' - 1) + h - 1$. De plus, si $i > 1$, cette série ne possède pas de points fixes. Aux groupes de la série $|iG' + H'|$ correspondent, sur C , des groupes de $2ip(\pi' - 1) + ph$ points variables qui, avec les points fixes de $|G_i|$ qui sont unis pour I_p , forment des groupes canoniques G . On obtiendra ainsi une série partielle composée

au moyen de I_p qui, ayant un groupe commun avec $|G_i|$, devra coïncider avec cette série. Il en résulte que l'on aura $h = 0$. Par suite, les points fixes des séries $|G_2|, |G_3|, \dots, |G_p|$ sont des points unis de l'involution I_p .

D'autre part, on sait que, sur la courbe C , le transformé d'un groupe canonique G' de C' , augmenté du groupe des points unis (comptés $p - 1$ dans le cas d'une involution cyclique d'ordre p), donne un groupe de la série canonique. Par suite, les points fixes de la série $|G_1|$ sont également des points unis de I_p .

5. La série $|G_p|$ est, d'après la formule établie plus haut, dépourvue de points fixes. Les hyperplans découpant cette série sur C contiennent les espaces fondamentaux $S^{(1)}, S^{(2)}, \dots, S^{(p-1)}$ de T ; par suite, tous les points unis de I_p appartiennent à l'espace fondamental $S^{(p)}$.

La série $|G^{p-1}|$ possède δ points fixes, c'est-à-dire; puisque les hyperplans de Σ_{p-1} contiennent $S^{(p)}$, chacun des points unis de I_p compté une fois. L'espace $S^{(p-1)}$ ne peut donc contenir les tangentes à la courbe C aux points unis de I_p .

La série $|G^{p-2}|$ possède 2δ points fixes, c'est-à-dire que l'espace $S^{(p-2)}$ contient les points unis de I_p et les tangentes à C en ces points. Considérons une de ces tangentes; elle est transformée en elle-même par l'homographie T , mais tous ses points ne peuvent être unis, car alors elle appartiendrait à $S^{(p)}$ et par suite à $S^{(p-1)}$. La tangente en question s'appuie donc sur deux espaces fondamentaux de T . L'un de ceux-ci est évidemment $S^{(p)}$; l'autre ne peut être que $S^{(p-1)}$, car autrement la tangente appartiendrait à l'espace $S^{(p-1)}$, ce qu'on a vu être impossible.

On voit donc que les tangentes à la courbe C aux points unis de I_p s'appuient sur l'espace fondamental $S^{(p-1)}$. En continuant de proche en proche, on verrait que les plans osculateurs à la courbe C en ces points unis s'appuient sur

l'espace fondamental $S^{(p-2)}$; les espaces S_3 ayant avec C un contact du troisième ordre en ces points s'appuient sur $S^{(p-3)}$, ...; les espaces S_{p-1} à $p-1$ dimensions ayant un contact d'ordre $p-1$ avec C aux points unis de I_p s'appuient sur $S^{(2)}$.

6. Désignons par D le groupe formé par les δ points unis de I_p sur la courbe C et posons

$$G_1 \equiv \bar{G}_1 + (p-1)D, \quad G_2 \equiv \bar{G}_2 + (p-2)D, \dots, \quad G_{p-1} \equiv \bar{G}_{p-1} + D.$$

Les groupes $\bar{G}_1, \bar{G}_2, \dots, \bar{G}_{p-1}, G_p$ sont donc les transformés respectivement des groupes $G', 2G', \dots, (p-1)G', pG'$ de C' . On a donc

$$\bar{G}_2 \equiv 2\bar{G}_1, \quad \bar{G}_3 \equiv 3\bar{G}_1, \dots, \quad \bar{G}_{p-1} \equiv (p-1)\bar{G}_1, \quad G_p \equiv p\bar{G}_1.$$

Comme $G_1, G_2, \dots, G_{p-1}, G_p$ sont des groupes canoniques de C et, par suite, sont équivalents deux à deux, on en déduit

$$\bar{G}_1 + (p-1)D \equiv 2\bar{G}_1 + (p-2)D \equiv \dots \equiv (p-1)\bar{G}_1 + D \equiv p\bar{G}_1$$

et, par suite,

$$\bar{G}_1 \equiv D, \quad G_p \equiv pD.$$

Il existe donc un hyperplan de l'espace $S_{\pi-1}$ ayant un contact d'ordre $p-1$ avec la courbe C en chacun des points de coïncidence de I_p . Cet hyperplan est, par suite, transformé en lui-même par T et appartient à l'un des systèmes $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_p$. Observons qu'au groupe D correspond, sur C' , un groupe D' formé des $2p(\pi'-1)$ points de diramation. Ce groupe D' appartient à la série (iG') si l'hyperplan envisagé appartient à Σ_i . Comme (iG') a l'ordre $2i(\pi'-1)$, on en conclut que l'hyperplan considéré appartient à Σ_p . Il existe donc un hyperplan uni contenant les espaces fondamentaux $S^{(1)}, S^{(2)}, \dots, S^{(p-1)}$ de T et contenant en outre les points unis de I_p . Comme cet hyperplan ne peut contenir $S^{(p)}$, il faut nécessairement que les points unis de I_p appartiennent à un

espace linéaire de dimension inférieure à $(2p-1)(\pi'-1)-1$.

En résumé, *s'il existe une courbe normale non hyperelliptique C de genre π transformée en elle-même par une homographie cyclique T de période p de l'espace $S_{\pi-1}$, les systèmes d'hyperplans unis découpant sur la courbe C des séries qui sont les transformées respectivement des séries canonique, bicanonique, tricanonique, ... de la courbe C' image de l'involution d'ordre p déterminée par T sur C, l'homographie T possède p espaces fondamentaux $S^{(1)}, S^{(2)}, \dots, S^{(p)}$ de dimensions respectives $\pi'-1, 3\pi'-4, \dots, (2p-1)(\pi'-1)-1$. Les points unis de l'involution I_p déterminée par T sur C appartiennent tous à $S^{(p)}$. En un de ces points unis, la tangente à la courbe C s'appuie sur $S^{(p-1)}$, le plan osculateur sur $S^{(p-2)}$, ..., l'espace linéaire à $p-1$ dimensions ayant un contact d'ordre $p-1$ sur $S^{(2)}$. Il existe un hyperplan uni de l'homographie T passant par $S^{(1)}, S^{(2)}, \dots, S^{(p-1)}$ et ayant un contact d'ordre p avec la courbe en chacun des points unis de I_p (sans contenir l'espace $S^{(p)}$).*

Remarquons que cette dernière conséquence ne peut se traduire en disant que les espaces linéaires S_p à p dimensions ayant un contact d'ordre p avec la courbe C en un point uni s'appuient sur $S^{(1)}$, sauf dans des cas particuliers.

7. Considérons inversement une courbe normale non hyperelliptique, C, de genre π , transformée en elle-même par une homographie T, de période p, ayant p espaces unis $S^{(1)}, S^{(2)}, \dots, S^{(p)}$ présentant les particularités exprimées dans la seconde partie de l'énoncé précédent. Nous allons démontrer que les systèmes d'hyperplans unis $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_p$ de T découpent sur la courbe C des séries qui sont les transformées des séries canonique, bicanonique, ..., p — canonique de la courbe C', image de l'involution I_p déterminée par T sur C.

En conservant les notations précédentes, nous avons par hypothèse

$$G \equiv \bar{G}_1 + (p-1)D \equiv \bar{G}_2 + (p-2)D \equiv \dots \equiv \bar{G}_{p-1} + D \equiv G_p, \\ G_p \equiv pD.$$

On en déduit

$$\bar{G}_1 \equiv D$$

et ensuite

$$\bar{G}_2 \equiv 2\bar{G}_1, \quad \bar{G}_3 \equiv 3\bar{G}_1, \dots, \quad \bar{G}_{p-1} \equiv (p-1)\bar{G}_1, \quad G_p \equiv p\bar{G}_1.$$

A un groupe \bar{G}_i correspond donc sur C' un groupe G'_i tel que

$$G'_i \equiv i\bar{G}_i,$$

car tous les groupes de points envisagés sont transformés en eux-mêmes par T .

Par suite, les conclusions exprimées dans l'énoncé précédent sont caractéristiques des involutions envisagées.

8. Excluons le cas $\pi' = 2$, $p = 2$. En rapportant projectivement les hyperplans de Σ_p aux hyperplans d'un espace linéaire S_r à

$$r = (2p-1)(\pi'-1) - 1$$

dimensions, il correspond à la courbe C une courbe C'_1 d'ordre $2p(\pi'-1)$, simple, image de l'involution I_p et, par suite, birationnellement identique à C' . Les sections de C'_1 par les hyperplans de S_r sont les groupes p — canoniques p G' de cette courbe; nous les désignerons, pour abrégé, par F .

A un groupe canonique quelconque G de C correspond, sur C'_1 , un groupe de points Γ' donnant lieu à la relation fonctionnelle

$$\Gamma' \equiv p\Gamma.$$

Les groupes F' appartiennent à la série linéaire, découpée, sur C'_1 , par les hypersurfaces d'ordre p de S_r . En particulier, au

groupe canonique pD de C correspond, sur C'_1 , un groupe D'_1 découpé par une hypersurface d'ordre p formée d'un hyperplan compté p fois.

Considérons un groupe canonique G_i de C . Comme ce groupe est formé de $2i(\pi' - 1)$ groupes de I_p et du groupe D compté $p - i$ fois, il lui correspond, sur C'_1 , un groupe Γ_i donnant lieu à la relation

$$p\Gamma_i + (p - i)D'_1 \equiv p\Gamma.$$

Ce groupe Γ_i est découpé, sur C'_1 , par des hypersurfaces d'ordre p de S_p , ayant avec la courbe un contact d'ordre $p - 1$ en chaque point du groupe et un contact d'ordre $p - i - 1$ en chaque point de D'_1 . Le groupe Γ_i est évidemment un groupe i — canonique de C'_1 .

9. Il existe effectivement des involutions du type envisagé ci-dessus. En voici un exemple :

Considérons la courbe plane d'ordre six et de genre $\pi = 10$, d'équation

$$x_3^6 + x_3^3 \varphi_3(x_1, x_2) + \varphi_6(x_1, x_2) = 0, \quad (1)$$

où φ_3, φ_6 sont des formes de degrés trois et six en x_1, x_2 .

La courbe (1) est transformée en elle-même par l'homographie

$$\frac{x'_1}{x_1} = \frac{x'_2}{x_2} = \frac{x'_3}{\varepsilon x_3}, \quad (2)$$

où ε est une racine cubique primitive de l'unité. L'homographie (2) engendre, sur la courbe (1), une involution d'ordre trois, I_3 , ayant six points unis

$$x_3 = 0, \quad \varphi_6 = 0,$$

que nous supposerons distincts. La courbe C' , image de l'involution I_3 , est, par suite, de genre $\pi' = 2$.

La série canonique de la courbe (1) est découpée par les cubiques planes. Dans le système de ces cubiques, il y a trois

systèmes partiels de cubiques transformées en elles-mêmes par l'homographie (2). Ce sont

$$x_3^2(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = 0, \quad (3)$$

$$x_3(\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_1 x_2 + \lambda_3 x_2^2) = 0, \quad (4)$$

$$\lambda_1 x_1^3 + \lambda_2 x_1^2 x_2 + \lambda_3 x_1 x_2^2 + \lambda_4 x_2^3 + \lambda x_3^3 = 0. \quad (5)$$

En dehors des points unis de l'involution I_3 , les courbes du système (3) découpent des groupes de six points auxquels correspondent, sur C' , les groupes d'une série linéaire g_2^1 qui est nécessairement la série canonique de cette courbe.

Les courbes du système (4), en dehors des points unis de I_3 , découpent sur la courbe (1) des groupes de douze points auxquels correspondent, sur C' , des groupes de quatre points formés de deux groupes de la série canonique g_2^1 . Ces groupes sont donc les groupes bicanoniques de C' .

Les courbes du système (5) découpent enfin sur la courbe (1) des groupes de dix-huit points auxquels correspondent, sur C' , les groupes d'une série g_6^4 . En particulier, si $\lambda = 0$, ces derniers groupes sont formés de trois groupes de la série canonique g_2^1 ; par suite, la série g_6^4 est bien la série tricanonique de C' .

L'involution I_3 sur la courbe (1) possède donc bien les propriétés des involutions étudiées dans cette note.

On peut observer que l'on obtient le modèle canonique de la courbe (1) en rapportant projectivement les cubiques planes aux hyperplans d'un espace linéaire S_9 à neuf dimensions. La courbe (1) se transforme birationnellement en une courbe C d'ordre dix-huit. Dans la correspondance projective établie, aux points du plan correspondent les points d'une surface F , d'ordre neuf, à sections hyperplanes elliptiques, sur laquelle la courbe C est tracée et est précisément découpée par une hyperquadrique. Les espaces fondamentaux de l'homographie T , de période trois, génératrice de l'évolution I_3 , sont une droite, un plan et un espace linéaire S_4 à quatre dimensions, contenant les six points unis de I_3 . Les tangentes à C en chacun de ces points

s'appuient sur le plan fondamental. Remarquons qu'à la droite $x_3 = 0$ correspond, sur la surface F , une cubique gauche contenant les six points unis de I_3 . Par suite, ceux-ci appartiennent à un espace à trois dimensions.

Pour obtenir la courbe que nous avons appelée plus haut C'_1 , rapportons projectivement les cubiques planes (5) aux hyperplans d'un espace linéaire S_4 à quatre dimensions, en posant

$$\frac{X_0}{x_3^3} = \frac{X_1}{x_1^3} = \frac{X_2}{x_1^2 x_2} = \frac{X_3}{x_1 x_2^2} = \frac{X_4}{x_2^3}.$$

En posant

$$\begin{aligned} \varphi_3(x_1, x_2) &\equiv a_1 x_1^3 + a_2 x_1^2 x_2 + a_3 x_1 x_2^2 + a_4 x_2^3, \\ \varphi_6(x_1, x_2) &\equiv a_{11} x_1^6 + a_{22} x_1^4 x_2^2 + \dots + 2a_{34} x_1 x_2^5, \end{aligned}$$

à la courbe (1) correspond la courbe C'_1 d'équations

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ X_2 & X_3 & X_4 \end{vmatrix} = 0 \tag{6}$$

$$X_0^2 + X_0(a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_4) + a_{11} X_1^2 + a_{22} X_2^2 + \dots + 2a_{34} X_3 X_4 = 0.$$

La courbe C'_1 est donc la section d'un cône cubique rationnel et d'une hyperquadrique. Les points de diramation sont découpés sur C'_1 par l'hyperplan $X_0 = 0$.

Aux courbes (3) correspondent les hypersurfaces cubiques

$$X_0^2(\lambda_1^3 X_1 + 3\lambda_1^2 \lambda_2 X_2 + 3\lambda_1 \lambda_2^2 X_3 + \lambda_2^3 X_4) = 0.$$

Ces hypersurfaces se composent de l'hyperplan $X_0 = 0$ compté deux fois et d'un hyperplan variable ayant un contact du second ordre avec le cône (6) le long d'une génératrice. Par suite, la série g'_2 canonique de C'_1 est découpée sur cette courbe par les génératrices du cône (6).

De même, aux courbes (4) correspondent les hypersurfaces cubiques

$$X_0(\lambda_1^3 X_1^2 + \lambda_2^3 X_1 X_4 + \lambda_3^3 X_4^2 + \dots + 3\lambda_2 \lambda_3^2 X_3 X_4) = 0.$$

La partie variable de ces hypersurfaces est une hyperquadrique conique, de même sommet que le cône (6), ayant un

contact du second ordre le long de deux génératrices de ce dernier avec celui-ci.

10. Nous terminons cette note en recherchant si le cas $\pi' = 2$, $p = 2$ peut se présenter. Sous ces hypothèses, nous avons $\pi = 5$ et la courbe normale C (non hyperelliptique par hypothèse) est d'ordre huit, appartient à un espace linéaire S_4 à quatre dimensions; elle est l'intersection de trois hyperquadriques de cet espace. L'homographie involutive T possède comme espaces fondamentaux une droite $S_1^{(1)}$ et un plan $S_2^{(2)}$. Le nombre de points unis de l'involution I_2 est $\delta = 4$.

Nous prendrons, pour T, l'homographie

$$\frac{x'_1}{x_1} = \frac{x'_2}{x_2} = \frac{x'_3}{x_3} = \frac{x'_4}{-x_4} = \frac{x'_5}{-x_5}.$$

Les espaces fondamentaux sont

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0. \quad (S_1^{(1)})$$

$$x_4 = x_5 = 0. \quad (S_2^{(2)})$$

La courbe C sera l'intersection de trois hyperquadriques transformées par elles-mêmes par T. Les hyperquadriques jouissant de cette propriété forment deux familles : les hyperquadriques d'une famille ne contiennent pas les espaces fondamentaux de T; celles de la seconde famille contiennent ces espaces. Comme la courbe C ne peut rencontrer la droite $S_1^{(1)}$ et doit rencontrer le plan $S_2^{(2)}$ en quatre points, cette courbe doit être l'intersection de deux hyperquadriques de la première famille et d'une hyperquadrique de la seconde. Nous écrirons donc les équations de C sous la forme

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{11}(x_1, x_2, x_3) + \varphi_{12}(x_4, x_5) &= 0, \\ \varphi_{21}(x_1, x_2, x_3) + \varphi_{22}(x_4, x_5) &= 0, \\ x_4(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) - x_5(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) &= 0, \end{aligned} \right\} (1)$$

où les φ sont des formes du second degré.

Les quatre points unis de l'involution I_2 sont donnés par

$$x_4 = x_5 = 0, \quad \varphi_{12} = 0, \quad \varphi_{22} = 0.$$

Pour que cette involution réponde aux conditions imposées, ces quatre points doivent être en ligne droite, ce qui est impossible. Par suite, le cas $\pi' = 2$, $p = 2$ ne peut se présenter.

Il est intéressant de voir comment se présente la courbe image de l'involution I_2 appartenant à la courbe (1). Pour cela, rapportons projectivement les hyperplans passant par la droite $S_1^{(1)}$ aux droites d'un plan, ce qui revient à projeter la courbe (1) à partir de la droite $S_1^{(1)}$ sur le plan $S_2^{(2)}$. On obtient ainsi une courbe d'équation

$$\begin{vmatrix} \varphi_{11}(x_1, x_2, x_3) & \varphi_{12}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3) \\ \varphi_{21}(x_1, x_2, x_3) & \varphi_{22}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3) \end{vmatrix} = 0 \quad (2)$$

dans le plan

$$x_4 = x_5 = 0.$$

La courbe (2) est de quatrième ordre et possède un point double au point

$$a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0. \quad (3)$$

Aux sections de la courbe (1) par les hyperplans passant par le plan $S_2^{(2)}$ correspondent les sections de la courbe (2) par les droites passant par le point (3), c'est-à-dire les groupes de la série canonique g_3^1 de la courbe (2), de genre deux. Aux sections de la courbe (1) par les hyperplans passant par la droite $S_1^{(1)}$ correspondent, sur la courbe (2), les groupes d'une série paracanonique, découpés par les droites du plan.

Liège, 30 octobre 1928.