RECHERCHES

SUR

LES CORRESPONDANCES RATIONNELLES

DU SIXIÈME ORDRE

entre deux surfaces de genres un.

Nos recherches antérieures sur les correspondances rationnelles entre les deux surfaces algébriques de genres un ($p_a = P_4 = 1$) nous ont conduit au résultat suivant (*) : Si F et Φ sont deux surfaces algébriques de genres un entre lesquelles existe une correspondance $(n, 1)$, d'ordre n, le nombre n a nécessairement une des valeurs 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16. Les groupes de n points de F qui correspondent aux points de Φ forment une involution I_n, d'ordre n. S'il existe, sur la surface F, un point qui, compté n fois, forme un groupe de I_n, on a $n \leq 12$. On

---

(*) Sur les transformations rationnelles des surfaces de genres un (*C. R.*, 1912, t. CLV); Sur les involutions de genres un existant sur une surface de genres un (*Bulletins de l'Académie royale de Belgique*, 1913, pp. 310-328); Mémoire sur les involutions appartenant à une surface de genres un (*Annales de l'Ecole Normale supérieure*, 1914, (3), XXXI, pp. 357-430; 1919, (3), XXXVI, pp. 51-70.)

sait, d'après un théorème de M. Enriques (*), que l'involution I_n est engendrée par un groupe de transformations birationnelles de F en elle-même ; un point de la surface F et ses transformés forment un groupe de l'involution I_n. Nous avons montré que si le groupe de transformations générateur de I_n est cyclique, on a $n = 2, 3, 4$ ou 6.

La surface Φ, image de l'involution I_n, possède certains points singuliers, aux points de diramation de la correspondance $(1, n)$ entre Φ et F. Nous avons déterminé ces singularités dans nos travaux cités plus haut. Le problème qui se présente ensuite est la détermination des systèmes de courbes tracées sur la surface Φ; nous avons résolu ce problème pour les involutions d'ordres $n = 2$ (**), $n = 3$ (***), $n = 4$ (IV) et $n = 8$ (V); nous nous proposons de le résoudre ici dans le cas $n = 6$.

(*) F. Enriques. Sulle trasformazioni razionali delle superficie di genere uno. (*Rend. R. Accad. di Bologna*, 1910). Nous avons pu étendre ce théorème aux surfaces algébriques quelconques dans une note « Sur les involutions douées d'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique ». (*Rend. R. Accad. dei Lincei*, 1914, 1er sem., pp. 408-413.)

(**) Mémoire sur les surfaces algébriques doubles ayant un nombre fini de points de diramation. (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1914, pp. 289-312.)

(***) Sur les plans doubles de genres un et de rang trois (*Annaes da Academia polytechnica do Porto*, 1920, pp. 1-9); Recherches sur les involutions cubiques appartenant à une surface algébrique (*Bulletins de l'Académie royale de Belgique*, 1921, pp. 105-124); Sur les surfaces du quatrième ordre possédant six points doubles biplanaires ordinaires (*idem.*, 1922, pp. 443-456.)

(IV) Sur les involutions cycliques d'ordre quatre appartenant à une surface de genres un. (*Bulletins de l'Académie royale de Belgique*, 1923, pp. 75-88, 360-379, 459-483.)

(V) Sur les involutions d'ordre huit, appartenant à une surface de genres un. (*Mém. in-8° de l'Académie royale de Belgique*, 1924, t. VII, pp. 1-33.)

Nous partons d'un modèle projectif normal de la surface Φ. Celle-ci possède six points de diramation et l'on peut supposer sans restriction que les sections hyperplanes du modèle envisagé ne passent pas par ces points. Il existe alors sur la surface Φ cinq systèmes linéaires de courbes passant par les points de diramation. Nous étudions la manière de se comporter de ces courbes en ces points et nous déterminons les relations fonctionnelles reliant les courbes envisagées aux sections hyperplanes et aux courbes rationnelles équivalentes, au point de vue des transformations birationnelles, aux points de diramation.

On sait qu'il existe une grande analogie entre l'étude des correspondances rationnelles entre deux surfaces de genres un et celle des correspondances rationnelles entre une surface de genres un et une surface hyperelliptique de Jacobi ou de Picard ($p_a = -1$, $p_g = P_4 = 1$). Ce dernier problème a été l'objet de recherches importantes de MM. Enriques et Severi, d'une part (*), de MM. Bagnera et De Franchis, d'autre part (**). Nos recherches ne sont cependant pas, comme le lecteur pourra s'en rendre compte, une simple paraphrase des recherches de ces géomètres; ceux-ci ont en effet pu profiter de la représentation paramétrique des surfaces hyperelliptiques par des fonctions Θ et du fait que la surface de Jacobi représente les couples de points d'une courbe de genres deux. Nos

---

(*) F. Enriques et F. Severi. Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques. (*Acta Mathematica*, 1909, t. XXXII, pp. 283-392, t. XXXIII, pp. 321-403.)

(**) Bagnera et De Franchis. Le superficie algebriche le quali ammettono una rappresentazione mediante funzioni iperellitiche di due argomenti (*Mem. Soc. ital. delle Scienze*, 1908, (3), XV, pp. 251-343); Le nombre ρ de M. Picard pour les surfaces hyperelliptiques et les surfaces irrégulières de genre zéro (*Rend. Circolo Matem. di Palermo*, 1910, t. XXX, pp. 185-238.)

méthodes nous ont d'ailleurs permis d'aborder le problème plus général des correspondances rationnelles entre deux surfaces algébriques quelconques (*).

1. — Soient :

F une surface algébrique de genres un ($p_a = P_4 = 1$) contenant une involution cyclique I_6, d'ordre six, ayant pour image une surface de genres un et ne possédant, par suite, qu'un nombre fini de points unis;

T la transformation birationnelle de F en elle-même, de période six, génératrice de l'involution I_6;

Φ une surface algébrique de genres un ($p_a = P_4 = 1$), image de l'involution I_6.

Dans notre Mémoire des *Annales de l'Ecole Normale*, nous avons montré que l'on peut construire, sur F, un système linéaire dépourvu de points-base, composé au moyen de l'involution I_6, mais non composé au moyen d'une autre involution. Aux courbes de ce système correspondent, sur Φ, des courbes que nous désignerons par Γ. Nous désignerons en outre par π le genre des courbes Γ; le système complet $|\Gamma|$ aura le degré $2\pi - 2$ et la dimension π. On pourra d'ailleurs supposer π aussi grand qu'on le veut, en remplaçant éventuellement $|\Gamma|$ par un de ses multiples convenablement choisi.

Nous prendrons comme modèle projectif de la surface Φ, et nous désignerons dorénavant par Φ, la surface

(*) Sur les involutions douées d'un nombre... (*loc. cit.*); Mémoire sur les surfaces algébriques doubles... (*loc. cit.*); Recherches sur les involutions douées d'un nombre fini de points de coïncidence appartenant à une surface algébrique (*Bull. de la Soc. Math. de France*, 1919, t. XLVII, pp. 1-16); Recherches sur les involutions cubiques... (*loc. cit.*).

obtenue en rapportant projectivement les courbes Γ aux hyperplans d'un espace linéaire S_π, à π dimensions. Les sections hyperplanes de cette nouvelle surface Φ seront encore désignées par Γ. D'après ce qui précède, la surface Φ est simple et les points de diramation pour la correspondance (1, 6) entre Φ et F sont isolés.

Les courbes qui correspondent sur F aux courbes Γ seront désignées par C_{23}; ces courbes ont le degré $12\pi - 12$ et, d'après la formule de Zeuthen, le genre $6\pi - 5$. Les courbes C_{23} appartiennent comme courbes totales à un système linéaire complet $|C|$, de degré $12\pi - 12$, de genre et de dimension $6\pi - 5$. Le système $|C_{23}|$ n'étant composé qu'au moyen de l'involution I_6 et ayant la dimension π, le système $|C|$ est nécessairement simple.

Nous prendrons comme modèle projectif de la surface F, et nous désignerons à l'avenir par F, la surface obtenue en rapportant projectivement les courbes C aux hyperplans d'un espace linéaire $S_{6\pi-5}$ à $6\pi - 5$ dimensions. Nous continuerons à désigner par C, C_{23} les transformées des courbes C, C_{23} de la surface F primitive.

La transformation birationnelle T change en elle-même toute courbe C_{23}; par suite elle échange entre elles les courbes du système complet $|C|$. Il en résulte que la transformation T est déterminée, sur F, par une homographie de période six de l'espace linéaire $S_{6\pi-5}$, homographie que nous désignerons toujours par T.

2. — L'homographie T ayant la période 6, l'homographie T^3 est involutive et engendre sur F une involution I_2, d'ordre deux, au moyen de laquelle I_6 est composée. Soit Ψ une surface image de l'involution I_2. A un groupe de I_6 correspond, sur Ψ, un groupe de trois points engendrant sur cette surface une involution I'_3 d'ordre trois. A un groupe de I'_3 correspond un point de la surface Φ; par suite la surface Ψ est de genres un.

L'homographie involutive T^3 possède deux axes (espaces linéaires formés de points unis). De nos recherches antérieures, puisque Ψ est de genres un, l'un de ces axes est un espace linéaire à $3\pi - 4$ dimensions, ne rencontrant pas F, que nous désignerons par $S^{(1)}_{3\pi-4}$. L'autre axe, que nous désignerons par $S^{(2)}_{3\pi-2}$, est un espace linéaire à $3\pi - 2$ dimensions, rencontrant F en huit points qui sont les points unis de l'involution I_2 (et qui sont, par suite, des points unis de l'involution I_6).

L'homographie T^2 a la période trois et engendre, sur F, une involution I_3, d'ordre trois. Soit Θ une surface image de cette involution. L'involution I_6 étant composée au moyen de I_3, à un groupe de I_6 correspondent deux points de la surface Θ; ces deux points engendrent une involution I'_2, d'ordre deux, dont la surface Φ est une image. Il en résulte que la surface Θ est de genres un. En utilisant nos recherches sur les involutions cubiques, on en conclut que l'homographie T^2 possède trois axes. Deux de ces axes, que nous désignerons par $S^{(1)}_{2\pi-3}$, $S^{(2)}_{2\pi-3}$, sont des espaces linéaires à $2\pi - 3$ dimensions, ne rencontrant pas la surface F. Le troisième axe est un espace linéaire $S^{(3)}_{2\pi-1}$, à $2\pi - 1$ dimensions, rencontrant F en six points qui sont les points unis de l'involution I_3 et, par suite, des points unis de l'involution I_6.

L'involution I_6 possède douze points unis. Deux de ces points, que nous désignerons par A_1, A_2, sont des points de coïncidence sextuple, c'est-à-dire que chacun d'eux, compté six fois, forme un groupe de I_6.

Quatre points unis de I_6, que nous désignerons par B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22}, se partagent en deux groupes B_{11}, B_{12} et

B_{21}, B_{22}. Les points d'un groupe étant comptés chacun trois fois, forment un groupe de l'involution I_6. Ces quatre points sont donc des points unis de I_3 et les points de chaque groupe sont échangés entre eux par T^3.

Les six derniers points unis de I_6 forment deux groupes D_{11}, D_{12}, D_{13} et D_{21}, D_{22}, D_{23}.

Les points de l'un des groupes, comptés chacun deux fois, forment un groupe de l'involution I_6.

Les six points sont des points unis de l'involution I_2 et les points de chaque groupe sont échangés entre eux par l'homographie T^2.

Les huit points unis de I_2 sont A_1, A_2, D_{11}, D_{12}, ..., D_{23} ; ces points appartiennent donc à l'espace $S^{(3)}_{3\pi-2}$. Les six points unis de I_3, sont A_1, A_2, B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22} ; ces points appartiennent donc à l'espace $S^{(3)}_{2\pi-}$.

Les axes de l'homographie T sont les espaces communs aux axes des homographies T^2, T^3. Désignons par $S^{(ik)}$ l'axe de T commun aux axes $S^{(i)}$ de T^3 et $S^{(k)}$ de T^2, par x_{ik} la dimension de cet espace. Rappelons que, d'après la théorie des homographies, les hyperplans unis pour T passent par tous les axes de cette homographie, sauf par l'un d'eux ; la dimension de ce système d'hyperplans unis est précisément celle de l'axe n'appartenant pas à ces hyperplans.

Les points A_1, A_2 appartenant aux espaces $S^{(2)}_{3\pi-2}$, $S^{(3)}_{2\pi-1}$, l'axe $S^{(23)}$ de T existe certainement. D'autre part, nous connaissons un système d'hyperplans unis, c'est celui qui découpe, sur F, le système $|C_{23}|$ des courbes transformées des courbes Γ de Φ. Ce système est dépourvu de points-base et, par suite, ses courbes ne passent pas par A_1, A_2. Les autres points unis de l'involution I_6 ne peuvent appartenir à des axes de T. Il en résulte que les hyperplans découpant sur F les courbes C_{23} passent par tous les axes de T, sauf par $S^{(23)}$. Comme $|C_{23}|$ a la dimension π, l'axe $S^{(23)}$ est un espace linéaire à π dimensions; nous le désignerons dorénavant par $S^{(23)}_{\pi}$.

Les points de l'espace $S^{(3)}_{2\pi-1}$ étant unis pour T^2, l'homographie T détermine, dans cet espace, une homographie involutive ayant nécessairement deux axes distincts. L'un de ceux-ci est $S^{(23)}_{\pi}$; l'autre, $S^{(13)}$, a nécessairement la dimension $\pi - 2$; nous le désignerons par $S^{(13)}_{\pi-2}$.

Désignons par C_1 les courbes découpées par les hyperplans contenant $S^{(1)}_{3\pi-4}$, sur F. Les courbes C_1 forment un système linéaire $|C_1|$, de dimension $3\pi - 2$, composé au moyen de l'involution I_2. En rapportant projectivement les courbes C_1 aux hyperplans d'un espace linéaire $S_{3\pi-2}$ à $3\pi - 2$ dimensions, F se transforme donc en une surface Ψ, d'ordre $6\pi - 6$, image de l'involution I_2 et, par suite, de genres un. Nous avons vu que Ψ contenait une involution I'_3 d'ordre trois et de genres un, n'ayant, par suite, qu'un nombre fini de points unis. Le système $|C'_1|$ des sections hyperplanes de Ψ contient, comme on sait, trois systèmes linéaires partiels composés au moyen de I'_3; à ces systèmes correspondent, sur F, des systèmes linéaires de sections hyperplanes composés au moyen de I_6. L'un des trois systèmes envisagés sur Ψ est formé par les courbes qui correspondent aux courbes Γ de Φ et aux courbes C_{23} de F; ce système a la dimension π; par suite, les deux autres ont la dimension $\pi - 2$ tous deux. A l'un de ces systèmes correspond, sur F, le système de courbes découpées par les hyperplans passant par les espaces $S^{(1)}_{3\pi-5}$, $S^{(22)}$, $S^{(23)}_{\pi}$; il en résulte que l'espace $S^{(21)}$ a la dimension $\pi - 2$; nous le désignerons par $S^{(21)}_{\pi-2}$. A l'autre système considéré sur Ψ correspond, sur F, le système de courbes découpées par les hyperplans passant par $S^{(1)}_{3\pi-5}$, $S^{(21)}_{\pi-2}$ et $S^{(23)}_{\pi-2}$; par suite, l'axe $S^{(22)}$ a $\pi - 2$ dimensions; il sera désigné par $S^{(22)}_{\pi-2}$.

Les points de l'espace $S^{(1)}_{2\pi-3}$ étant unis pour T^2, T détermine dans cet espace une homographie involutive possédant deux espaces unis ; l'un d'eux est l'axe $S^{(21)}_{\pi-2}$ de T ; l'autre est donc un espace linéaire à $\pi - 2$ dimensions, $S^{(11)}$, que nous désignerons par $S^{(11)}_{\pi-2}$.

On établit de même que le sixième axe de l'homographie T est un espace linéaire à $\pi - 2$ dimensions ; il sera désigné par $S^{(12)}_{\pi-2}$.

3. — La surface Φ possède six points de diramation, qui sont (*) :

Deux points de diramation sextuple, A'_1, A'_2, correspondant respectivement aux points unis A_1, A_2 de F. Chacun des points A'_1, A'_2 est un point double biplanaire de la surface Φ, auquel sont infiniment voisins successifs deux points doubles dont le dernier est conique.

Deux points de diramation triple B'_1, B'_2, qui correspondent : le premier au groupe de l'involution I_6 formé par les points unis B_{11}, B_{12} ; le second au groupe formé par les points B_{21}, B_{22}. Les points B'_1, B'_2 sont les points doubles biplanaires ordinaires de la surface Φ.

Deux points de diramation double D'_1, D'_2, qui correspondent respectivement aux groupes de l'involution I_6 formés par les points D_{11}, D_{12}, D_{13} et D_{21}, D_{22}, D_{23}. Les points D'_1, D'_2 sont des points doubles coniques de la surface Φ.

Concernant les relations entre les courbes du système $|C_{23}|$ et les points unis A_1, A_2, nous avons en outre établi ce qui suit :

Les courbes C_{23} assujetties à passer par le point A_1, par exemple, acquièrent en ce point un point double

(*) Voir notre Mémoire des *Annales de l'Ecole Normale*.

à tangentes fixes ; à ces courbes correspondent, sur Φ, les $\infty^{\pi-1}$ courbes Γ passant par A'_1. Celles des courbes C_{23} envisagées, assujetties en outre à avoir en A_1 une tangente distincte des deux tangentes fixes, acquièrent en A_1 un point quadruple auquel sont infiniment voisins deux points doubles situés un sur chacune des tangentes fixes aux courbes précédentes ; à ces courbes correspondent sur Φ les $\infty^{\pi-2}$ courbes Γ découpées par les hyperplans passant par A'_1 et par le premier point double infiniment voisin de ce point. Enfin, les courbes C_{23} considérées en dernier lieu, assujetties à avoir une nouvelle tangente en A_1, acquièrent en ce point un point sextuple à tangentes variables. A ces courbes correspondent, sur Φ, les $\infty^{\pi-3}$ courbes Γ découpées par les hyperplans passant par A'_1 et par les deux points doubles infiniment voisins successifs de ces points.

Les courbes C_{23}, assujetties à passer par le point B_{11} (ou B_{21}), passent en conséquence par B_{12} (ou B_{22}) et acquièrent en ces points des points doubles à tangentes fixes. Il correspond à ces courbes, sur Φ, les $\infty^{\pi-1}$ courbes Γ passant par le point B'_1 (ou B'_2). Celles de ces courbes C_{23} assujetties en outre à avoir une troisième tangente distincte des tangentes fixes en l'un des points B_{11}, B_{12} (ou en l'un des points B_{21}, B_{22}), acquièrent en ces points des points triples à tangentes variables. A ces courbes correspondent, sur Φ, les $\infty^{\pi-2}$ courbes Γ découpées par les hyperplans passant par la droite commune aux deux plans tangents à la surface au point B'_1 (ou B'_2).

Enfin, les courbes C_{23}, assujetties à passer par le point D_{11} (ou D_{21}), passent en conséquence par les points D_{12}, D_{13} (ou D_{22}, D_{23}) et ont des points doubles à tangentes variables en ces trois points. A ces courbes correspondent, sur Φ, les $\infty^{\pi-1}$ courbes Γ passant par le point D'_1 (ou D'_2).

4. — Les points unis de l'involution I_6, sur la surface F, sont par hypothèse des points simples de cette surface. Soit α_1 le plan tangent à la surface F en A_1. Nous avons établi antérieurement que les points de F, infiniment voisins du point A_1, étaient unis pour l'homographie T^3; cette homographie détermine donc, dans le plan α_1, une homologie involutive dont le centre est A_1. L'axe de cette homologie ne peut passer par A_1 et est, par suite, une droite de l'espace $S^{(1)}_{3\pi-4}$. Désignons par t_{11}, t_{12} les tangentes en A_1 aux courbes C_{23} assujetties à passer par ce point. Nous avons établi que les points infiniment voisins de A_1 situés sur ces droites étaient unis pour I_6; par suite, ces droites t_{11}, t_{12} sont transformées en elles-mêmes par l'homographie T. Le plan α_1 ne pouvant, d'après ce qui précède, avoir plus d'un point en commun avec $S^{(2)}_{3\pi-2}$ et par suite avec $S^{(23)}_{\pi}$, les droites t_{11}, t_{12} s'appuient sur l'un des espaces $S^{(11)}_{\pi-2}$, $S^{(12)}_{\pi-2}$, $S^{(13)}_{\pi-2}$. Observons que ces deux droites ne peuvent s'appuyer sur un même de ces espaces, car alors T déterminerait dans le plan α_1 une homologie de période six, de centre A_1, et tous les points de F infiniment voisins de A_1 seraient invariants pour T, alors qu'ils ne sont invariants que pour T^3. Cela étant, supposons, pour fixer les idées, que la droite t_{11} s'appuie sur l'espace $S^{(11)}_{\pi-2}$. On sait, d'après la théorie des involutions cubiques, que les hyperplans passant par les espaces $S^{(1)}_{2\pi-3}$, $S^{(2)}_{2\pi-3}$ et par le point A_1 découpent sur F des courbes, transformées en elles-mêmes par T^2, ayant un point double en A_1 et pour tangentes en ce point t_{11} et t_{12}. Il en résulte que t_{12} ne peut s'appuyer sur $S^{(13)}_{\pi-2}$, donc s'appuie sur $S^{(12)}_{\pi-2}$. Le plan α_1, tangent à F en A_1, s'appuie donc en un point sur chacun des espaces $S^{(11)}_{\pi-2}$, $S^{(12)}_{\pi-2}$, $S^{(23)}_{\pi}$. De même, le plan α_2, tangent à la surface F en A_2, s'appuie en un point sur chacun de ces espaces.

Soient β_{11}, β_{12} les plans tangents à F en B_{11}, B_{12} respectivement. Ces points étant unis pour l'involution I_3, d'après la théorie des involutions cubiques, les plans β_{11}, β_{12} s'appuient chacun en un point sur $S^{(1)}_{2\pi-3}$ et en un point sur $S^{(2)}_{2\pi-3}$. Les droites joignant B_{11} (ou B_{12}) aux points d'appui de β_{11} (ou β_{12}) sur $S^{(1)}_{2\pi-3}$, $S^{(2)}_{2\pi-3}$, sont tangentes en B_{11} (ou B_{12}) aux sections de F par les hyperplans passant par ces espaces et par B_{11} (ou B_{12}). On observera que T faisant correspondre B_{12} à B_{11}, le plan β_{12} correspond à β_{11}; de plus, la droite $B_{11}B_{12}$ s'appuie sur $S^{(13)}_{\pi-2}$ et $S^{(23)}_{\pi}$.

On arrive à des conclusious analogues pour les plans tangents β_{21}, β_{22} à F aux points B_{21}, B_{22}.

Soient δ_{11}, δ_{12}, δ_{13} les plans tangents à F aux points D_{11}, D_{12}, D_{13} respectivement. On sait que les points de F infiniment voisins de D_{1i} ($i = 1, 2, 3$) sont invariants pour T^3. L'homographie T détermine donc, dans le plan δ_{1i}, une homologie harmonique de centre D_{1i}, dont l'axe appartient nécessairement à l'espace $S^{(1)}_{3\pi-4}$. Les plans δ_{11}, δ_{12}, δ_{13} s'appuient donc suivant une droite chacun sur cet espace. L'homographie T faisant correspondre D_{12} à D_{11} et D_{13} à D_{12}, le plan δ_{12} correspond au plan δ_{11}, et le plan δ_{13} au plan δ_{12}. De plus, le plan $D_{11}D_{12}D_{13}$ s'appuie en un point sur chacun des espaces $S^{(21)}_{\pi-2}$, $S^{(22)}_{\pi-2}$ et $S^{(23)}_{\pi}$.

On a des résultats analogues pour les plans δ_{21}, δ_{22}, δ_{23} tangents à F aux points D_{21}, D_{22}, D_{23}.

5. — Les hyperplans passant par cinq des six axes de l'homographie T sont unis pour celles-ci; ils découpent sur F des courbes transformées en elles-mêmes par T. Nous désignerons par C_{ik} les courbes découpées, sur F, par les hyperplans passant par les axes de T, sauf par l'espace $S^{(ik)}$.

Le système $|C_{23}|$, déjà considéré, a la dimension π; les autres systèmes, $|C_{11}|$, $|C_{12}|$, $|C_{13}|$, $|C_{21}|$, $|C_{22}|$, ont chacun la dimension $\pi - 2$. Ces six systèmes sont composés au moyen de l'involution I_6; par conséquent, il leur correspond, sur la surface Φ, des systèmes linéaires complets.

Au système $|C_{23}|$ correspond le système des sections hyperplanes $|\Gamma|$ de Φ. Nous désignerons par $|\Gamma_{11}|$, $|\Gamma_{12}|$, $|\Gamma_{13}|$, $|\Gamma_{21}|$, $|\Gamma_{22}|$ les systèmes qui correspondent, sur la surface Φ, respectivement aux systèmes $|C_{11}|$, $|C_{12}|$, $|C_{13}|$, $|C_{21}|$, $|C_{22}|$. Ces systèmes sont complets et ont la dimension $\pi - 2$; comme la surface Φ est de genres un, ces systèmes ont le genre $\pi - 2$ et le degré $2\pi - 6$.

Une courbe C_{23} et une courbe C_{11} ont en commun $12\pi - 12$ points, tous variables avec ces courbes. Comme ces deux courbes sont transformées en elles-mêmes par T, le groupe formé par ces points est transformé en lui-même par T. Il lui correspond donc, sur Φ, un groupe de $2\pi - 2$ points. Il en résulte que les courbes Γ, sections hyperplanes de Φ, rencontrent une courbe Γ_{11} en $2\pi - 2$ points; par suite, les courbes Γ_{11} sont d'ordre $2\pi - 2$. Il en est de même des courbes Γ_{12}, Γ_{13}, Γ_{21}, Γ_{22}.

Il existe donc, sur la surface Φ, cinq systèmes linéaires de courbes d'ordre $2\pi - 2$, de genre $\pi - 2$ et de degré $2\pi - 6$. Ce sont ces systèmes que nous allons étudier.

Observons qu'à une courbe C arbitraire de F correspond sur Φ une courbe Γ^* de genre effectif $6\pi - 5$; sur la courbe C se trouvent $30\pi - 30$ couples de points faisant partie d'un même groupe de I_6; par suite, la courbe Γ^* possède $30\pi - 30$ points doubles (en des points simples de Φ) et cette courbe appartient donc comme courbe totale à un système linéaire complet $|\Gamma^*|$ de genre $36\pi - 35$ et de degré $72\pi - 72$.

Faisons varier la courbe C dans le système $|C|$ sur F d'une manière continue, de façon à ce qu'elle vienne coïncider avec une courbe C_{23}. La courbe Γ^* varie d'une manière continue dans $|\Gamma^*|$ sur Φ et vient coïncider avec la courbe $6\,\Gamma$ correspondante. Il en résulte que l'on a

$$|\Gamma^*| = |6\,\Gamma|.$$

Faisons maintenant varier la courbe C dans $|C|$ d'une manière continue en l'amenant à coïncider avec une courbe C_{11}. La courbe Γ^* correspondante vient cette fois coïncider avec une courbe $6\,\Gamma_{11}$, augmentée des composantes des points de diramation de Φ commun à toutes les courbes Γ_{11}.

On conclut de ceci que les courbes $6\,\Gamma_{11}$, $6\,\Gamma_{12}$, $6\,\Gamma_{13}$, $6\,\Gamma_{21}$, $6\,\Gamma_{23}$ appartiennent, mais non comme courbes totales, au système linéaire $|6\,\Gamma|$.

6. — Un point double conique d'une surface algébrique équivaut, au point de vue des transformations birationnelles, à une courbe rationnelle de degré -2. Nous désignerons par d_1, d_2 les courbes équivalentes aux points doubles coniques D'_1, D'_2 de Φ.

Un point double biplanaire équivaut à l'ensemble de deux courbes rationnelles de degré -2, ayant un point commun. Nous désignerons par b_{11}, b_{12} les courbes rationnelles équivalentes au point double biplanaire B'_1 de Φ, par b_{21}, b_{22} celles qui sont équivalentes au point B'_2.

Envisageons maintenant le point A'_1. Projetons la surface Φ, à partir de A'_1, sur un hyperplan de l'espace S_π ne contenant pas A'_1. Dans cet hyperplan $S_{\pi-1}$, nous obtenons une surface Φ', d'ordre $2\pi - 4$. Aux points infiniment voisins de A_1', situés sur les plans tangents à la surface Φ en A_1', correspondent les points de deux droites coplanaires tracées sur Φ' ; désignons ces droites par a_{11}, a_{12}. Ce sont des courbes rationnelles de degré -2. Le point intersection de ces droites est un point double A_1'' qui correspond au point double infiniment voisin de A_1' sur Φ. Au point double conique infiniment voisin successif de Φ correspond un point double conique de Φ', infiniment voisin de A_1''. Le point A_1'' est, par suite, biplanaire et les plans tangents à Φ' en A_1'' contiennent l'un la droite a_{11}, l'autre la droite a_{12}, ou bien l'un de ces plans tangents contient les deux droites.

Projetons la surface Φ' à partir de A_1'' sur un espace linéaire $S_{\pi-2}$ à $\pi - 2$ dimensions, ne passant pas par A_1''. Nous obtenons une surface Φ'', d'ordre $2\pi - 6$. Aux points de Φ', infiniment voisins de A_1'', correspondent les points de deux droites a_1', a_2', de degré -2, tracées sur Φ''. Aux droites a_{11}, a_{12} correspondent des points doubles coniques de la surface Φ''. Deux cas peuvent se présenter : l'un de ces points se trouve sur la droite a_{11}', l'autre sur la droite a_{12}', ou bien les deux points se trouvent sur une des droites a_{11}', a_{12}', par exemple sur a_{11}'. Au point double conique, infiniment voisin de A_1'' sur Φ', correspond un point double conique de Φ'' situé à l'intersection des droites a_{11}', a_{12}' ; ce point double est équivalent à une courbe rationnelle de degré -2, que nous désignerons par a_1, et qui a un point commun avec chacune des droites a_{11}', a_{12}', mais qui ne rencontre ni a_{11}, ni a_{12}.

Le point A_1' est donc équivalent à un ensemble de cinq courbes rationnelles a_{11}, a_{12}, a_{11}', a_{12}', a_1, de degré -2.

Désignons par Γ' les sections de Φ par les hyperplans passant par A_1'. Les courbes Γ' correspondent donc aux sections hyperplanes de la surface Φ' ; elles seront liées aux courbes Γ par une relation fonctionnelle de la forme (λ_1, λ_2, λ étant des entiers positifs ou nuls)

$$\Gamma' \equiv \Gamma - a_{11} - a_{12} - \lambda_1 a'_{11} - \lambda_2 a'_{12} - \lambda a_1.$$

Supposons que les droites a_{11}, a_{12} de la surface Φ' appartiennent toutes deux à un des plans tangents à cette surface en A''_1. Cela revient à supposer que les courbes a_{11}, a_{12} rencontrent toutes deux en un point une des courbes a'_{11}, a'_{12}, par exemple a'_{11}, mais ne rencontrent pas l'autre. Observons que la courbe a_1 rencontre a'_{11}, a'_{12} chacune en un point, mais ne rencontre pas a_{11}, a_{12}. Les courbes Γ' rencontrent a_{11}, a_{12} chacune en un point, mais ne rencontrent pas, en général, a'_{11}, a'_{12} ni a_1. En exprimant ces conditions, on trouve que λ_1, λ_2, λ doivent satisfaire aux équations

$$\lambda_1 = 1, \quad 2\lambda_1 - \lambda = 2, \quad 2\lambda_2 - \lambda = 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda = 0.$$

Ces équations sont incompatibles; donc il faut nécessairement que l'une des courbes a_{11}, a_{12} rencontre une seule des courbes a'_{11}, a'_{12}; nous supposerons que a_{11} rencontre a'_{11} (en un point) et que a_{12} rencontre a'_{12}. Si nous désignons alors par Γ'', Γ''' les sections hyperplanes de Φ qui correspondent respectivement aux sections hyperplanes de Φ'' et à celles de ces sections faites par des hyperplans passant par A'''_1, nous avons

$$\begin{aligned}
\Gamma &\equiv \Gamma' + a_{11} + a_{12} + a'_{11} + a'_{12} + a_1,\\
\Gamma &\equiv \Gamma'' + a_{11} + a_{12} + 2a'_{11} + 2a'_{12} + 2a_1,\\
\Gamma &\equiv \Gamma''' + a_{11} + a_{12} + 2a'_{11} + 2a'_{12} + 3a_1.
\end{aligned}$$

Le point A'_2 est de même équivalent à cinq courbes rationnelles a_{21}, a_{22}, a'_{21}, a'_{22}, a_2, de degré -2, formant une configuration analogue.

7. — Nous allons actuellement étudier la surface Ψ, image de l'involution I_2 engendrée sur F par T^3.

Comme nous l'avons vu plus haut, en rapportant projectivement les hyperplans de l'espace $S_{6\pi-5}$ passant par l'espace $S^{(1)}_{3\pi-4}$ aux hyperplans d'un espace linéaire $S_{3\pi-2}$ à $3\pi - 2$ dimensions, la surface F se transforme en un modèle projectif de la surface Ψ, d'ordre $6\pi - 6$, à sections hyperplanes de genre $3\pi - 2$. Nous désignerons par C' ces sections hyperplanes.

Aux points A_1, A_2, D_{11}, $D_{12}, \ldots$, D_{23}, unis pour l'involution I_2, correspondent, sur la surface Ψ, des points de diramation qui sont des points doubles coniques de cette surface.

La surface Ψ contient une involution I'_3, d'ordre trois, de genres un et, par suite, cyclique. Soit T_1 la tranformation birationnelle de Ψ en elle-même génératrice de l'involution I'_3. La transformation T_1 échange entre elles les sections hyperplanes de Ψ; par suite, elle est déterminée sur cette surface par une homographie de l'espace ambiant $S_{3\pi-2}$, homographie que nous désignerons encore par T_1.

L'homographie T_1 possède trois axes, deux de dimension $\pi - 2$, que nous désignerons par $S'^{(1)}_{\pi-2}$, $S'^{(2)}_{\pi-2}$, le dernier de dimension π, que nous désignerons par $S'^{(3)}_{\pi}$. Les hyperplans de $S_{3\pi-2}$ passant par $S'^{(1)}_{\pi-2}$, $S'^{(2)}_{\pi-2}$ découpent, sur Ψ, des courbes C'_{23} qui correspondent aux courbes C_{23} de la surface F et forment un système composé au moyen de I'_3. On en conclut que les espaces $S'^{(1)}_{\pi-2}$, $S'^{(2)}_{\pi-2}$ ne peuvent rencontrer la surface Ψ. Il en résulte que l'espace $S'^{(3)}_{\pi}$ rencontre Ψ aux points unis de l'involution I'_3. Ces points sont les deux points qui correspondent à A_1, A_2 et les deux points qui correspondent aux couples de points B_{11}, B_{12} et B_{21}, B_{22} de F.

Les hyperplans passant par $S'^{(2)}_{\pi-2}$, $S'^{(3)}_{\pi}$ découpent sur Ψ des courbes C'_{21} qui correspondent aux courbes C_{21} de F, et les hyperplans passant par $S'^{(1)}_{\pi-2}$, $S'^{(3)}_{\pi}$ découpent sur Ψ des courbes C'_{22} correspondant aux courbes C_{22} de F.

Désignons par P le point de Ψ qui correspond au point A_1 de F; par ψ le cône tangent (irréductible) en ce point à la surface Ψ; par Σ_3 l'espace linéaire à trois dimensions déterminé par ce cône. On sait que les génératrices du cône ψ correspondent biunivoquement aux tangentes à la surface F en A_1; par suite, ces génératrices sont échangées entre elles par l'homographie T_1. Aux tangentes t_{11}, t_{12} à F en A_1, qui sont unies pour T, correspondent deux génératrices p_1, p_2 du cône ψ, unies pour l'homographie T_1.

L'espace Σ_3 est transformé en lui-même par T_1 et cette homographie détermine, dans cet espace, une homographie de période trois que nous désignerons par T_{11}. Les plans ϖ_1, ϖ_2, tangents au cône ψ respectivement le long des génératrices p_1, p_2, sont unis pour T_{11}; il en est de même du plan ϖ déterminé par p_1, p_2.

Les courbes C_{11} passant par A_1 ont en ce point un point double à tangentes fixes t_{11}, t_{12}; par suite, les courbes C'_{11} passant par P y ont un point double avec, comme tangentes, les droites p_1, p_2. Il en résulte que ces droites p_1, p_2 rencontrent chacune l'un ou l'autre des espaces $S'^{(1)}_{\pi-2}$, $S'^{(2)}_{\pi-2}$. Supposons que p_1, p_2 rencontrent toutes deux l'espace $S'^{(1)}_{\pi-2}$, par exemple. La droite p' commune à ϖ et à cet espace est un axe de l'homographie T_{11}. D'autre part, la droite p commune aux plans ϖ_1, ϖ_2 est unie pour T_{11} et tout plan passant par cette droite rencontrant p en un point uni est uni. Un tel plan doit rencontrer le cône uni ψ suivant trois droites qui se correspondent par T_{11}, ce qui est absurde, puisque le cône ψ est du second ordre. Il en résulte que la droite

p_1 rencontre un des espaces $S'^{(1)}_{\pi-2}$, $S'^{(2)}_{\pi-2}$, par exemple le premier, la droite p_2 rencontrant le second. Nous désignons par P_1 le point d'appui de p_1 sur $S'^{(1)}_{\pi-2}$, par P_2 celui de p_2 sur $S'^{(2)}_{\pi-2}$.

Cela étant, la droite p commune aux plans ϖ_1, ϖ_2 est nécessairement un axe de l'homographie T_{11} ; cette droite appartient, par suite, tout entière à l'espace $S'^{(3)}_{\pi}$. Dans l'espace Σ_3, l'homographie T_{11} est une homographie axiale hyperbolique, d'axe p et de points unis P_1, P_2.

Projetons la surface Ψ du point P sur un espace linéaire $S_{3\pi-3}$, à $3\pi - 3$ dimensions, ne passant pas par P. Nous obtenons ainsi une surface Ψ', normale, d'ordre $6\pi - 8$, dont les sections hyperplanes, que nous désignerons par C'', ont le genre $3\pi - 3$. A l'homographie T_1 correspond une homographie T_2 de $S_{3\pi-3}$, car T_1 échange entre elles les sections de Ψ par des hyperplans passant par P. L'homographie T_2 change la surface Ψ' en elle-même. L'homographie T_2 possède comme axes trois espaces $S''^{(1)}_{\pi-2}$, $S''^{(2)}_{\pi-2}$, $S''^{(3)}_{\pi-1}$, respectivement projections des axes $S'^{(1)}_{\pi-2}$, $S'^{(2)}_{\pi-2}$, $S'^{(3)}_{\pi}$ de T_1.

Au domaine du point P, sur la surface Ψ, correspond, sur la surface Ψ', une conique ψ' intersection du cône ψ et de l'espace $S_{3\pi-3}$ sur lequel se fait la projection. Cette conique ψ' est transformée en elle-même par T_2. Aux points P_1, P_2 correspondent des points P'_1, P'_2 de ψ' situés, le premier sur l'espace $S''^{(1)}_{\pi-2}$, le second sur l'espace $S''^{(2)}_{\pi-2}$.

Les sections hyperplanes de Ψ' par les hyperplans passant par les espaces $S''^{(1)}_{\pi-2}$, $S''^{(2)}_{\pi-2}$ sont des courbes C''_{23}, projections des courbes C'_{23} passant par P. Ces courbes passent par P'_1, P'_2.

Les hyperplans de $S_{3\pi-3}$, contenant le plan de la conique ψ', découpent sur la surface Ψ' des courbes $C'' - \psi'$ rencontrant en quatre points la conique ψ'. En particulier, les courbes C''_{23}, contenant un point de ψ' distinct de P'_1, P'_2, contiennent cette conique comme partie, et les parties restantes, $C''_{23} - \psi'$, rencontrent ψ' en quatre points. Comme les courbes $C''_{23} - \psi'$ et ψ' sont transformées en elles-mêmes par T_2, ces quatre points tombent nécessairement en P'_2, P'_3, qui sont, par suite, des points doubles pour les courbes $C''_{23} - \psi'$. Ces courbes correspondent aux courbes C_{23} de F ayant en A_1 un point quadruple et deux points doubles infiniment voisins sur t_{11}, t_{12}; elles correspondent, d'autre part, aux courbes Γ'' de la surface Φ.

Les courbes $C'' - 2\psi'$ sont découpées, sur Ψ', par les hyperplans touchant cette surface le long de la conique ψ'. Ces courbes rencontrent la conique ψ' en six points. En particulier, les courbes $C''_{23} - 2\psi'$ rencontrent ψ' en six points formant deux groupes de l'involution d'ordre trois qui correspond sur Ψ' à l'involution I'_3 de Ψ. Les courbes $C''_{23} - 2\psi'$ correspondent aux courbes C_{23} de F ayant en A_2 un point sextuple à tangentes variables, et aux courbes Γ''' découpées sur Φ par les hyperplans contenant les trois points doubles infiniment voisins successifs composant la singularité de cette surface en A'_1. Les courbes Γ'' rencontrent la courbe rationnelle a_1 de Φ en deux points, mais ne rencontrent pas les courbes a_{11}, a_{12}, a'_{11}, a'_{12}. On en conclut que les points de a_1 représentent les groupes de l'involution projection de I'_3 sur Ψ', appartenant à la conique ψ'. Par suite, les points de a_1 représentent les groupes de l'involution I_6 de F, formés de trois points infiniment voisins de A_1, comptés chacun deux fois.

8. — On peut obtenir une seconde surface Ψ_1, image de l'involution I_2, de la manière suivante : Les hyperplans passant par l'espace $S^{(2)}_{3\pi-2}$ de $S_{6\pi-5}$ découpent, sur la surface F, des courbes formant un système linéaire $\infty^{3\pi-4}$, composé au moyen de l'involution I_2. Par conséquent, si l'on rapporte projectivement ces hyperplans aux hyperplans d'un espace linéaire $S_{3\pi-4}$ à $3\pi - 4$ dimensions, la surface F se transforme en une surface Ψ_1 image de l'involution I_2. La surface Ψ_1 est de genres un et birationnellement équivalente à la surface Ψ. Aux points unis de I_2 correspondent des droites de la surface Ψ_1; en particulier, au point A_1 correspond une droite dont les points représentent les points infiniment voisins de A_1 sur F. Cette droite correspond point par point à la conique ψ' de la surface Ψ' et nous la désignerons également par ψ'.

La surface Ψ_1 contient une involution cyclique d'ordre trois dont les groupes sont formés par les points de cette surface qui correspondent aux points des groupes de I'_3. Soit T'_1 la transformation birationnelle de Ψ_1 en elle-même, génératrice de cette involution. Comme T'_1 échange entre elles les sections hyperplanes de Ψ_1, elle est déterminée par une homographie de l'espace ambiant $S_{3\pi-4}$, homographie que nous désignerons encore par T'_1.

L'homographie T'_1 possède trois axes de même dimension $\pi - 2$; les hyperplans passant par deux de ces axes découpent, sur Ψ_1, les courbes qui correspondent respectivement aux courbes C_{11}, C_{12}, C_{13} de la surface F. Désignons ces axes respectivement par $\overline{S}^{(1)}_{\pi-2}$, $\overline{S}^{(2)}_{\pi-2}$, $\overline{S}^{(3)}_{\pi-2}$. Chaque point uni de l'involution engendrée par T'_1 appartient à l'un de ces axes.

Les hyperplans passant par $\overline{S}^{(2)}_{\pi-2}$, $\overline{S}^{(3)}_{\pi-2}$ découpent, sur Ψ_1, des courbes transformées en elles-mêmes par T'_1 et correspondant, pour fixer les idées, aux courbes C_{11} de F. Désignons ces courbes par C'_{11}. Comme les courbes C_{11} passent par A_1, A_2, B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22}, les axes de T'_1

considérés contiendront quatre des points unis de l'involution engendrée par cette homographie (à chacun des couples B_{11}, B_{12} et B_{21}, B_{22} ne correspond qu'un des points unis en question).

Nous supposons que les hyperplans passant par $\overline{S}^{(1)}_{\pi-2}$, $\overline{S}^{(3)}_{\pi-2}$ découpent, sur Ψ_1, les courbes C'_{12} correspondant aux courbes C_{12} de F. Alors, les hyperplans passant par $\overline{S}^{(1)}_{\pi-2}$, $\overline{S}^{(2)}_{\pi-2}$ découpent sur Ψ_1 les courbes C'_{13} correspondant aux courbes C_{13} de F.

La droite ψ' est transformée en elle-même par T'_1 et possède deux points invariants pour cette homographie. Nous désignerons ces points par P'_1, P'_2; ils correspondent aux points de même nom de la surface Ψ'. Ce sont des points unis de l'involution engendrée par T'_1.

Les courbes C_{11} passent par A_1 en y ayant comme tangente t_{12}, et les courbes C_{12} passent par le même point en y ayant comme tangente t_{11}. Enfin, les hyperplans découpant sur F les courbes C_{13} contiennent le plan α_1 tangent à F en A_1; par suite, les courbes C_{13} ont un point double (au moins) en A_1. De tout ceci résulte que le point P'_1 appartient à $\overline{S}^{(1)}_{\pi-2}$, le point P'_2 à $\overline{S}^{(2)}_{\pi-2}$; enfin les points de Ψ_1 correspondent aux couples B_{11}, B_{12} et B_{21}, B_{22}, appartiennent à $\overline{S}^{(3)}_{\pi-2}$. On verrait de même que la droite de Ψ_1 correspondant au point A_2 s'appuie sur $\overline{S}^{(1)}_{\pi-2}$, $\overline{S}^{(2)}_{\pi-2}$, en des points qui correspondent respectivement aux points de F infiniment voisins de A_2 sur t_{21}, t_{22} respectivement.

Observons que les hyperplans passant par $\overline{S}^{(1)}_{\pi-2}$, $\overline{S}^{(2)}_{\pi-2}$ contiennent la droite ψ' (et de même la droite qui correspond à A_2); les intersections restantes de ces hyperplans avec Ψ_1 sont les courbes C'_{13}. Ces courbes rencontrent ψ'_1 en deux points qui ne peuvent être que P'_1 et P'_2, puisque ψ'

et les courbes C'_{13} sont transformées elles-mêmes par T'_1. Les courbes C_{13} ont donc pour tangentes en A_1, sur F, les droites t_{11}, t_{12}.

9. — Nous allons passer à l'étude de la surface Θ, image de l'involution I_3 de F.

Les hyperplans passant par les espaces $S^{(1)}_{2\pi-3}$, $S^{(2)}_{2\pi-3}$ découpent, sur F, des courbes formant un système linéaire composé au moyen de l'involution I_3; par suite, en rapportant projectivement ces hyperplans aux hyperplans d'un espace linéaire $S_{2\pi-1}$ à $2\pi - 1$ dimensions, la surface F se transforme en une surface Θ, image de I_3, d'ordre $4\pi - 4$, à sections hyperplanes de genre $2\pi - 1$. Nous désignerons ces sections hyperplanes par G. Aux groupes de l'involution I_6 correspondent, sur la surface Θ, les groupes d'une involution I'_2 dont Φ est l'image. Désignons par τ la transformation birationnelle de Θ en elle-même, génératrice de I'_2. Comme τ échange entre elles les sections hyperplanes G de Θ, cette transformation est déterminée par une homographie involutive, que nous désignerons toujours par τ, de l'espace ambiant $S_{2\pi-1}$.

L'involution I_3 possède, sur F, six points unis A_1, A_2, B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22}. A ces points correspondent, sur Θ, six points doubles biplanaires ordinaires.

Aux courbes C_{13}, C_{23} de F correspondent, sur Θ, des sections hyperplanes que nous désignerons respectivement par G_{13}, G_{23}. Les systèmes $|C_{13}|$, $|C_{23}|$ étant composés au moyen de I_6, les systèmes $|G_{13}|$, $|G_{23}|$ sont composés au moyen de l'involution I'_2. Comme les systèmes $|C_{13}|$, $|C_{23}|$ ont respectivement les dimensions $\pi - 2$, et π, les axes de l'homographie τ sont des espaces $S^{(1)}_{\pi-2}$, $S^{(2)}_{\pi}$ de dimensions respectives $\pi - 2$, π. Les hyperplans de l'espace $S_{2\pi-1}$ passant par $S^{(1)}_{\pi-2}$ découpent, sur Θ, les courbes G_{23}. Comme le système $|C_{23}|$ de F est dépourvu de points-base, il en est de même de $|G_{23}|$ et l'espace $S^{(1)}_{\pi-2}$ ne rencontre pas Θ. Par suite, l'espace $S^{(2)}_{\pi}$ rencontre Θ aux points unis de I'_2 et les courbes G_{13} sont découpées, sur la surface, par les hyperplans passant par $S^{(2)}_{\pi}$. Les points unis de I'_2 sont ceux qui correspondent à A_1, A_2 et aux ternes de points D_{11}, D_{12}, D_{13} et D_{21}, D_{23}, D_{23} de F.

Désignons par R le point uni de I'_2 qui correspond à A_1. Ce point est double biplanaire ordinaire pour Θ; soient ρ_1, ρ_2 les plans tangents à cette surface en ce point, r la droite commune à ces plans, Σ'_3 l'espace linéaire à trois dimensions contenant les plans ρ_1, ρ_2.

D'après l'étude des involutions du troisième ordre, on sait que les points du plan ρ_1, infiniment voisins de R, correspondent à un des points de F infiniment voisins de A_1 sur t_{11}, t_{12}, par exemple sur t_{11}. Les points du plan ρ_2, infiniment voisins de R, correspondent au point de F infiniment voisin de A_1 sur t_2. Enfin, les groupes de I_3, formés de points de F infiniment voisins de A_1, ont pour correspondant le point infiniment voisin de R sur la droite r. Il résulte de ceci que les plans ρ_1, ρ_2 sont transformés chacun en lui-même par τ et que, par suite, l'espace Σ'_3 est transformé en lui-même par τ.

Considérons les courbes G_{23} passant par R et désignons-les par $\overline{G}_{23}$. Ces courbes correspondent aux courbes C_{23} passant par A_1 et ayant en ce point un point double à tangentes fixes t_{11}, t_{12}. Par suite, ces courbes $\overline{G}_{23}$ correspondent aux courbes Γ' de Φ, sections de cette surface par les hyperplans passant par le point A'_1. Les courbes $\overline{G}_{23}$ ont un point au moins double en R. Si l'on applique la formule de Zeuthen à la correspondance (1, 3) entre une courbe $\overline{G}_{23}$ et son homologue C_{23}, on trouve que les courbes $\overline{G}_{23}$ ont le genre $2\pi - 2$. Comme les courbes G_{23} ont en général le genre $2\pi - 1$, on voit que les courbes $\overline{G}_{23}$ ont exactement un point double en R. Ces courbes sont, d'autre part, tangentes en ce point aux plans ρ_1, ρ_2. Les courbes Γ' de Φ ont le degré $2\pi - 4$; donc les courbes $\overline{G}_{23}$ ont le degré $4\pi - 8$. Comme les courbes G_{23} ont en général le degré $4\pi - 4$, la singularité des courbes $\overline{G}_{23}$ en R absorbe quatre intersections. Il faut donc que les courbes $\overline{G}_{23}$ aient des tangentes fixes (dans ρ_1 et ρ_2) au point R. Désignons ces tangentes par r_1 (dans ρ_1) et r_2 (dans ρ_2). Les droites r_1, r_2 sont distinctes de r, car d'après les propriétés des involutions du troisième ordre, aux sections de Θ par des hyperplans contenant r correspondent sur F des courbes ayant un point triple à tangentes variables en A_1.

Les hyperplans de $S_{2\pi-1}$ passant par l'axe $S^{(1)}_{\pi-2}$ de l'homographie τ et par le point R découpent sur Θ les courbes $\overline{G}_{23}$. Ces hyperplans sont en nombre $\infty^{\pi-1}$ et ont, par suite, en commun un espace linéaire à $\pi - 1$ dimensions. Ce dernier contient l'axe $S^{(1)}_{\pi-2}$ et les droites r_1, r_2; il en résulte que ces droites s'appuient sur l'axe $S^{(2)}_{\pi-2}$ en des points que nous désignerons respectivement par R_1, R_2.

L'homographie τ détermine, dans l'espace Σ'_3, une homographie involutive ayant comme axe la droite R_1R_2; cette homographie est donc biaxiale. Le second axe est nécessairement la droite r commune aux plans unis ρ_1, ρ_2. Cette droite r appartient donc au second axe $S^{(2)}_{\pi}$ de l'homographie τ.

Projetons la surface Θ du point R sur un espace linéaire $S_{2\pi-2}$ à $2\pi - 2$ dimensions, ne passant pas par R. Nous obtenons dans cet espace une surface Θ' d'ordre

$4\pi - 6$, à sections hyperplanes de genre $2\pi - 2$. Désignons par G' ces sections hyperplanes, par G'_{23} les projections des courbes $\overline{G}_{23}$, par $S'^{(1)}_{\pi-2}$ la projection de l'espace $S^{(1)}_{\pi-2}$, par $S'^{(2)}_{\pi-1}$ celle de $S^{(2)}_{\pi}$. Les hyperplans de $S_{2\pi-2}$ découpant sur Θ' les courbes G'_{23} passent par $S'^{(1)}_{\pi-2}$. A l'homographie τ correspond une homographie τ' de $S_{2\pi-2}$ ayant comme axes les espaces $S'^{(1)}_{\pi-2}$, $S'^{(2)}_{\pi-1}$.

Aux points infiniment voisins de R sur Θ correspondent les droites r'_1, r'_2 intersections des plans ρ_1, ρ_2 avec l'espace $S_{2\pi-2}$ sur lequel se fait la projection. Ces droites rencontrent l'axe $S'^{(1)}_{\pi-2}$ en des points R'_1, R'_2 projections des points R_1, R_2; elles se rencontrent en un point R' intersection de la droite r avec l'espace $S_{2\pi-2}$, et ce point R' appartient à l'espace $S'^{(2)}_{\pi-1}$. Les droites r'_1, r'_2 sont transformées en elles-mêmes par l'homographie τ', et sur chacune de ces droites on a ainsi une involution d'ordre deux; les points R', R'_1, R'_2 sont les points unis de ces involutions.

Les courbes G'_{23} passent par les points R'_1, R'_2. Comme nous l'avons vu, ces courbes correspondent aux courbes Γ' de Φ. Les courbes Γ' rencontrent en un point chacune des courbes rationnelles a_{11}, a_{12} de Φ. Il en résulte que les points de l'une de ces courbes, par exemple de a_{11}, correspondent aux points de la surface Θ', infiniment voisins de R'_1, et que les points de a_{12} correspondent aux points de Θ', infiniment voisins de R'_2.

Aux courbes C_{23} de F ayant en A_1 la multiplicité quatre et deux points doubles infiniment voisins sur t_{11}, t_{12}, correspondent les courbes G'_{23} découpées sur Θ' par les hyperplans contenant les droites r'_1, r'_2. Ces courbes rencontrent chacune des droites en deux points conjugués par rapport à l'homographie τ'. A ces courbes correspondent, sur Φ, les courbes Γ'' sections de cette surface par les hyperplans passant par A'_1 et par le premier point double infiniment voisin qui lui succède. Les courbes Γ'' rencontrent en un point chacune des courbes rationnelles a'_{11}, a'_{12} de Φ. Il en résulte que les points de a'_{11} représentent les couples de points de r'_1 conjugués par rapport à τ' et les points de a'_{12}, les couples de points analogues situées sur r'_2.

Nous avons rappelé qu'aux groupes de I_3 formés de trois points de F infiniment voisins de A_1 correspondait le point de la droite r, infiniment voisin de R. Par suite, à ces groupes de trois points correspondent, sur la surface Θ', les points de cette surface infiniment voisins de R'. Il en résulte qu'aux courbes C_{23} de F ayant en A_1 un point sextuple à tangentes variables, correspondent sur Θ' des courbes G'_{23} ayant en R' un point double tangentes variables. A ces courbes correspondent, sur la surface Φ, les courbes Γ''' sections de cette surface par les hyperplans passant par A'_1 et par les deux points doubles infiniment voisins successifs de ce point. Ces courbes Γ''' rencontrent la courbe a_1 en deux points et, par suite, les points de la courbe a_1 correspondent aux points de la surface Θ', infiniment voisins de R'.

10. — Les hyperplans passant par les espaces $S^{(2)}_{2\pi-3}$, $S^{(3)}_{2\pi-1}$ découpent, sur F, les courbes d'un système linéaire composé au moyen de l'involution I_3. Par suite, en rapportant projectivement ces hyperplans aux hyperplans d'un espace linéaire $S_{2\pi-3}$ à $2\pi-3$ dimensions, il correspond à la surface F une surface Θ_1, d'ordre $4\pi-8$, à sections hyperplanes de genre $2\pi-3$, image de l'involution I_3 et, par suite, birationnellement identique à la surface Θ. Nous désignerons par G_1 les sections hyperplanes de Θ_1, par G'_1 les sections hyperplanes correspondant aux courbes C_{11} de F, par G_1'' celles qui correspondent aux courbes C_{21}.

La surface Θ_1 est changée en elle-même par une transformation birationnelle involutive τ_1 génératrice de l'involution I_2'' d'ordre deux dont les groupes correspondent aux groupes de I_6 et dont Φ est l'image. La transformation τ_1 échange entre elles les sections hyperplanes G_1 de Θ_1; donc c'est une homographie de l'espace ambiant $S_{2\pi-3}$. L'homographie τ_1 change en elles-mêmes les courbes G_1' et G_1''; donc les axes de cette homographie sont deux espaces $S'^{(1)}_{\pi-2}$ et $S'^{(2)}_{\pi-2}$, à $\pi - 2$ dimensions.

Aux six points unis A_1, A_2, B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22} de l'involution I_1 sur F correspondent six droites deux à deux gauches de la surface Θ_1. Les droites qui correspondent à A_1, A_2 sont transformées en elles-mêmes par τ_1; la droite qui correspond à B_{11} (ou à B_{22}) est transformée par τ_1 en la droite qui correspond à B_{12} (ou à B_{22}). Les quatre dernières droites ne rencontrent donc pas les axes de l'homographie τ.

Désignons par q la droite qui correspond au point A_1 et observons que les sections de F par les hyperplans passant par $S^{(2)}_{2\pi-3}$, $S^{(3)}_{2\pi-1}$ sont tangentes en A_1 à la droite t_{12}. Les points de la droite q correspondent donc au point de t_{12} infiniment voisin de A_1, c'est-à-dire aux points du plan ρ_2 infiniment voisins de R sur la surface Θ, c'est-à-dire encore aux points de la droite r_2' sur la surface Θ'. Il en résulte que l'homographie τ_1 détermine une involution sur la droite q et que, par suite, cette droite s'appuie sur les deux axes de τ_1.

De la théorie des involutions cubiques (*), il résulte

(*) La propriété dont il va être question n'est pas établie dans nos travaux antérieurs; pour ne pas alourdir notre exposé, nous n'en donnerons la démonstration qu'à la fin de ce mémoire.

que les sections de F par les hyperplans passant par les espaces $S^{(2)}_{2\pi-3}$, $S^{(3)}_{2\pi-1}$, et par la droite t_{11}, ont en A_1 un point double auquel est infiniment voisin, sur la droite t_{11}, un second point double. A ces courbes correspondent, sur Θ_1, les courbes G_1 passant par un point de la droite q qui est double conique pour la surface Θ_1. Parmi les sections de F envisagées se trouvent les courbes C_{21} ; par suite, les courbes G_1'' passent par le point double conique en question, point que nous désignerons par Q_1. Or, les courbes G_1'' sont découpées, sur Θ_1, par les hyperplans passant par l'un des axes de τ_1, par exemple par $S'^{(1)}_{\pi-2}$. Le point Q appartient donc à cet espace.

Le cône χ tangent à la surface Θ_1 au point Q_1 contient la droite q. Le point de cette droite infiniment voisin de Q_1 correspond aux groupes de I_3 formés de points de F, infiniment voisins de A_1 ; ce point correspond donc aux points de Θ', infiniment voisins de R'. Les points du cône χ infiniment voisins de Q_1 correspondent au point de t_{11} infiniment voisin de A_1 et, par suite, aux points de la droite r_1' de la surface Θ'. Le cône χ est donc tranformé en lui-même par τ_1 ; l'une des génératrices unies du cône est la droite q ; l'autre est une droite q' telle que le point infiniment voisin de Q_1 sur cette droite corresponde au point R_1' de la surface Θ'.

Sur la droite q se trouve un second point uni Q_2, appartenant à $S'^{(2)}_{\pi-2}$, qui correspond au point R_2' de la surface Θ'.

On a des résultats analogues pour la droite de la surface Θ_1 qui correspond au point A_2.

Observons encore que les courbes C_{11} passent par les points D_{11}, D_{12}, D_{13}, D_{21}, D_{22}, D_{23}. Les courbes correspondantes G_1' sont découpées, sur Θ_1, par les hyperplans passant par $S'^{(2)}_{\pi-2}$. Il en résulte que cet espace contient les points unis de l'involution I_2'' qui correspondent aux ternes de points D_{11}, D_{12}, D_{13} et D_{21}, D_{22}, D_{23}.

En rapportant projectivement aux hyperplans d'un espace linéaire $S_{2\pi-3}$ à $2\pi - 3$ dimensions les hyperplans de $S_{6\pi-5}$ passant par $S^{(1)}_{2\pi-3}$, $S^{(3)}_{2\pi-1}$, on obtiendrait une surface Θ_2, image de l'involution I_3, birationnellement identique aux surfaces Θ, Θ_1 et possédant des propriétés analogues à cette dernière surface.

11. — Nous sommes maintenant en mesure d'étudier les courbes Γ_{11}, Γ_{12}, Γ_{13}, Γ_{21}, Γ_{22} de la surface Φ. Nous commencerons par les courbes Γ_{11}.

Les courbes C_{11} sont découpées, sur F, par les hyperplans passant par les espaces $S^{(2)}_{3\pi-2}$, $S^{(12)}_{\pi-2}$ et $S^{(13)}_{\pi-2}$; ces courbes passent, par suite, par tous les points unis de l'involution I_6. Les courbes Γ_{11} passeront donc, par suite, par tous les points de diramation de Φ.

Les hyperplans des courbes C_{11} passent par chacun des points D_{11}, D_{12}, D_{13}, D_{21}, D_{22}, D_{23}, mais sans contenir les plans tangents à la surface F en ces points. Les courbes C_{11} passent donc simplement par les points en question et y ont une tangente variable. Il en résulte que les courbes Γ_{11} rencontrent chacune des courbes d_1, d_2 de la surface Φ en un point.

Les hyperplans des courbes C_{11} passent par les points B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22} sans contenir les plans tangents à F en ces points. Les hyperplans en question rencontrent le plan β_{11} tangent à F en B_{11}, par exemple, suivant la droite de ce plan qui rencontre l'espace $S^{(2)}_{2\pi-3}$. Cette droite est unie pour T^2 et les courbes C_{11} lui sont tangentes en B_{11}. De même, les courbes C_{11} touchent en B_{12}, B_{21}, B_{22} respectivement les tangentes à F en ces points qui s'appuient sur $S^{(2)}_{2\pi-3}$. Les courbes Γ_{11} rencontrent donc en un point l'une des courbes b_{11}, b_{12}, par exemple b_{12}, et l'une des courbes b_{21}, b_{22}, par exemple b_{22}, sans rencontrer les autres courbes b_{11}, b_{21}.

Enfin, les hyperplans des courbes C_{11} passent par les tangentes t_{12}, t_{22} à F en A_1, A_2, sans contenir les plans tangents à cette surface en ces points. Aux courbes C_{11} correspondent, sur la surface Θ_1, les courbes G'_1 découpées sur cette surface par les hyperplans passant par $S'^{(2)}_{\pi-2}$, axe de l'homographie τ_1. Les courbes G'_1 passent donc simplement par le point Q_2 et par le point analogue sur la droite qui correspond, sur Θ_1, au point A_2. Nous avons vu qu'au point Q_2 correspond le point R'_2 de Θ' et, par suite, les points de la droite a_{11} de Φ. Par suite, les courbes Γ_{11} rencontrent en un point la droite a_{12}, sans rencontrer les autres droites a_{11}, a'_{11}, a'_{12}, a_1 formant avec a_{12} la singularité de Φ en A'_1. De même, les courbes Γ_{11} rencontrent en un point la droite a_{22}, sans rencontrer a_{21}, a'_{21}, a'_{22}, a_2.

D'après ce qui a été vu plus haut, entre les courbes Γ, Γ_{11}, nous avons une relation fonctionnelle de la forme

$$\begin{aligned} 6\,\Gamma \equiv 6\,\Gamma_{11} &+ \lambda_{11} a_{11} + \lambda_{12} a_{12} + \lambda'_{11} a'_{11} + \lambda'_{12} a'_{12} + \lambda_1 a_1 \\ &+ \lambda_{21} a_{21} + \lambda_{22} a_{22} + \lambda'_{21} a'_{21} + \lambda'_{22} a'_{22} + \lambda_2 a_2 \\ &+ \mu_{11} b_{11} + \mu_{12} b_{12} + \mu_{21} b_{21} + \mu_{22} b_{22} + \nu_1 d_1 + \nu_2 d_2, \end{aligned}$$

les λ, μ, ν étant des entiers qui seront déterminés en exprimant les rencontres des courbes Γ_{11} avec les courbes a_{11}, a_{12}, ..., d_2.

En exprimant que les courbes Γ_{11} rencontrent a_{12} en un point sans rencontrer a_{11} a'_{11} a'_{11}, a_1, on trouve

$$-2\lambda_{11} + \lambda'_{11} = 0, \quad 6 - 2\lambda_{12} + \lambda'_{12} = 0,$$

$$\lambda_{11} \quad 2\lambda'_{11} + \lambda_1 = 0, \quad \lambda_{12} - 2\lambda'_{12} + \lambda_1 = 0, \quad \lambda'_{11} + \lambda'_{12} - 2\lambda_1 = 0.$$

Il en résulte $\lambda_{11} = 1$, $\lambda_{12} = 5$, $\lambda'_{11} = 2$, $\lambda'_{12} = 4$, $\lambda_1 = 3$. En opérant de même pour les autres courbes, on trouve

$$\left.\begin{aligned} 6\Gamma \equiv 6\Gamma_{11} &+ a_{11} + 5a_{12} + 2a'_{11} + 4a'_{12} + 3a_1 + a_{21} \\ &+ 5a_{22} + 2a'_{21} + 4a'_{22} + 3a_2 + 2b_{11} + 4b_{12} \\ &+ 2b_{21} + 4b_{22} + 3d_1 + 3d_2. \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{I})$$

Les courbes C_{11}, C_{12} de F jouent un rôle symétrique par rapport aux points unis de l'involution I_6; par suite, les courbes Γ_{11}, Γ_{12} de Φ jouent un rôle symétrique par rapport aux points de diramation de cette dernière surface et l'on a

$$\left.\begin{aligned} 6\Gamma \equiv 6\Gamma_{12} &+ 5a_{11} + a_{12} + 4a'_{11} + 2a'_{12} + 3a_1 + 5a_{21} \\ &+ a_{22} + 4a'_{21} + 2a'_{22} + 3a_2 + 4b_{11} + 2b_{12} \\ &+ 4b_{21} + 2b_{22} + 3d_1 + 3d_2. \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{II})$$

De la comparaison entre les formules (I) et (II), on déduit

$$\begin{aligned} &6\Gamma_{11} + 4a_{12} + 2a'_{12} + 4a_{22} + 2a'_{22} + 2b_{12} + 2b_{22} \\ &\equiv 6\Gamma_{12} + 4a_{11} + 2a'_{11} + 4a_{21} + 2a'_{21} + 2b_{11} + 2b_{21}; \end{aligned}$$

d'où, puisque la division sur une surface de genres un est une opération biunivoque (*),

$$\begin{aligned} &3\Gamma_{11} + 2a_{12} + a'_{12} + 2a_{22} + a'_{22} + b_{12} + b_{22} \\ &\equiv 3\Gamma_{12} + 2a_{11} + a'_{11} + 2a_{21} + a'_{21} + b_{11} + b_{21}. \end{aligned}$$

Cette relation s'explique par le fait que les courbes qui correspondent sur la surface Ψ_1 aux courbes Γ_{11}, Γ_{12} font partie d'un même système linéaire.

(*) SEVERI. La base minima pour la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique (*Annales de l'Ecole Normale supérieure*, 1908.)

Des formules (I) et (II) on déduit encore la relation fonctionnelle

$$
\begin{aligned}
2\Gamma \equiv \Gamma_{11} + \Gamma_{12} + a_{11} + a_{12} + a'_{11} + a'_{12} + a_1 + a_{21} + a_{22} + a'_{21} \\
+ a'_{22} + a_2 + b_{11} + b_{12} + b_{21} + b_{22} + d_1 + d_2.
\end{aligned}
$$

Il résulte de cette relation que le système $|\Gamma_{11} + \Gamma_{12}|$ est découpé sur la surface Φ par les hyperquadriques passant par les six points de diramation de la surface.

12. — Passons à l'étude des courbes Γ_{21}.

Les courbes C_{21} sont découpées, sur la surface F, par les hyperplans passant par les espaces $S^{(1)}_{3\pi-4}$, $S^{(22)}_{\pi-2}$, $S^{(23)}_{\pi}$; par suite, ces courbes passent par les points A_1, A_2, B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22}, mais ne passent pas, en général, par les points D_{11}, D_{12}, ..., D_{23}.

Les hyperplans des courbes C_{21} ne contiennent pas le plan tangent β_{11} à F en B_{11}; ils rencontrent ce plan suivant une droite fixe, la tangente à F en B_{11} s'appuyant sur l'espace $S^{(2)}_{2\pi-3}$. Les courbes C_{21} touchent donc cette droite en B_{11}. De même, les courbes C_{21} touchent en B_{12}, B_{21}, B_{22} respectivement les tangentes en ces points à la surface F s'appuyant sur l'espace $S^{(2)}_{2\pi-3}$. Il en résulte que les courbes Γ_{21} de Φ rencontrent en un point chacune des courbes b_{12}, b_{22}, mais ne rencontrent pas les courbes b_{11}, b_{21}.

Aux courbes C_{21} de F correspondent, sur la surface Θ_1, les courbes G''_1 découpées par les hyperplans de l'espace ambiant $S_{2\pi-3}$ passant par l'axe $S'^{(1)}_{\pi-2}$ de l'homographie τ_1. Ces courbes G''_1 ont un point double en Q_1 avec, pour tangentes en ce point, deux génératrices du cône χ. Il en résulte qu'aux courbes C_{21} de F correspondent, sur la surface Θ', des courbes G'_{21} (qui ne sont pas des sections hyperplanes de la surface) rencontrant en deux points (variables) la droite r'_1. Comme les courbes G'_{21} et la droite r'_1 sont transformées en elles-mêmes par τ', les points d'appui des courbes G'_{21} sur r'_1 sont conjugués par rapport à τ'. Il en résulte que les courbes Γ_{21} rencontrent en un point la courbe a'_{11} sur Φ, mais ne rencontrent pas les courbes a_{11}, a_{12}, a'_{12}, a_1. De même, les courbes Γ_{21} rencontrent en un point la courbe a'_{21}, mais ne rencontrent pas les courbes a_{21}, a_{22}. a'_{22}, a_2.

On en déduit la relation fonctionnelle

$$\begin{aligned} 6\,\Gamma \equiv 6\,\Gamma_{21} &+ 4a_{11} + 2a_{12} + 8a'_{11} + 4a'_{12} + 6a_1 + 4a_{21} + 2a_{22} \\ &+ 8a'_{12} + 4a'_{22} + 6a_2 + 2b_{11} + 4b_{12} + 2b_{21} + 4b_{22}; \end{aligned}$$

par suite, puisque la division sur Φ est univoque,

$$\left.\begin{aligned} 3\,\Gamma \equiv 3\,\Gamma_{21} &+ 2a_{11} + a_{12} + 4a'_{11} + 2a'_{12} + 3a_1 + 2a_{21} + a_{22} \\ &+ 4a'_{12} + 2a'_{22} + 3a_2 + b_{11} + 2b_{12} + b_{21} + 2b_{22}. \end{aligned}\right\} \text{(III)}$$

Le fait que les courbes $3\Gamma_{21}$ sont des courbes partielles du système $|3\Gamma|$ provient de ce que, sur la surface Ψ, aux courbes Γ et Γ_{21} correspondent des courbes d'un même système linéaire et précisément des sections hyperplanes de la surface.

Les courbes C_{21}, C_{22} jouent, sur F, des rôles symétriques par rapport aux points unis de I_6 ; par suite, il en est de même des courbes Γ_{21}, Γ_{22} vis-à-vis des points de diramation de Φ. On a donc

$$\left.\begin{aligned} 3\,\Gamma \equiv 3\,\Gamma_{22} &+ a_{11} + 2a_{12} + 2a'_{11} + 4a'_{12} + 3a_1 + a_{21} + 2a_{22} \\ &+ 2a'_{21} + 4a'_{22} + 3a_2 + 2b_{11} + b_{12} + 2b_{21} + b_{22}. \end{aligned}\right\} \text{(IV)}$$

Des relations (III) et (IV), on déduit

$$\begin{aligned} 2\,\Gamma \equiv \Gamma_{21} + \Gamma_{22} &+ a_{11} + a_{12} + 2a'_{11} + 2a'_{12} + 2\,a_1 + a_{21} + a_{22} \\ &+ 2a'_{12} + 2a'_{22} + 2a_2 + b_{11} + b_{12} + b_{21} + b_{22}. \end{aligned}$$

Par suite, les courbes $\Gamma_{21} + \Gamma_{22}$ sont découpées sur Φ

par les hyperquadriques passant par les points A'_1, A'_2, B'_1, B'_2 et par les points doubles infiniment voisins de A'_1, A'_2 dans les domaines du premier ordre de ces points.

La comparaison des relations (I) et (III) donne

$$2\,\Gamma_{11} + a_{12} + a_{22} + d_1 + d_2 \equiv 2\,\Gamma_{21} + a_{11} + 2\,a'_{11} + a_1 + a_{21} + 2\,a'_{21} + a_2.$$

Cette nouvelle relation s'explique par le fait qu'aux courbes Γ_{11}, Γ_{21} correspondent, sur la surface Θ_1, des courbes G'_1, G''_1 appartenant à un même système linéaire.

On a de même

$$2\,\Gamma_{12} + a_{11} + a_{21} + d_1 + d_2 \equiv 2\,\Gamma_{22} + a_{12} + 2\,a'_{12} + a_1 + a_{22} + 2\,a'_{22} + a_2.$$

13. — Occupons-nous enfin des courbes Γ_{13}.

Les courbes C_{13} sont découpées sur F par les hyperplans passant par les espaces $S_{3\pi-2}$, $S^{(11)}_{\pi-2}$ et $S^{(12)}_{\pi-2}$; par suite, ces courbes passent par les A_1, A_2, D_{11}, D_{12}, D_{13}, D_{21}, D_{22}, D_{23}, mais elles ne passent pas en général par les points B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22}. Les hyperplans en question ne contiennent pas les plans tangents δ_{11}, δ_{12}, ..., δ_{23}, à la surface F en D_{11}, D_{12}, ..., D_{23}, mais rencontrent ces plans suivant des droites variables. Par suite, les courbes C_{23} passent simplement par D_{11}, D_{12}, ..., D_{23}, et ont en ces points des tangentes variables. Il en résulte que les courbes Γ_{13} de Φ rencontrent en un point variable chacune des courbes d_1, d_2.

Les hyperplans des courbes C_{13} contiennent les plans tangents α_1, α_2 à la surface F aux points A_1, A_2. Aux courbes C_{13} correspondent, sur la surface Θ, les courbes G_{13}. Ces courbes sont découpées, sur cette surface, par les hyperplans de l'espace ambiant $S_{2\pi-1}$ passant par l'axe $S^{(2)}_{\pi}$ de l'homographie τ. Les courbes G_{13} ont un point double au point R de Θ qui correspond à A_1 ; les tangentes en ce point à ces courbes appartiennent aux plans ρ_1, ρ_2. Lorsqu'on projette la surface Θ du point R en la surface Θ' appartenant à l'espace $S_{2\pi-2}$, aux courbes G_{13} correspondent les sections hyperplanes G'_{13} de cette dernière surface, par les hyperplans passant par l'axe $S'^{(2)}_{\pi-1}$ de l'homographie τ'. Par suite, les courbes G'_{13} passent (simplement) par le point R'; les courbes G_{13} ont en R un point double de rebroussement, la tangente de rebroussement étant r, et enfin les courbes C_{13} ont en A un point triple à tangentes variables. Il en résulte que, sur Φ, les courbes Γ_{13} rencontrent en un point la courbe a_1 (et de même la courbe a_2) sans rencontrer les courbes a_{11}, a_{12}, a'_{11}, a'_{12}, (ni les courbes a_{21}, a_{22}, a'_{21}, a'_{22}).

On déduit de ce qui précède la relation fonctionnelle

$$\left.\begin{aligned} 2\,\Gamma \equiv 2\,\Gamma_{13} + a_{11} + a_{12} + 2\,(a'_{11} + a'_{12}) + 3\,a_1 + a_{21} + a_{22} \\ + 2\,(a'_{21} + a'_{22}) + 3\,a_2 + d_1 + d_2. \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{V})$$

D'ailleurs, les courbes G_{23}, G_{13}, qui, sur la surface Θ, correspondent aux courbes Γ, Γ_{13}, font partie d'un même système linéaire; par suite, les courbes $2\,\Gamma_{13}$ doivent être des courbes du système linéaire $|2\,\Gamma|$.

Observons que les courbes Γ_{11}, Γ_{12}, Γ_{13} ont pour transformées, sur la surface Φ_1, des sections hyperplanes de cette hypersurface. Par suite, les courbes $3\,\Gamma_{11}$, $3\,\Gamma_{11}$, $3\,\Gamma_{13}$ doivent faire partie, augmentées éventuellement de composantes fixes, d'un même système linéaire. Effectivement, la comparaison entre les relations (I), (II) et (V) donne

$$\begin{aligned} 3\,\Gamma_{11} + a_{12} + a_{22} + b_{11} + 2b_{12} + b_{21} + 2\,b_{22} &\equiv 3\,\Gamma_{13} + a_{11} + 2\,a'_{11} \\ &\quad + a'_{12} + 3\,a_1 + a_{21} + 2\,a'_{21} + a'_{22} + 3\,a_2, \\ 3\,\Gamma_{12} + a_{11} + a_{21} + 2\,b_{11} + b_{12} + 2\,b_{21} + b_{22} &\equiv 3\,\Gamma_{13} + a_{12} + a'_{11} \\ &\quad + 2\,a'_{12} + 3\,a_1 + a_{22} + a'_{21} + 2\,a'_{22} + 3\,a_2. \end{aligned}$$

14. — En partant du système $|\Gamma|$, nous avons montré l'existence sur la surface Φ de cinq systèmes linéaires $|\Gamma_{11}|, \ldots, |\Gamma_{22}|$ satisfaisant aux relations fonctionnelles (I), ..., (V). Nous avons cependant fait sur le système $|\Gamma|$ deux hypothèses, à savoir que le système est simple et que son genre π a une valeur suffisamment élevée pour permettre la construction des surfaces Φ', Φ''.

Considérons, sur la surface Φ, un système $|H|$, de genre $\pi' \geq 2$, dont la courbe générique ne passe par aucun point de diramation de Φ, mais par ailleurs arbitraire.

Le système $|H + \Gamma|$ est certainement simple et irréductible en même temps que $|\Gamma|$; il satisfait de plus à toutes les conditions imposées au système $|\Gamma|$. Si n $(n > 1)$ est le nombre des points communs à une courbe H et à une courbe Γ, le genre et la dimension du système $|H + \Gamma|$ sont égaux à $\pi + \pi' + n - 1$.

L'existence du système $|H + \Gamma|$ sur la surface Φ entraîne celle de cinq systèmes linéaires satisfaisant à des équations fonctionnelles analogues à (I), (II), ..., (V). Désignons ces cinq systèmes par $|(H + \Gamma)_{11}|$, $|(H + \Gamma)_{12}|$, $|(H + \Gamma)_{13}|$, $|(H + \Gamma)_{21}|$, $|(H + \Gamma)_{22}|$. Chacun de ces systèmes a la dimension égale à $\pi + \pi' + n - 3$. Les courbes d'un de ces systèmes découpent, sur une courbe Γ, une série linéaire d'ordre $2\pi - 2 + n$; cette série ne peut être spéciale, puisque n est supérieur à un. D'après le théorème de Riemann-Roch, la série en question a la dimension $\pi + n - 2$. Par suite, les courbes $|(H + \Gamma)_{ik}|$ passant par $\pi + n - 1$ points d'une courbe Γ contiennent cette courbe comme partie. Il existe au moins une courbe du système $|(H + \Gamma)_{ik}|$ contenant une courbe Γ, car puisque $\pi' \geq 2$, on a

$$\pi + \pi' + n - 3 \geq \pi + n - 1.$$

Posons

$$|H_{ik}| = |(H + \Gamma)_{ik} - \Gamma|.$$

Le système $|H_{ik}|$ existe certainement; il a le degré $2\pi' - 6$, le genre et la dimension $\pi' - 2$.

En supposant, pour fixer les idées, $i = k = 1$, nous avons

$$6(\Gamma + H) \equiv 6(\Gamma + H)_{11} + a_{11} + 5a_{12} + 2a'_{11} + \ldots + 3d_2;$$

d'où, par comparaison avec la relation

$$6(\Gamma + H)_{11} \equiv 6H_{11} + 6\Gamma,$$

$$6H \equiv 6H_{11} + a_{11} + 5a_{12} + 2a'_{11} + \ldots + 3d_2.$$

Les courbes H_{11} satisfont donc à l'équation fonctionnelle (I). De même, les courbes H_{12}, H_{21}, H_{22} et H_{13} satisfont respectivement aux équations fonctionnelles (II), ..., (V).

En changeant de notation, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

S'il existe, sur la surface Φ, un système linéaire de courbes de genre $\pi \geq 2$, ne passant pas en général par les points de diramation de la surface, il existe cinq autres systèmes linéaires de courbes du même ordre et de genre $\pi - 2$, satisfaisant aux équations fonctionnelles (I), (II), (III), (VI) et (V).

15. — Il nous reste à établir la propriété des involutions du troisième ordre, sur laquelle nous nous sommes appuyé plus haut (n° 10).

Désignons par Φ une surface de genres un, d'ordre $2\pi - 2$, à sections hyperplanes Γ de genre π, de l'espace linéaire S_π à π dimensions, image d'une involution I_3 d'ordre trois, appartenant à une surface F de genres un. Nous supposons, ce qui est toujours possible, que les courbes Γ ne passent pas, en général, par les points de diramation de la correspondance (1, 3) existant entre les surfaces Φ et F.

Aux courbes Γ correspondent, sur la surface F, des courbes C de genre $3\pi - 2$, appartenant à un système complet $|C|$, de degré $6\pi - 6$ et de dimension $3\pi - 2$. Le système $|C|$ contient trois systèmes linéaires partiels composés au moyen de l'involution I_3. L'un de ces systèmes, $|C_0|$, ∞^π, contient les transformées des courbes Γ. Les deux autres, $|C_1|$, $|C_2|$, sont $\infty^{\pi-2}$ et il leur correspond, sur Φ, des systèmes complets $|\Gamma_1|$, $|\Gamma_2|$ de courbes d'ordre $2\pi - 2$ et de genre $\pi - 2$.

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_6$ les points unis de I_3, $A'_1, A'_2, \ldots, A'_6$ les points de diramation correspondant sur Φ. Chacun de ces points est double biplanaire ordinaire pour Φ et équivaut, au point de vue des transformations birationnelles, à deux courbes rationnelles de degré -2. Nous désignerons par a_{i1}, a_{i2} les courbes équivalentes au point A'_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$.

Les courbes Γ_1, Γ_2 satisfont, comme on sait, aux relations fonctionnelles

$$3\Gamma \equiv 3\Gamma_1 + 2(a_{11} + a_{21} + \ldots a_{61}) + a_{12} + a_{22} + \ldots + a_{62},$$
$$3\Gamma \equiv 3\Gamma_2 + a_{11} + a_{21} + \ldots + a_{61} + 2(a_{12} + a_{22} + \ldots + a_{62}).$$

Les courbes C_1 ont en $A_1, A_2, \ldots, A_6$ des tangentes fixes que nous désignerons respectivement par $t_{11}, t_{21}, \ldots, t_{61}$. Les courbes C_2 ont, en ces points, des tangentes fixes, respectivement $t_{12}, t_{22}, \ldots, t_{62}$, distinctes des précédentes. Les points de la courbe a_{ik} correspondent au point de la droite t_{ik} infiniment voisin de A_i $(i = 1, 2; k = 1, 2, \ldots, 6)$.

Considérons les courbes

$$\Gamma'_1 = \Gamma_1 - a_{12}$$

D'après la relation (1), nous avons

$$3\,\Gamma \equiv 3\,\Gamma_1' + 2\,(a_{11} + a_{21} + \ldots + a_{61}) + 4\,a_{12} + a_{22} + \ldots + a_{62}.$$

Les courbes Γ_1' ne rencontrent donc plus la courbe a_{11}, mais rencontrent en deux points la courbe a_{12}. Aux courbes Γ_1' correspondent, par suite, sur F, des courbes C_1' ayant un point double en A_1 auquel est infiniment voisin, sur la droite t_{12}, un second point double.

Les courbes Γ_1' ont le degré $2\pi - 8$ et, par suite, le système $|\Gamma_1'|$ a la dimension $\pi - 3$. Le système $|C_1'|$ coïncide donc avec le système formé par les courbes C_1 assujetties à avoir, en A_1, une tangente distincte de t_{11}.

Rapportons projectivement les courbes Γ_1 aux hyperplans d'un espace linéaire $S_{\pi-2}$ à $\pi - 2$ dimensions. A la surface Φ correspond, dans cet espace, une surface Φ_1 birationnellement identique. Aux points de la courbe a_{11} correspondent les points d'une droite a_{11}' de Φ_1, puisque les courbes Γ_1 rencontrent a_{11} en un point. La courbe a_{12} étant fondamentale pour le système $|\Gamma_1|$ et ayant, d'autre part, un point commun avec a_{11}, il lui correspond, sur Φ_1, un point P de la droite a_{11}'. Aux courbes Γ_1' correspondent, dans $S_{\pi-2}$, les hyperplans passant par P; par suite, P est un point double conique de Φ_1. On arrive évidemment à des conclusions analogues pour les autres points de diramation de Φ. On peut, par suite, énoncer le théorème suivant :

On peut prendre, pour modèle projectif d'une surface de genres un, image d'une involution d'ordre trois appartenant à une surface de genres un, une surface normale possédant six points doubles coniques et six droites deux à deux gauches passant chacune par un des points doubles.

Liége, le 10 février 1928.