

PUBLICACIONES DE LA REVISTA MATEMÁTICA HISPANO-AMERICANA

---

La théorie des involutions douées d'un  
nombre fini de points de coïncidence,  
appartenant à une surface algébrique

PAR

LUCIEN GODEAUX

MADRID

IMPRENTA CLÁSICA ESPAÑOLA

Glorieta de la Iglesia

1924

**La théorie des involutions douées d'un nombre fini  
de points de coïncidence, appartenant à une surface  
algébrique**

La théorie des involutions douées d'un  
nombre fini de points de coïncidence,  
appartenant à une surface algébrique

PAR

LUCIEN GODEAUX

MADRID

IMPRENTA CLÁSICA ESPAÑOLA

Glorieta de la Iglesia

1924

## La théorie des involutions douées d'un nombre fini de points de coïncidence, appartenant à une surface algébrique

Les recherches de MM. Enriques et Severi sur les surfaces hyperelliptiques ont conduit à l'étude systématique des involutions appartenant à une surface algébrique et ne possédant qu'un nombre fini de points de coïncidence. Une involution doublement infinie, appartenant à une surface algébrique possède en général une infinité de points de coïncidence formant une courbe. Il peut arriver que cette courbe soit d'ordre zéro, c'est-à-dire se réduise à un nombre fini de points. C'est précisément ce qui se présente pour certaines involutions appartenant à une surface de Picard ou de Jacobi. Dans ce cas, MM. Enriques et Severi ont montré que l'involution était engendrée par un groupe de transformations birationnelles de la surface en elle-même. Ce sont ces recherches qui forment le point de départ des études dont nous nous proposons de rendre compte dans cet article.

1. Considérons une surface  $F$ , algébrique, et, sur cette surface une involution  $I_n$ , d'ordre  $n$ , doublement infinie, douée d'un nombre fini de points de coïncidence. Désignons par  $\Phi$  une surface algébrique image de l'involution  $I_n$ , c'est à-dire telle qu'entre  $\Phi$  et  $F$ , il existe une correspondance rationnelle  $(1, n)$ , le groupe de  $n$  points de  $F$  correspondant à un point de  $\Phi$  étant un groupe de  $I_n$ .

Si les équations des surfaces  $F$  et  $\Phi$  sont respectivement

$$f(x, y, z) = 0, \quad \varphi(\lambda, \mu, \nu) = 0,$$

les équations de la correspondance rationnelle peuvent s'écrire

$$\lambda = \phi_1(x, y, z), \quad \mu = \phi_2(x, y, z), \quad \nu = \phi_3(x, y, z),$$

et ces équations représentent l'involution  $I_n$ .

Le théorème fondamental, permettant d'étudier les involutions  $I_n$ , est le suivant :

*Si une involution, appartenant à une surface algébrique, ne possède qu'un nombre fini (éventuellement nul) de points de coïncidence, cette involution est engendrée par un groupe de transformations birationnelles de la surface en elle-même (\*).*

Ce théorème est l'extension, au cas d'une surface quelconque, du théorème de MM. Enriques et Severi relatif à une surface de Jacobi ou de Picard.

En partant de ce théorème fondamental, on peut construire un modèle projectif normal de la surface  $\Phi$ , de telle manière qu'aux points de coïncidence de  $I_n$  correspondent des points de  $\Phi$ . Ces points, qui sont les points de diramation pour la correspondance  $(I, n)$  existant entre  $\Phi$  et  $F$ , sont singuliers pour  $\Phi$ . Dans le cas où  $n$  est premier, ces singularités ont été déterminées et on a été conduit à classer les points de coïncidence de  $I_n$ .

Un point de coïncidence de  $I_n$  est dit *point de coïncidence parfaite* si le groupe générateur de  $I_n$  agit comme l'identité sur les points de  $F$  infiniment voisins. Il est dit *point de coïncidence non parfaite* dans le cas contraire.

Les points de diramation de  $\Phi$  sont partagés, de la même manière, en *points de diramation parfaite* et *non parfaite*, suivant que les points correspondant sur  $F$  sont de coïncidence parfaite ou non.

La surface  $\Phi$  est dite *surface de rang*  $n$ .

Cela étant posé, on établit que :

*Pour une surface de rang premier*  $n > 2$ ,

(\*) L. GODEAUX.—*Sur les involutions douées d'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique.* Rend. R. Accad. Lincei, 1914.

1.°) *Un point de diramation parfaite est un point conique multiple d'ordre  $n$ , dont le cône tangent est rationnel.*

2.°) *Un point de diramation non parfaite est un point double formé d'une suite de  $\frac{1}{2}(n-1)$  points doubles biplanaires successifs (\*).*

Pour une involution d'ordre 2, on a le théorème suivant:

*Une involution d'ordre  $n=2$  ne peut posséder que des points de coïncidence parfaite et les points de diramation d'une surface de rang 2 sont des points doubles coniques (\*\*).*

2. M. ENRIQUES a établi que si entre deux surfaces  $\Phi, F$ , on a une correspondance rationnelle  $(1, n)$ , la transformée d'une courbe canonique de  $\Phi$ , sur  $F$ , augmentée de la courbe de coïncidence, donne une courbe canonique de  $F$  (\*\*\*)). Ce théorème, appliqué au cas actuel et en supposant  $n$  premier, donne:

*S'il existe sur une surface  $F$  une involution  $I_n$  d'ordre premier  $n$ , douée d'un nombre fini de points de coïncidence, les points de coïncidence parfaite éventuels de  $I_n$  sont des points multiples d'ordre  $n-2$  pour les courbes canoniques de  $F$  composées avec  $I_n$  (\*\*\*\*).*

Les genres arithmétiques et linéaires des surfaces  $\Phi$  et  $F$  sont liés par certaines relations dans lesquelles entrent également le nombre des points de coïncidence de l'involution  $I_n$ . Ces relations peuvent se déduire de formules très générales établies par M. SEVERI dans le cas d'une correspondance  $(n, n')$  entre deux surfaces

(\*) L. GODEAUX.—*Recherches sur les involutions douées d'un nombre fini de points de coïncidence, appartenant à une surface algébrique.* Bull. de la Soc. Math. de France, 1919.

(\*\*) F. SEVERI.—*Sulle superficie algebriche che ammettono un gruppo continuo  $\infty^2$  di trasformazioni birazionali in sé.* Atti Istituto Veneto, 1907.

(\*\*\*) F. ENRIQUES.—*Ricerche di Geometria sopra una superficie algebrica.* Memorie della R. Accad. di Torino, 1893.

(\*\*\*\*) Voir L. GODEAUX.—*Recherches sur les involutions douées d'un nombre fini de points de coïncidence, appartenant à une surface algébrique.* Ce théorème est énoncé sous une autre forme.

$F, F'$  (\*). Dans le cas qui nous intéresse, et pour  $n$  premier, on a le théorème suivant :

*Si sur une surface algébrique  $F$ , de genre arithmétique  $p_a$  et de genre linéaire  $p^{(1)}$ , on a une involution  $I_n$ , d'ordre premier  $n$ , possédant  $\alpha$  points de coïncidence parfaite et  $\beta$  points de coïncidence non parfaite, le genre arithmétique  $\pi_a$  et le genre linéaire  $\pi^{(1)}$  d'une surface  $\Phi$  image de l'involution satisfont aux relations (\*\*)*

$$12 p_a = 12 n \pi_a + (n - 1) (n - 5) \alpha + (n^2 - 1) \beta + 12 (n - 1),$$

$$p^{(1)} = n (\pi^{(1)} - 1) + (n - 2)^2 \alpha + 1.$$

3. Jusqu'à présent, nous nous sommes occupés de la construction d'une surface image de l'involution donnée sur  $F$ . On peut se proposer le problème inverse, c'est-à-dire la détermination des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface normale, simple, soit une surface de rang  $n$ .

Lorsque  $n$  est supérieur à 2, ce problème n'a été abordé que pour des surfaces particulières, comme nous le verrons plus loin. Dans le cas  $n = 2$ , on a le théorème suivant :

*Pour qu'une surface normale, simple, représente une involution d'ordre deux, douée d'un nombre fini de points unis, appartenant à une certaine surface algébrique, il faut et il suffit que :*

- 1.°) *la surface possède en chaque point de diramation un point double conique ;*
- 2.°) *le nombre de ces points de diramation soit multiple de quatre ;*
- 3.°) *Parmi les hypersurfaces découpant le système  $2k$ -uple du système des sections hyperplanes, il y en ait qui passent par les points*

(\*) F. SEVERI.—*Sulle relazioni che legano i caratteri invarianti di due superficie in corrispondenza algebrica.* Rend. R. Istituto Lombardo, 1893.

(\*\*) L. GODEAUX.—*Recherches sur les involutions douées d'un nombre fini de points de coïncidence, appartenant à une surface algébrique.*

de diramation et touchent la surface en chaque point d'intersection (\*).

4. Pour certaines surfaces  $F$  particulières, les involutions  $I_n$  n'ayant qu'un nombre fini de points de coïncidence ont été déterminées. Les premières études ont porté sur les surfaces de genre linéaire  $p^{(1)} = 1$  et de genres géométriques  $P_2 = P_4 = \dots = P_{2i} = \dots = 1$ .

Pour les surfaces hyperelliptiques ( $p_a = -1$ ,  $p_g = P_2 = \dots = 1$ ,  $p^{(1)} = 1$ ), c'est-à-dire pour la surface de Jacobi, représentant les couples de points non ordonnés d'une courbe de genre deux, ou pour les surfaces de Picard, on a les théorèmes suivants, établis par MM. ENRIQUES et SEVERI (\*\*):

*Les involutions n'ayant qu'un nombre fini de points de coïncidence, appartenant à une surface de Jacobi, ont pour images des surfaces de Picard, des surfaces de genres un ( $p_a = P_4 = 1$ ), ou des surfaces de bigenre un ( $p_a = P_3 = 0$ ,  $P_2 = 1$ ).*

*Les involutions de Picard sont d'ordre arbitraire et ne possèdent pas de points de coïncidence.*

*Les involutions de genres un ( $p_a = P_4 = 1$ ), appartenant à une surface de Jacobi ou de Picard ( $p_a = -1$ ,  $p_g = P_4 = 1$ ) sont d'ordre 2 (surface de Kummer), 3, 4, 6, 8, 12 ou 24.*

(\*) L. GODEAUX.—*Mémoire sur les surfaces algébriques doubles ayant un nombre fini de points de diramation*. Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1914.

(\*\*) ENRIQUES ET SEVERI, *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques*. Acta Mathematica, 1909.—Voir aussi: BAGNERA ET DE FRANCHIS, *Le superficie algebrica le quali ammettono una rappresentazione parametrica mediante funzioni iperellittiche di due argomenti*. Memorie della Soc. Ital. delle Scienze, detta dei XL, 1908.—BAGNERA ET DE FRANCHIS, *Le nombre  $\rho$  de  $M$ . Picard pour les surfaces hyperelliptiques et pour les surfaces irrégulières de genre zéro*. Rend. Circolo Matem. di Palermo, 1910.—On pourra consulter en outre, sur ce sujet les Mémoires: ROSATI, *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e in particolare fra i punti di una curva di genere due*. Annali di Matematica, 1915.—SCORZA, *Intorno alla teoria generale delle matrici di Riemann e ad alcune sue applicazioni*. Rend. Circolo Matematico di Palermo, 1916.



*Les involutions de genres zéro et de bigenre un ( $p_a = P_3 = 0$ ,  $P_2 = 1$ ) appartenant à une surface de Jacobi ou de Picard, sont d'ordre 4 ou 8.*

En outre, MM. Enriques et Severi ont établi quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface soit l'image d'une involution appartenant à une surface de Jacobi ou de Picard.

M. Enriques ayant établi le théorème fondamental sur la génération des involutions  $I_n$  dans le cas où  $F$  est une surface de genres un ( $p_a = P_4 = 1$ ) (\*), il a été possible de classer les involutions de genres un appartenant à une telle surface. Précisément, on a ce théorème:

*Les involutions de genres un ( $p_a = P_4 = 1$ ) appartenant à une surface de genres un, sont d'ordre 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12 ou 16 (\*\*).*

Si on passe aux surfaces de genres zéro et de bigenre un, on arrive à ce résultat:

*Les involutions de genres zéro, bigenre un ( $p_a = P_3 = 0$ ,  $P_2 = 1$ ) appartenant à une surface de genres zéro, bigenre un, sont d'ordre 2, 3, 4, 6 ou 8 (\*\*\*)*.

Enfin, on a également :

*Les involutions de genres zéro, bigenre un ( $p_a = P_3 = 0$ ,  $P_2 = 1$ ) appartenant à une surface de genres un ( $p_a = P_4 = 1$ ), sont d'ordre 2, 4, 6, 8, 12 ou 16 (\*\*\*\*).*

M. Enriques avait établi au paravant que:

*Une surface de genres zéro, bigenre un, est toujours l'image d'une*

(\*) F. ENRIQUES.—*Sulle trasformazioni razionali delle superficie di genere uno*. Rend. R. Accad. Bologna, 1910.

(\*\*) L. GODEAUX.—*Mémoire sur les involutions de genres un, appartenant à une surface de genres un*. Annales de l'École Normale Supérieure, 1914, 1919, et L. GODEAUX: *Sur les involutions de seconde espèce, appartenant à une surface de genres un*. Annales de l'Université de Jassy, 1915.

(\*\*\*) L. GODEAUX, *Sur les involutions appartenant à une surface de genres  $p_a = p_g = 0$ ,  $P_6 = 1$* . Bull. Soc. Math. de France, 1913.—L. GODEAUX: *Mémoire sur les surfaces algébriques de genres zéro et de bigenre un*. Bull. Soc. Math. de France, 1915.

(\*\*\*\*) L. GODEAUX.—*Recherche des involutions de genres zéro, bigenre un, appartenant à une surface de genres un*. Annaes Academia Porto, 1916.

*involution d'ordre deux, appartenant à une surface de genres un, et cette involution est privée de points de coïncidence (\*)*

Les surfaces dont il vient d'être question jouissent de cette propriété de ne pouvoir posséder de points singuliers de multiplicité supérieure à deux ; les surfaces images des involutions considérées ne peuvent donc avoir que des points de diramation non parfaite, si l'ordre de l'involution est supérieur à deux. Par conséquent les points de coïncidence des involutions considérées, d'ordre supérieur à deux, sont des points de coïncidence non parfaite.

5. Il importait d'étudier des involutions douées d'un nombre fini de points de coïncidence dont quelques uns soient des points de coïncidence parfaite, l'ordre de l'involution étant supérieur à deux. A cet effet, on a considéré la surface représentant les couples de point non ordonnés d'une courbe de genre trois. On établit que:

*Si la surface représentant les couples de points non ordonnés d'une courbe de genre trois possède une transformation birationnelle de période supérieure à deux en elle-même, la courbe de genre trois possède une transformation de même période en elle-même (\*\*).*

Les transformations d'une courbe de genre trois ont été déterminées par S. Kantor et M. Wiman, et on en conclut que:

*Les involutions d'ordre supérieur à trois, possédant un nombre fini de points de coïncidence, appartenant à la surface représentant les couples de points non ordonnés d'une courbe de genre trois, sont d'ordre 2, 3, 6, 7, 9, 14 ou 18 (\*\*).*

L'involution d'ordre 2 existe quelle que soit la courbe de genre trois, elle prend naissance du fait que la série canonique d'une courbe de genre trois a l'ordre quatre.

Une des involutions d'ordre trois possède des points de coïncidence parfaite.

(\*) F. ENRIQUES. — *Un osservazione relativa alle superficie di bigenere uno*. Rend. R. Accad. Bologna, 1908.

(\*\*) L. GODEAUX. — *Mémoire sur les surfaces algébriques liées à une courbe algébrique de genre trois*. Arxius Ist. Ciencias Barcelone, 1917.

Un autre exemple d'involution d'ordre trois possédant des points de coïncidence parfaite, appartenant à une surface du cinquième ordre invariante pour une homographie cyclique de période 3 a été étudié (\*).

6. Une surface algébrique de diviseur  $\sigma > 1$  possède la propriété suivante (\*\*): Sur cette surface, on peut trouver  $\sigma$  systèmes complets  $\{C_1\}, \{C_2\}, \dots, \{C_\sigma\}$  tels que

$$\{\lambda C_1\} = \{\lambda C_2\} = \dots = \{\lambda C_\sigma\}.$$

La considération d'involutions dépourvues de points de coïncidence permet de construire des surfaces de diviseur premier. On a précisé ce théorème:

*La surface dont les équations sont, dans un  $S_{\frac{1}{2}(p+3)}$*

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_{\frac{1}{2}(p-1)} \\ x_1^2 & x_2 & x_3 & \dots & x_{\frac{1}{2}(p+1)} \end{vmatrix} = 0,$$

$$x_{\frac{1}{2}(p+3)} = \varphi\left(x_0, x_1, \dots, x_{\frac{1}{2}(p+1)}\right)$$

$\varphi$  étant une fonction rationnelle et entière à coefficients généraux et  $p$  étant premier, est une surface de diviseur  $\sigma = p$  (\*\*\*)

(\*) L. GODEAUX. — *Etude d'une involution cubique douée d'un nombre fini de points de coïncidence, appartenant à une surface algébrique.* Revista Socied. Matem. Española, 1917.

(\*\*) F. SEVERI. — *Sulla totalità delle curve algebriche tracciate sopra una superficie algebrica.* Math. Annalen, 1905. — *La base minima pour la totalità des courbes tracées sur une surface algébrique.* Annales Ec. Norm. Sup., 1908. — *Complementi alla teoria della base per la totalità delle curve di una superficie algebrica.* Rend. Circ. Matem. Palermo, 1910.

(\*\*\*) L. GODEAUX. — *Exemples de surfaces algébriques de diviseur supérieur à l'unité.* Bull. des Sciences Mathém. 1915.