REVISTA MATEMATICA HISPANO-AMERICANA

TOMO V MAYO DE 1923 NÚM. 5

LA TEORÍA DE LAS INVOLUCIONES DOTADAS DE UN NÚMERO FINITO DE PUNTOS DE COINCIDENCIA, PERTENECIENTES A UNA SUPERFICIE ALGEBRAICA

Las investigaciones de los Sres. Enriques y Severi sobre las superficies hiperelípticas, han conducido al estudio sistemático de las involuciones pertenecientes a una superficie algebraica, y no poseyendo más que un número finito de puntos de coincidencia. Una involución doblemente infinita, perteneciente a una superficie algébrica posee, en general, una infinidad de puntos de coincidencia formando una curva. Puede suceder que esta curva sea de orden cero, es decir, se reduzca a un número finito de puntos. Esto es precisamente lo que se presenta para ciertas involuciones pertenecientes a una superficie de Picard o de Jacobi.

En este caso, los Sres. Enriques y Severi, han demostrado que la involucíon está engendrada por un grupo de transformaciones birracionales de la superficie en sí misma. Son estas investigaciones las que constituyen el punto de partida de los estudios que nos proponemos desarrollar en este artículo.

1. Consideremos una superficie F, algebraica, y sobre esta superficie una involución I_n, de orden n, doblemente finita dotada de un número finito de puntos de coincidencia. Designemos por Φ una supeficie algebraica imagen de la involución I_n, es decir, tal que entre Φ y F, existe una correspondencia racional $(1, n)$, siendo un grupo de I_n el constituído por los n puntos de F correspondientes a un punto de Φ.

Si las ecuaciones de las superficies F y Φ son respectivamente

$$f(x, y, z) = 0, \qquad \varphi(\lambda, \mu, \nu) = 0,$$

las ecuaciones de la correspondencia racional pueden escribirse

$$\lambda = \varphi_1(x, y, z), \qquad \mu = \varphi_2(x, y, z), \qquad \nu = \varphi_3(x, y, z),$$

y estas ecuaciones representan la involución I_n.

El teorema fundamental, que permite estudiar las involuciones I_n, es el siguiente:

Si una involución, perteneciente a una superficie algebraica, no posee más que un número finito (eventualmente nulo) de puntos de coincidencia, esta involución está engendrada por un grupo de transformaciones birracionales de la superficie en sí misma (*).

Este teorema es la generalización, al caso de una superficie cualquiera, del teorema de los Sres. Enriques y Severi, relativa a una superficie de Jacobi o de Picard.

Partiendo de este teorema fundamental, se puede construir un modelo proyectivo normal de la superficie Φ, de tal manera que a los puntos de coincidencia de I_n correspondan puntos de Φ. Estos puntos, que son los puntos de bifurcación para la correspondencia $(1, n)$ existente entre Φ y F, son singulares para Φ. En el caso en que n es primo, estas singularidades han sido determinadas y esto ha conducido a clasificar los puntos de coincidencia de I_n.

Un punto de coincidencia de I_n se llama *punto de coincidencia perfecta* si el grupo generador de I_n obra como la identidad sobre los puntos de F infinitamente próximos. En el caso contrario se llama *punto de coincidencia no perfecta.*

Los puntos de bifurcación de Φ son clasificados, de la misma manera, en *puntos de bifurcación perfecta y no perfecta*, según que los puntos correspondientes sobre F sean de coincidencia perfecta o no.

La superficie Φ se llama *superficie de rango* n.

Esto supuesto, se establece que:

Para una superficie de rango primo $n > 2$.

1.º) *Un punto de bifurcación perfecta es un punto cónico múltiple de orden* n, *cuyo cono tangente es racional.*

2.º) *Un punto de bifurcación no perfecta es un punto doble forma-*

(*) L. Godeaux. — Sur les involutions douées d'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique. Rend. R. Accad. Lincei. 1914.

do por una serie, de $\frac{1}{2}(n-1)$ *puntos dobles biplanarios sucesivos* (*).

Para una involución de orden 2, se tiene el teorema siguiente:

Una involución de orden $n = 2$ *no puede poseer más que puntos de coincidencia perfecta y los puntos de bifurcación de una superficie de rango* 2 *son puntos dobles cónicos* (**).

2. El Sr. Enriques ha establecido que si entre dos superficies Φ, F se tiene una correspondencia racional $(1, n)$, la transformada de una curva canónica de Φ, sobre F, aumentada en la curva de coincidencia, da una curva canónica de F (***). Este teorema, aplicado al caso actual y suponiendo n primo, da:

Si existe sobre una superficie F *una involución* I_n *de orden primo* n, *dotada de un número finito de puntos de coincidencia, los puntos de coincidencia perfecta eventuales de* I_n *son puntos múltiples de orden* $n-2$ *para las curvas canónicas de* F *compuestas con* I_n (****)

Los géneros aritméticos y lineales de las superficies Φ y F están ligados por ciertas relaciones, en las cuales entran igualmente el número de puntos de coincidencia de la involución I_n. Estas relaciones pueden deducirse de fórmulas muy generales establecidas por el Sr. Severi en el caso de una correspondencia (m, n') entre dos superficies F, F' (*****). En el caso que nos interesa, y para n primo, se tiene el teorema siguiente:

Si sobre una superficie algebraica F, *de género aritmético* p_a *y de género lineal* $p^{(1)}$, *se tiene una involución* I_n *de orden primo* n, *poseyendo* α *puntos de coincidencia perfecta y* β *pnntos de coincidencia no perfecta, el género aritmético* π_a *y el género lineal* $\pi^{(1)}$ *de una superfi-*

(*) L. Godeaux.—Recherches sur les involutions douées d'un nombre fini de points de coïncidence, appartenant à une surface algébrique. *Bull. de la Soc. Math. de France*, 1919.

(**) F. Severi.—Sulle superficie algebriche che ammetono un grupo continuo ∞^2 dì transformazioni birrazionale in sè. Atti Istituto Veneto, 1907.

(***) F. Enriques.—Richerche dì Geometría sopra una superficie algébrica. *Memorie della R. Accad. di Torino*. 1893.

(****) Véase L. Godeaux.—Recherche sur les involutions douées d'un nombre fini de points de coïncidence, appartenant a une surface algèbrique. Este teorema se anuncia bajo otra forma.

(*****) F. Severi.—Sullc relazioni che legano i caratteri invarianti di due superficie in corrispondenza algebrica. Rend. R. Instituto Lombardo, 1893.

cie Φ *imagen de la involución satisfacen a las relaciones* (*)

$$12\,p_a = 12\,n\,\pi_a + (n-1)(n-5)\,\alpha + (n^2-1)\,\beta + 12\,(n-1),$$
$$p^{(1)} = n\,(\pi^{(1)}-1) + (n-2)^2\,\alpha + 1.$$

3. Hasta el presente nos hemos ocupado de la construcción de una superficie imagen de la involución dada sobre F.

Puede proponerse el problema inverso, es decir, la determinación de las condiciones necesarias y suficientes para que una superficie normal, simple, sea una superficie de rango n.

Cuando n es superior a 2, este problema no ha sido abordado más que para superficies particulares como veremos más adelante. En el caso $n = 2$, se tiene el teorema siguiente:

Para que una superficie normal, simple, represente una involución de orden dos, dotada de un número finito de puntos dobles pertenecientes a una cierta supercie algebraica, es necesario y suficiente que:

1.º) *la superficie posea en cada punto de bifurcación un punto doble cónico;*

2.º) *el número de estos puntos de bifurcación sea múltiplo de cuatro;*

3.º) *entre las hipersuperficies que cortan al sistema* 2 k — plo *del sistema de secciones hiperplanos, las haya que pasen por los puntos de bifurcación y toquen a la superficie en cada punto de intersección* (**)

4. Para ciertas superficies F particulares, las involuciones I_n que no tienen más que un número finito de puntos de coincidencia han sido determinadas.

Los primeros estudios se han hecho sobre las superficies de género lineal $p^{(1)} = 1$ y de género geométrico $P_2 = P_4 = \ldots\ldots = P_{2i} = \ldots = 1$.

Para las superficies hiperelípticas ($p_a = -1, p_g = P_2 = \ldots\ldots = 1, p^{(1)} = 1$), es decir, para las superficies de Jacobi, representante de los pares de puntos no ordenados de una curva de género dos, o

(*) L. Godeaux.—Recherches sur les involutions douées d'un nombre fini de points de coincidence, appartenat a une surface algèbrique.

(**) L. Godeaux.—Mémoire sur les surfaces algébriques doubles ayant un nombre fini de points de diramatión. *Annales de la Fac. des Sciences de Toulouse,* 1914.

para las superficies de Picard, se tienen los teoremas siguientes establecidos por los Sres. Enriques y Severi (*):

Las involuciones que no tienen más que un número finito de puntos de coincidencia, pertenecientes a una superficie de Jacobi, tienen por imágenes superficies de Picard, superficies de géneros uno ($p_a = P_4 = 1$), *o superficies de bigénero uno* ($p_a = P_1 = 0$, $P_2 = 1$).

Las involuciones de Picard son de orden arbitrario y no poseen puntos de coincidencia.

Las involuciones de género uno ($p_a = P_1 = 1$), *pertenecientes a una superficie de Jacobi o de Picard* ($p_a = 1$, $p_g = P_4 = 1$) *son de orden* 2 (superficie de Kummer) 3, 4, 6, 8, 12 o 24.

Las involuciones de género cero y de bigénero uno ($p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$) *pertenecientes a una superficie de Jacobi o de Picard, son de orden* 4 *u* 8.

Además, los Sres. Enriques y Severi han establecido cuáles son las condiciones necesarias y suficientes para que una superficie sea la imagen de una involución pertenecientes a una superficie de Jacobi o de Picard.

El Sr. Enriques, habiendo establecido el teorema fundamental sobre la generación de las involuciones I_n en el caso en que F es una superficie de género uno ($p_a = P_4 = 1$) (**), ha sido posible clasificar las involuciones de género uno pertenecientes a tal superficie. Al efecto, se tiene el teorema siguiente:

Las involuciones de género uno ($p_a = P_4 = 1$) *pertenecientes a una superficie de géneros uno, son de orden* 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12 *o* 16 (***).

(*) Enriques et Severi.—Memoire sur les surfaces hyperelliptiques. Acta Mathemática, 1909.—Véase también; Bagnera et de Franchis, Le superficie algebriche le quali ammettono una rappresentazione parametrica mediante funzioni iperellittiche di due argomenti. *Memorie della Soc. Ital. delle Scienze, detta dei XL,* 1908.—Baguera et de Franchis, Le nombre de M. Picard pour le surfaces hiperelliptiques et pour les surfaces irrégulières de genre zéro. *Rend. Circolo Matem. di Palermo,* 1910.—Se podrá consultar además, sobre este asunto, las Memorias: Rosati, Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e in particolare fra i punti di una curva di génere due. *Annali di Matematica,* 1915.—Scorza, Intorno alla teoria generale delle matrici di Riemann e ad alcune sue aplicazioni. *Rend. Circolo Matematico di Palerma,* 1916.

(**) F. Enriques.—Sulle trasformazioni razionali delle superficie di genere uno. *Rend. R. Accad. Bologna,* 1910.

(***) L. Godeaux.—Memoire sur les involutions de genres un, appartenant à une surface de genre un. *Annales de l'Ecole Normale Superieure,* 1914, 1919 y L. Godeaux: Sur les involutions de seconde espèce, appartenant a une surface de genres un. *Annales de l'Université de Jassy,* 1915.

Si se pasa a las superficies de género cero y de bigénero uno, se llega a este resultado:

Las involuciones de género cero, bigénero uno ($p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$), *pertenecientes a una superficie de género cero, bigénero uno, son de orden* 2, 3, 4, 6 *u* 8 (*).

En fin, se tiene igualmente:

Las involuciones de género cero, bigénero uno ($p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$) *pertenecientes a una superficie de género uno*, ($p_a = P_4 = 1$), *son de orden* 2, 4, 6, 8, 12 *o* 16 (**).

El Sr. Enriques había establecido antes que:

Una superficie de género cero, bigénero uno, es siempre la imagen de una involución de orden dos, perteneciente a una superficie de género uno, y esta involución carece de puntos de coincidencia (***).

Las superficies, de las cuales nos hemos ocupado, gozan de esta propiedad de no poder poseer puntos singulares de multiplicidad superior a dos; las superficies imágenes de las involuciones consideradas no pueden, por consiguiente, tener más que puntos de bifurcación no perfecta, si el orden de la involución es superior a dos. En consecuencia, los puntos de coincidencia de las involuciones consideradas, de orden superior a dos, son puntos de coincidencia no perfecta.

5. Importa estudiar las involuciones dotadas de un número finito de puntos de coincidencia, de los cuales algunos sean puntos de coincidencia perfecta, siendo el orden de la involución superior a dos. A este efecto se ha considerado la superficie representando los pares de puntos no ordenados de una curva de género tres. Se establece que:

Si la superficie representante de los pares de puntos no ordenados de una curva de género tres posee una transformación birracional de período superior a dos en sí misma, la curva de género tres posee una transformación del mismo período en sí misma (****).

(*) L. Godeaux.—Sur les involutions appartenant a une surface de genres $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$. *Bull. Soc. Math. de France,* 1913.—L. Godeaux: Mémoire sur les surfaces algébriques de genres zéro et de bigenre un. *Bull. Soc. Math. de France,* 1915.

(**) L. Godeaux.—Recherche des involutions de genres zéro, bigenre un, appartenant a una surface de genres un. *Annales Academia Porto,* 1916.

(***) F. Enriques.—Un osservazzione relativa alle superficie di bigenere uno. *Rend. R. Accad. Bologna,* 1908.

(****) L. Godeoux.—Memoire sur les surfaces algébriques liées a une courbe algébrique de genre trois. *Arxius Ist. Ciencias Barcelone,* 1917.

Las transformaciones de una curva de género tres han sido determinadas por S. Kantor y M. Wiman, y se concluye que:

Las involuciones de orden superior a tres, que poseen un número finito de puntos de coincidencia, perteneciendo a la superficie representante de los pares de puntos no ordenados de una curva de género tres, son de orden 2, 3, 6, 7, 9, 14 *o* 18 (*).

La involución de orden 2 existe, cualquiera que sea la curva de género tres, teniendo origen por el hecho de que la serie canónica de una curva de género tres tiene el orden cuatro.

Una de las involuciones de orden tres posee puntos de coincidencia perfecta.

Otro ejemplo de involución de orden tres poseyendo puntos de coincidencia perfecta, perteneciente a una superficie de quinto orden invariante para una homografia cíclica de periodo tres ha sido estudiada (**).

6. Una superficie algebraica de divisor $\sigma > 1$ posee la propiedad siguiente (***):

Sobre esta superficie se pueden encontrar σ sistemas completos $\{C_1\}, \{C_2\} \ldots\ldots, \{C_\sigma\}$ tales que

$$\{\lambda\, C_1\} = \{\lambda\, C_2\} = \ldots\ldots = \{\lambda\, C_\sigma\}$$

La consideración de involuciones desprovistas de puntos de coincidencia permite construir superficies de divisor primo. Al efecto se tiene este teorema:

(*) L. Godeaux.—Memoire sur les surfaces algébriques liées a une courbe algébrique de genre trois. *Arxius Ist. Ciencias Barcelone*, 1917.

(**) L. Godeaux.—Etude d'une involution cubique donés d'un nombre fini de points de coïncidence, appartenant a une surface algébrique. *Revista Socied. Matem. Española*, 1917.

(***) F. Severi.—Sulla totalitá delle curve algebriche tracciate sopra una superficie algébrica. *Math. Annalen*, 1905. La base mínima pour la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique. *Annales Ec. Norm. Sup.* 1908.—Complementi alla teoria della base per la totalitá delle curve di una superficie algébrica. *Rend. Circ. Matem. Palermo*, 1910.

La superficie cuyas ecuaciones son, en un $S_{\frac{1}{2}\,(p\,(+3)}$

$$\begin{vmatrix} x_0\ x_1\ x_2 \ldots\ldots x_{\frac{1}{2}(p-1)} \\ x_1^2\ x_2\ x_3 \ldots\ldots x_{\frac{1}{2}(p+1)} \end{vmatrix} = 0,$$

$$x^p_{\frac{1}{2}(p+3)} = \varphi\left(x_0, x_1, \ldots\ldots, x_{\frac{1}{2}(p+1)}\right)$$

siendo φ *una función racional de coeficientes generales y* p *primo, es una superficie de divisor* $\sigma =$ p (*).

L. GODEAUX.

(*) L. Godeaux.—Exemples de susfaces algébriques de diviseur supérieur à l'unité. *Bul. des Sciences Mathém*, 1915.