SUR UNE SURFACE CONSIDÉRÉE PAR G. HUMBERT

PAR

L. GODEAUX

NOTE PRÉSENTÉE À L'ACADÉMIE ROUMAINE

PAR

Mr. G. ŢIŢEICA M. A. R.

G. Humbert [1]) et après lui, *M. Remy* [2]) ont étudié la surface algébrique F de genres $p_a = p_g = 3$, $p^1 = 4$, $P_2 = 7, \ldots$ qui représente les couples de points d'une courbe L de genre trois, de manière qu'à un point de la surface correspondent deux couples de points de la courbe L, formant un groupe canonique. Nous avons montré [3]) que l'on peut prendre, pour modèle projectif de la surface F, une surface d'ordre 12, de l'espace S_6, section d'un cône V_3^4 projetant d'un point A_0 une surface de Véronèse Φ et d'une hypersurface cubique V_5^3 ne passant pas par A_0. Nous avons également montré que la surface F possède 28 points doubles coniques et 63 hyperplans passant chacun par 12 points doubles et touchant la surface suivant des courbes elliptiques du sixième ordre [4]). Nous nous proposons de revenir sur quelques propriétés de la surface F.

1. Soient, dans S_6, [5])

$$x_2 x_3 = x_4^2, \quad x_3 x_1 = x_5^2, \quad x_1 x_2 = x_6^2,$$
$$x_1 x_4 = x_5 x_6, \; x_2 x_5 = x_6 x_4, \; x_2 x_6 = x_4 x_5 \qquad (1)$$

les équations du cône V_3^4, de sommet A_0 $(x_1 = x_2 = \ldots = x_6 = 0)$,

$$a x_0^3 + x_0^2 \varphi_1 (x_1, x_3, \ldots, x_6) = x_0 \varphi_3 (x_1, x_1, \ldots, x_3) +$$
$$+ \varphi_3 (x_1, x_2, \ldots, x_6) = 0 \qquad (2)$$

les équations de l'hypersurface V_5^2 $(a \neq 0)$.

---

1) G. HUMBERT, *Sur une surface du sixième ordre liée aux fonctions abéliennes de genre trois* (Journal de Liouville, 1896).

2) REMY, *Sur cetaines surfaces algébriques liées aux fonctions abéliennes de genre trois* (Journal de Liouville, 1908); *Sur une classe de surfaces algébriques* (Annales de l'École Normale sup., 1909).

3) L. GODEAUX, *Sur une involution rationnelle douée de trois points de coincidence appartenant à une surface algébrique de genre trois* (Bull. Acad. Royale de Belgique, 1921).

4) L. GODEAUX, *Sur une surface algébrique considérée par M. G. HUMBERT* (Bull. des Sciences Math., 1912).

5) Nous conservons les notations de notre note *sur une surface de quatrième ordre considérée par Cremona*, parue récemment dans ce Bulletin.

La section du cône V_3^4 par l'hyperplan $x_0 = o$ est une surface de Véronèse Φ.

Les courbes canoniques C de F sont découpées par les cônes du second ordre V_2^2 projetant, de A_0,,les coniques de Φ. Les courbes bicanoniques de F sont les sections hyperplanes.

L'hypersurface V_5^3 touche le cône V_3^4 en 28 points qui sont des points doubles coniques de F.

Les courbes Creprésentent les couples de points d'une série g_4^1 canonique de L. Si on prend pour L une courbe plane du quatrième ordre (ce qui est toujours possible), ces séries sont découpées par les faisceaux de droites du plan de L. Il y a dans une projectivité entre les points du plan de L et les courbes C du réseau canonique $/C/$ de F.

2. Soit π un plan aux droites duquel correspondent les coniques de la surface de Véronèse Φ. A un point de π correspondent trois points de F situés sur la droite joignant A_0 au point de Φ correspondent au point de π considéré. La surface F est donc représentée birationnellement par un plan triple F' de support π.

La courbe de diramation D du plan triple F' est du douzième ordre et possède 28 points doubles.

Le plan triple F' peut être obtenu en rapportant projectivement les courbes C aux droites du plan π, par suite le plan de la courbe L et le plan π se correspondent par dualité et la courbe D est la réciproque de la courbe L [1])

Les 28 points doubles de D correspondent aux 28 bitangentes de L. La courbe D possède en outre 24 points de rebroussement, qui correspondent aux 24 points d'inflexion de L. Ces points de rebroussement correspondent à des points de F par lesquels passent ∞^1 courbes C s'osculant entre elles.

3. Soit C_1 une sextique elliptique suivant laquelle F est touchée par un hyperplan passant par 12 points doubles. Si cet hyperplan passe par A_0, il correspond à C_1 une conique triple de F' passant par 12 points doubles de D, ce qui est impossible. Donc, les 63 hyperplans touchant F suivant des sextiques ne peuvent passer par A_0. A ces courbes correspondent sur F' des cubiques elliptiques passant par 12 points doubles de D.

Si γ_1 est la cubique de F, correspondant à C_1 ,à γ_1 correspond sur F l'ensemble de deux courbes C_1, $\overline{C}_1$. Cette dernière courbe est d'ordre 12 et de genre 7; elle ne rencontre C_1 qu'aux douze points doubles de F appartenant à cette courbe. La courbe $\overline{C}_1$ est découpée. sur F, par une hyperquadrique passant par les 12 points doubles considérés et touchant la surface F en chaque point d'intersection.

4. On parvient sans difficulté aux résultats suivants, qui découlent d'ailleurs de ceux qui ont été obtenus par *G. Humbert*.

Les 28 points doubles de la surface F se distribuent en 1008 groupes de 6 points appartenant à des espaces linéaires à 4 dimensions S_4.

---

[1]) Voir la note de *M. SEVERI*, *Sulle superficie che rappresentano le coppie di punti di una curva algebrica* (Atti. Torino, 1902—903).

Il existe 336 groupes de 18 points doubles de la surface F tels que ces 18 points appartiennent à trois hyperplans touchant F le long d'une sextique elliptique, denx de ces hyperplans ayant en commun 6 points doubles. Ces 3 hyperplans ont en commun un espace S_4 ne passant par aucun des points doubles. Un hyperplan appartient à 16 de ces 366 groupes de trois hyperplans.

5. Supposons maintenant que la courbe L possède une involution cyclique d'ordre impair (nécessairement 3,7 ou 9).

La surface F possède alors une involution cyclique du même ordre, présentant un nombre fini de points de coïncidence [1]).

Il en résulte que le plan triple F est transformé en lui-même par une homographie périodique T du plan π, n'ayant qu'un nombrc fini de points unis. On pourra en déduire un plan triple, image de l'involution engendrée par T snr F'. Nous allons développer ces considérations dans le cas où T a la période 7.

6. Soit

$$z_1^3 z_2 + z_2^3 z_3 + z_3^3 z_1 = o$$

l'équation de la courbe L. Elle est transformée en elle-même par l'homographie de période 7.

$$T' = \begin{pmatrix} z_1, & \varepsilon z_2, & \varepsilon^5 z_3 \\ z_1, & z_2, & z_3 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = e \frac{2\, i\, \pi}{7}$$

qui possède, comme points unis, trois points d'inflexion de la courbe L (sommets du triangle fondamental).

Il en résulte que la transformation T du plan triple F' aura comme points unis trois points de rebroussement de la courbe de diramation D. Soient O_2, O_2, O_3 ces trois points. On voit sans peine que les côtés du triangle $O_1 O_2 O_3$ sont précisément les tangentes de rebroussement. Supposons, pour fixer les idées, que $O_1 O_2$ soit la tangente en O_1, O_2O_3 la tangente en O_2, enfin $O_3 O_1$ la tangente en O_3.

Il existe ∞^2 quartiques du plan π', formant un réseau de degré effectif 7, ayant en O_1, O_3, O_3 des points d'inflexion, les tangentes étant respectivement O_1O_3, O_2O_1, O_3O_2, transformées en elles-mêmes par l'homographie T.

Rapportons projectivement ces quartiques aux droites d'un plan π . On obtient ainsi un plan triple Ψ, de support π' , image de l'involution I_7 engendrée sur F' par T. La courbe de diramation D' du plan triple Ψ correspond à la courbe D. C'est donc une courbe du sixième ordre ayant quatre points doubles (correspondant aux 28 points doubles de D) et six points de rebroussement (trois de ces points correspondent aux tangentes aux-points O_1, O_2, O_3, les trois autres aux 21 points de rebroussement restant de D). A cette courbe D', il faudrait adjoindre les trois droites qui corres pondent, dans π', aux points O_1, O_2, O_3, mais les points de ces droites sont

---

[1]) Voir nos quatre notes *sur des surfaces algébriques liées à une courbe de genre trois*, parues dans ce Bulletin en 1916.

des diramations apparentes, puisqu'ils proviennent de points de rebroussement de D.

Le plan triple Ψ possède donc une courbe de diramation d'ordre six, ayant quatre points doubles ordinaires et six points de rebroussement, elle est donc rationnelle.

Les droites triples du plan triple Ψ sont des courbes elliptiques formant un réseau et par suite, le plan triple Ψ est rationnel, résultat que nous avions déjà obtenu par une autre voie (Bull. Acad. R. Belgique, 1921).

7. Reprenons maintenant les équations (1) et (2) et supposons $a = o$. La surface F_1 représentée par ces nouvelles équations possède des courbes canoniques C hyperelliptiques. Elle est représentée sur un plan double F'_1 de support π, ayant une courbe de diramation D_1 d'ordre huit.

La surface F_1 conserve les 28 points doubles de la surface; il en résulte que la courbe D_1 possède 28 points doubles et est par suite formée de 8 droites du plan π.

Il est aisé de voir que la surface F_1 représente les couples de points d'une courbe L hyperelliptique de genre trois, un point de la surface correspondant à deux couples de points de la courbe L, conjugués par rapport à la série g_2^1 de cette courbe. Les points doubles de F_1 correspondent aux couples de points doubles de cette série g_2^1.

Bruxelles, le 14 mars 1925.