SUR UNE SURFACE DU QUATRIÈME ORDRE CONSIDÉRÉE PAR CREMONA

PAR

L. GODEAUX

NOTE PRÉSENTÉE À L'ACADÉMIE ROUMAINE

PAR

Mr. G. ŢIŢEICA M. A. R.

Cremona[1]) a étudié la surface du quatrième ordre possédant un tacnode, c'est-à-dire un point double uniplanaire auquel est infiniment voisine une droite double infiniment petite. Cette surface contient 28 couples de coniques et 63 couples de faisceaux de quartiques gauches rationnelles. Ce sont précisément les nombres de droites tangentes en deux points et de systèmes de coniques tangentes en quatre points à une courbe plane du quatrième ordre et de genre trois. On peut donc supposer qu'il existe quelque relation entre la surface de Cremona et une quartique plane de genre trois; nous allons précisément montrer que cette surface peut être transformée birationnellement en un plan double dont la courbe de diramation est une quartique de genre trois. Le procédé utilisé ici nous permettra, dans une note ultérieure, d'étudier une certaine surface de genre trois considérée par *G. Humbert*.

1. Dans un espace linéaire à six dimensions, S_6, de coordonnées homogènes $x_0, x_1, \ldots, x_6$, les équations

$$(1) \qquad \begin{array}{lll} x_2 x_3 = x_4^2, & x_3 x_1 = x_5^2, & x_1 x_2 = x_6^2, \\ x_1 x_4 = x_5 x_6, & x_2 x_5 = x_6 x_4, & x_2 x_6 = x_4 x_5, \end{array}$$

représentent le cône V_3^4, d'ordre 4, projetant du point A_0 ($x_1 = x_2 = \ldots = x_6 = 0$) une surface de Véronèse.

Considérons la surface F, d'ordre huit, section du cône V_3^4 par l'hyperquadrique (ne passant pas par A_0)

$$(2) \qquad x_0^2 + x_0 \varphi_1 (x_1, x_2, \ldots, x_6) + \varphi_2 (x_1, x_2, \ldots, x_6) = 0,$$

où φ_1, φ_2 sont des polynômes entiers et rationnels en $x_1, x_2, \ldots, x_6$, de degrés égaux aux indices.

---

[1]) *CREMONA, Sopra una certa superficie di quart'ordine* Collectanea mathematica in memoriam D. Chelini, Milan, 1881, pp. 413—424 Opere Matematiche, Vol. III, pp. 444—453.

Les formules [1])

$$(3)\qquad \frac{x_0}{\zeta_0\zeta_1} = \frac{x_1}{\zeta_1^2} = \frac{x_2}{\zeta_2^2} = \frac{x_3}{\zeta_2^2} = \frac{x_4}{\zeta_2\zeta_3} = \frac{x_5}{\zeta_3\zeta_1} = \frac{x_6}{\zeta_1\zeta_2}$$

font correspondre birationnellement, aux points du cône V_3^4, les points $(\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ d'un espace linéaire à trois dimensions, S_3.

Ces formules font correspondre à la surface F une surface du quatrième ordre d'équation

$$(4)\qquad \zeta_0^2\zeta_1^2 + \zeta_0\zeta_1\varphi_1(\zeta_1^2, \zeta_2^2, \dots, \zeta_1\zeta_2) + \\ + \varphi_2(\zeta_1^2, \zeta_2^2, \dots, \zeta_1\zeta_2) = 0.$$

Il est aisé de voir que la surface possède un tacnode au point A'_0 $(\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = 0)$; c'est précisément la surface étudiée par Cremona. L'étude de cette surface revient donc à celle de la surface F, sa transformée birationnelle.

2. Considérons la section du cône V_3^4 par un hyperplan ne passant pas par A_0, par exemple par l'hyperplan $x_0 = 0$. Cette section est une surface de Véronèse Φ et on peut donc établir une correspondance birationnelle entre les points de la surface Φ et les points d'un plan π en rapportant projectivement les sections hyperplanes de cette surface aux coniques de ce plan.

A un point de π correspond un point de la surface Φ ou, si l'on veut, la génératrice du cône V_3^4 passant par ce point.

Aux points d'une droite du plan π correspondent les points d'une conique de la surface Φ ou encore les génératrices du cône V_3^4 passant par cette conique et formant un cône V_2^2 du second ordre. Aux points d'une conique du plan π correspondent les points d'une section hyperplane de Φ, ou encore les génératrices du cône V_3^4 situées dans un hyperplan de S_6 passans pas A_0 (et formant un cône V_2^4 d'ordre quatre).

La surface F étant rencontrée en deux points par toute génératrice du cône V_3^4, à un point de π correspondent deux points de F et à un point de F, un point de π. On obtient ainsi un plan double F', de support π, birationnellement identique à F [2]).

Les ∞^2 cônes V_2^2 appartenant à V_3^4 rencontrent F suivant des quartiques elliptiques, par suite la courbe de diramation du plan double F' est une quartique Γ. Cette courbe est de genre trois si, comme nous le supposerons, l'hyperquadrique [3]) ne touche en aucun point le cône V_3^4 et ne possède aucun point double appartenant à ce cône.

3. Considérons une droite *a* tangente en deux points à la quartique Γ. A cette droite correspond, dans V_3^4, un cône du second ordre V_2^2 tangent

[1]) Nous avons eu l'occasion d'utiliser cette transformation dans l'étude d'une surface de genre trois, dans notre travail *sur une involution rationnelle, douée de trois points de coïncidence, appartenant à une surface de genre trois* (Bulletins de l'Acad. roy. de Belgique 1922, pp. 653—665, 694—702). Voir aussi une note *sur une famille de surfaces algébriques de l'espace à six dimensions*, en cours d'impression dans le Bulletin de la Soc. Math. de France.

[2]) On pourrait arriver directement à cet plan double en partant de la surface (4) de Cremona; il nous paraît plus simple de passer par la surface.

[3]) On déduit cette propriété d'une formule générale donnée par G. *HUMBERT*, *Application de la théorie des fonctions fuchsiennes à l'étude des courbes algébriques* (Journal de Liouville, 1886, pp. 239—329).

en deux points à la surface F. Par suite, la section de cette surface et de ce cône se compose de deux coniques ayant deux points communs.

Comme il y a 28 droites bitangentes à la courbe Γ, il existe, sur la surface F, 28 couples de coniques. Il est aisé de voir qu'à ces 56 coniques correspondent les 56 coniques de la surface de Cremona.

4. Soit γ une conique tangente en quatre points à la courbe Γ. Il correspond à γ, sur le cône V_3^4, un cône du quatrième ordre V_2^4, section de V_3^4 par un hyperplan passant par A_0, tangent en quatre points à la surface F. Il en résulte que la section de la surface F par cet hyperplan dégénère en deux courbes, nécessairement rationnelles et d'ordre quatre.

Une conique tangente en quatre points à une quartique plane Γ, de genre trois, appartient à une série ∞^1, d'indice 2, de coniques possédant la même propriété. On en conclut l'existence, sur F, de ∞^1 quartiques rationnelles, distribuées nécessairement en deux faisceaux.

Comme il y a 63 systèmes ∞^1 de coniques tangentes en quatre points à une quartique plane de genre trois, il y a, sur F, 63 couples de faisceaux de de quartiques rationnelles. Il leur correspond, sur la surface de Cremona les faisceaux de quartiques rationnelles découverts par ce dernier.

Dans un système de coniques tangentes en quatre points à la courbe Γ, il y a six courbes dégénérées en six couples de bitangentes. Par suite, chacun des 126 faisceaux de quartiques rationnelles appartenant à F contient six courbes dégénérées en des couples de coniques.

On peut d'ailleurs arriver à l'existence des faisceaux de quartiques rationnelles sur la surface F d'une autre manière. Les hyperquadriques de S_6 contenant le cône V_3^4 sont en nombre ∞^5 et, par suite, il y a ∞^6 hyperquadriques contenant F. Parmi celles-ci, il y en a un nombre fini qui sont trois fois spécialisées, c'est-à-dire qui sont obtenues en projetant d'un plan une quadrique appartenant à un espace S_3 ne rencontrant pas ce plan. Une telle hyperquadrique contient deux séries d'espaces linéaires S_4 qui découpent, sur F, des quartiques rationnelles. Mais il semble difficile d'arriver par cette voie à compter les faisceaux de quartiques rationnelles appartenant à F.

5. On peut aisément déduire, de la représentation de F sur le plan double F , les divers systèmes de courbes tracés sur la surface F.

A une courbe γ d'ordre n du plan π, correspond une courbe d'ordre $4n$ et (en général) de genre $n(n-1)+1$, sur F.

Si la courbe γ est tangente en $2n$ points à la courbe de diramation Γ, la courbe correspondante sur F se décompose en deux courbes d'ordre $2n$ et de genre $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$.

En particulier, si $n = 3$, comme il y a 64 systèmes ∞^2 de cubiques tangentes en six points à la courbe Γ, il y aura, sur F, 128 systèmes linéaires triplement infinis, de courbes elliptiques du sixième ordre et de degré neuf.

Bruxelles, le 14 février 1925.