ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE
Extrait des *Bulletins de la Classe des Sciences*. Séance du 7 février 1925, nº 3, pp. 37-47.

GÉOMÉTRIE. **Sur les involutions régulières d'ordre deux appartenant à une surface irrégulière,**

par L. GODEAUX, professeur à l'École militaire.

(Seconde note.)

Dans la première note (*), nous avons montré que sur une surface algébrique F, d'irrégularité $q > 0$, transformée en elle-même par une transformation birationnelle T engendrant une involution régulière d'ordre deux, on peut toujours construire un système continu complet $\{C\}$, transformé en lui-même par T, contenant 2^{2q} systèmes linéaires complets transformés en eux-mêmes par T, chacun d'eux contenant deux systèmes linéaires partiels composés au moyen de l'involution. De plus, l'un au moins de ces 2^{2q+1} systèmes partiels est dépourvu de points-base.

Dans cette seconde note, nous continuons l'examen du système complet $\{C\}$ et, plus généralement, nous faisons l'étude des systèmes continus tracés sur F, en relation avec l'involution.

Nous continuons à utiliser les notations adoptées dans la première note.

1. Le système continu complet $\{C\}$, transformé en lui-même par T, contient $2^{2q} = k + 1$ systèmes linéaires complets

$$|C_0|, \quad |C_1|, \quad \ldots, \quad |C_k|$$

transformés en eux-mêmes par T. Chacun de ces systèmes contient deux systèmes linéaires partiels composés au moyen

(*) *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences), 1924, pp. 418-446.

de l'involution I_2. Pour $|C_0|$, ces systèmes sont $|C_{01}|$, dépourvu de points-base, et $|C_{02}|$, ayant comme points-base les 4α points de coïncidence de I_2. Sur la surface Φ, aux courbes C_{01} correspondent les sections hyperplanes Γ et aux courbes C_{02} correspondent des courbes Γ_0, d'ordre n, de genre $\pi - \alpha$, de degré $n - 2\alpha$, telles que (*)

$$2\Gamma \equiv 2\Gamma_0 + A,$$

où A représente la somme des 4α courbes de diramation infiniment petites de la surface Φ.

Nous désignons par $|C_{i1}|$, $|C_{i2}|$ les systèmes linéaires composés au moyen de I_2, appartenant au système $|C_i|$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$; par $4\alpha_{i1}$ le nombre des points de coïncidence de I_2 qui sont points-base de $|C_{i1}|$; par $4\alpha_{i2} = 4(\alpha - \alpha_{i1})$ le nombre de ces points qui sont points-base de $|C_{i2}|$. Nous supposerons $\alpha_{i1} \leqq \alpha_{i2}$.

Sur la surface Φ, les systèmes linéaires (complets) correspondant à $|C_{i1}|$, $|C_{i2}|$ seront désignés respectivement par $|\Gamma_{i1}|$, $|\Gamma_{i2}|$. Si l'on représente par A_{i1} la somme des courbes de diramation infiniment petites de Φ qui correspondent aux points-base de $|C_{i1}|$; par A_{i2} la somme des courbes de même nature correspondant aux points-base de $|C_{i2}|$, on a

$$2\Gamma \equiv 2\Gamma_{i1} + A_{i1} \equiv 2\Gamma_{i2} + A_{i2}.$$

Les courbes Γ_{i1}, Γ_{i2} sont d'ordre n. On voit sans difficulté que les courbes Γ_{i1} sont de genre $\pi - \alpha_{i1}$ et de degré $n - 2\alpha_{i1}$, les courbes Γ_{i2} de genre $\pi - \alpha_{i2}$ et de degré $n - 2\alpha_{i2}$.

2. Proposons-nous tout d'abord de voir si quelques-uns des nombres α_{i1} peuvent être nuls.

Supposons $\alpha_{11} = 0$. Alors, nous avons les relations fonctionnelles

$$2\Gamma \equiv 2\Gamma_{11}, \qquad 2\Gamma_0 \equiv 2\Gamma_{12}.$$

(*) L. Godeaux, *Mémoire sur les Surfaces algébriques doubles ayant un nombre fini de points de diramation*. (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1914.)

Il s'ensuit que le diviseur de Severi (*) σ de la surface Φ doit être pair.

Considérons la courbe (peut-être virtuelle)

$$\Gamma_{21} + \Gamma - \Gamma_{11}.$$

Cette courbe possède les mêmes caractères que les courbes Γ_{21}, c'est-à-dire le degré $n - 2\alpha_{21}$ et le genre $\pi - \alpha_{21}$, mais ne leur est pas équivalente. Si π_a est le genre arithmétique de la surface Φ, on peut toujours choisir $\{C\}$ (en le remplaçant éventuellement par un de ses multiples) de manière que $|\Gamma_{12}|$ soit non spécial et que l'on ait

$$\pi_a + n - 2\alpha_{21} - \pi + \alpha_{21} + 1 > 0.$$

Il en résulte que la courbe $\Gamma_{21} + \Gamma - \Gamma_{11}$ est effective (**).

On a évidemment

$$2\Gamma \equiv 2(\Gamma_{21} + \Gamma - \Gamma_{11}) + A_{21} \equiv 2\Gamma_{21} + A_{21},$$

et, par suite, aux courbes $\Gamma_{21} + \Gamma - \Gamma_{11}$ correspondent, sur F, des courbes du système $\{C\}$ transformées en elles-mêmes par T. Ces courbes appartiennent donc à l'un des systèmes $|C_3|$, $|C_4|$, ..., $|C_k|$, par exemple à $|C_3|$. Les transformées des courbes $\Gamma_{21} + \Gamma - \Gamma_{11}$ sur F sont, d'une manière plus précise, les courbes C_{31}, et l'on a $\alpha_{21} = \alpha_{31}$, $\alpha_{22} = \alpha_{32}$,

$$\Gamma_{31} \equiv \Gamma_{21} + \Gamma - \Gamma_{11}, \qquad \Gamma_{32} \equiv \Gamma_{22} + \Gamma - \Gamma_{11},$$
$$2\Gamma_{31} \equiv 2\Gamma_{21}, \qquad 2\Gamma_{32} \equiv 2\Gamma_{22}.$$

(*) Severi, *La base minima pour la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique.* (Annales de l'École normale supérieure, 1908.) *Complementi alla teoria della base per la totalità delle curve di una superficie algebrica.* (Rendiconti Circolo Matem. di Palermo, 1910, XXX.)

(**) Severi, *Sulle curve algebriche virtuali appartenenti ad una superficie algebrica.* (Rend. Istituto Lomb., 1905.)

En poursuivant ce raisonnement, on parviendrait à des relations qu'on pourrait écrire

$$\alpha_{2i,1} = \alpha_{2i+1,1}, \qquad \alpha_{2i,2} = \alpha_{2i+1,2},$$
$$2\Gamma_{2i,1} \equiv 2\Gamma_{2i+1,1}, \qquad 2\Gamma_{2i,2} \equiv 2\Gamma_{2i+1,2},$$
$$i = 0, 1, 2, \ldots, \frac{1}{2}(k-1).$$

Il est aisé de voir, par un raisonnement analogue, que, si l'on suppose que deux des systèmes $|C_{11}|$, $|C_{21}|$, ..., $|C_{k1}|$ ont mêmes points-base, on sera conduit aux mêmes conclusions.

Inversement, si le diviseur σ de la surface Φ est pair, et si l'on choisit $\{C\}$ de manière à avoir des systèmes $|\Gamma_{i1}|$ non spéciaux et à satisfaire à l'inégalité

$$\pi_a + n - \pi - \alpha_{i1} + 1 \geq 0$$

(ce qui est toujours possible), on obtiendra la même distribution des systèmes $|\Gamma|$, $|\Gamma_0|$, $|\Gamma_{11}|$, ..., $|\Gamma_{k2}|$ que ci-dessus.

En résumé,

Si le diviseur de la surface Φ est pair, le système $\{C\}$ étant choisi de manière que les systèmes $|\Gamma_{i1}|$ soient non spéciaux et que les nombres α_{i1} soient inférieurs à $\pi_a + n - \pi + 1$, les 2^{2q} systèmes $|C_{01}|$, $|C_{11}|$, ..., $|C_{k1}|$ se partagent en 2^{2q-1} couples ayant les mêmes points-base (points de coïncidence de I_2).

On en conclut en même temps que

Si le diviseur de la surface Φ est impair, il n'existe jamais deux systèmes $|C_{01}|$, $|C_{11}|$, ..., $|C_{k1}|$ ayant pour points-base les mêmes points de coïncidence de I_2.

Observons, enfin, que deux des nombres α_{i1} ne peuvent être nuls. Si l'on avait, par exemple, $\alpha_{11} = \alpha_{21} = 0$, on aurait

$$2\Gamma \equiv 2\Gamma_{11} \equiv 2\Gamma_{12}.$$

Or, la division par 2 du système $|2\Gamma|$ ne peut donner au plus que deux systèmes linéaires distincts. Deux des systèmes

$|\Gamma|$, $|\Gamma_{11}|$, $|\Gamma_{12}|$ seraient donc équivalents et, par suite, deux des systèmes $|C_0|$, $|C_1|$, $|C_2|$ seraient équivalents, ce qui est absurde.

Cette observation conduit immédiatement à la propriété suivante : on a $q > 0$, par hypothèse, donc $2^{2q} > 3$. Si l'involution I_2 était dépourvue de points de coïncidence ($\alpha = 0$), les systèmes $|C_{11}|$, $|C_{12}|$, ... seraient également dépourvus de points-base ($\alpha_{11} = \alpha_{12} = \ldots = 0$), ce qui est impossible. Donc,

S'il existe, sur une surface irrégulière, une involution d'ordre deux qui soit régulière, cette involution possède nécessairement des points de coïncidence.

3. Envisageons un système continu $\{C'\}$ de F, transformé en lui-même par T et contenant 2^{2q} systèmes linéaires $|C'_0|$, $|C'_1|$, ..., $|C'_k|$ transformés en eux-mêmes par T, chacun de ces systèmes linéaires contenant deux systèmes partiels composés au moyen de I_2. De plus, un des systèmes partiels, par exemple le système $|C_{01}|$ appartenant à $|C_0|$, est supposé dépourvu de points-base. Il est toujours possible de former de pareils systèmes; il suffit, par exemple, de prendre

$$\{C'\} = \{2C\}.$$

Nous utiliserons, pour le système $\{C'\}$, les mêmes notations que pour $\{C\}$, mais accentuées. Ainsi, nous supposerons que dans le système linéaire $|C'_1|$ il y a un système linéaire incomplet $|C'_{11}|$, composé au moyen de I_2, ayant pour points-base $4\alpha'_{11}$ points de coïncidence de I_2.

Considérons le système complet $\{C + C'\}$. Ce système contient des systèmes linéaires transformés en eux-mêmes par T; ces systèmes s'obtiendront en faisant la somme d'un système linéaire $|C_i|$ ($i = 0, 1, 2, \ldots, k$) et d'un système linéaire $|C'_j|$ ($j = 0, 1, 2, \ldots, k$). En faisant ces sommes, $|C_i + C'_j|$ de toutes les manières possibles, on obtiendra $(2^{2q})^2$ systèmes linéaires. Observons que le système continu complet $\{C + C'\}$ ne peut contenir qu'au plus 2^{2q} systèmes linéaires transformés en eux-mêmes par T; donc les sommes $|C_i + C'_j|$ fourniront plusieurs fois le même système.

Supposons, pour fixer les idées, que les sommes $|C_0 + C'_0|$, $|C_1 + C'_1|$ donnent le même système

$$|(C + C')_0| = |C_0 + C'_0| = |C_1 + C'_1|.$$

Dans le système $|(C + C')_0|$, il y a deux systèmes linéaires $|(C + C')_{01}|$, $|(C + C')_{02}|$ composés au moyen de I_2. Ces systèmes devront contenir les courbes

$$C_{01} + C'_{01}, \quad C_{02} + C'_{02}, \quad C_{01} + C'_{02}, \quad C_{02} + C'_{01}.$$

Les systèmes $|C_{01}|$ et $|C'_{01}|$ étant dépourvus de points-base, la courbe $C_{01} + C'_{01}$ varie dans un système linéaire dépourvu de points-base. Supposons que ce système soit précisément $|(C + C')_{01}|$. Mais alors, le système $|(C + C')_{02}|$ a pour points-base les 4α points de coïncidence de I_2; donc il comprend les courbes $C_{01} + C'_{02}$, $C_{02} + C'_{01}$.

Observons maintenant qu'une courbe du système $|(C + C')_{01}|$, passant par un point de coïncidence de I_2, possède en ce point un point double (*); il en résulte que les courbes $C_{02} + C'_{02}$, qui passent doublement par les 4α points de coïncidence de I_2, appartiennent au système $|(C + C')_{01}|$.

Nous pouvons faire deux hypothèses :

En formant de toutes les manières possibles les systèmes $|C_i + C'_j|$:

1° On trouve plusieurs fois le système $|(C + C')_0|$;

2° On ne trouve qu'une seule fois le système $|(C + C')_0|$.

Plaçons-nous dans la première hypothèse.

On peut supposer que les courbes $C_1 + C'_1$ appartiennent au système $|(C + C')_0|$. Considérons alors les courbes

$$C_{11} + C'_{11}, \quad C_{12} + C'_{12}, \quad C_{11} + C'_{12}, \quad C_{12} + C'_{11}. \qquad (1)$$

(*) L. Godeaux, *Mémoire sur les Surfaces doubles...* (Loc. cit.)

Désignons par x_{ij} le nombre des points communs aux courbes C_{1i}, C'_{1j} qui soient les points de coïncidence de I_2. Observons maintenant que, d'une part, les courbes (1) doivent appartenir à l'un ou l'autre de deux systèmes linéaires composés au moyen de I_2, les points de coïncidence de I_2 étant des points-base pour ces systèmes, mais aucun de ces points ne pouvant être à la fois point-base pour les deux systèmes; d'autre part, les courbes d'un système linéaire quelconque, composé au moyen de I_2, passant par un point de coïncidence de I_2 qui ne soit pas point-base du système, y acquièrent un point double. Il résulte immédiatement de ces observations que les deux premières courbes (1) font partie d'un système composé au moyen de I_2, ayant $x_{12} + x_{21}$ points-base qui sont des points de coïncidence de I_2, tandis que les deux dernières courbes (1) font partie d'un système analogue ayant pour points-base les $x_{11} + x_{12}$ points de coïncidence de I_2 restants.

Mais les deux premières courbes (1) doivent appartenir à l'un des systèmes $|(C + C')_{01}|$, $|(C + C')_{02}|$, par exemple au premier. Ce système étant dépourvu de points-base, on a donc $x_{12} = x_{21} = 0$ et, par suite, $x_{11} + x_{22} = 4\alpha$. Comme on a

$$4\alpha_{11} = x_{11} + x_{12}, \qquad 4\alpha_{12} = x_{21} + x_{22},$$
$$4\alpha'_{11} = x_{11} + x_{21}, \qquad 4\alpha'_{12} = x_{12} + x_{22},$$

on en déduit $\alpha_{11} = \alpha'_{11}$, $\alpha_{12} = \alpha'_{12}$.

Plaçons-nous maintenant dans la seconde hypothèse.

Les systèmes

$$|C_0 + C'_1|, \quad |C_0 + C'_2|, \quad \ldots, \quad |C_0 + C'_k| \qquad (2)$$

sont nécessairement distincts, sans quoi les systèmes $|C'_1|$, $|C'_2|$, ..., $|C'_k|$ ne le seraient pas non plus.

Les systèmes

$$|C_1 + C'_0|, \quad |C_2 + C'_0|, \quad \ldots, \quad |C_k + C'_0| \qquad (3)$$

sont également distincts. Comme il y a k systèmes (2) et k systèmes (3) et que ces systèmes ne peuvent coïncider avec $|C_0 + C'_0|$, un système (2) quelconque doit se retrouver dans les systèmes (3).

Supposons, pour fixer les idées, qu'on ait

$$|C_0 + C'_1| = |C_1 + C'_0|. \tag{4}$$

Considérons les courbes

$$C_{01} + C'_{11}, \quad C_{02} + C'_{22}, \quad C_{01} + C'_{22}, \quad C_{02} + C'_{11}.$$

Il est facile de voir que les deux premières appartiennent à un même système linéaire possédant $4\alpha'_{11}$ points-base, les deux secondes à un même système linéaire possédant $4\alpha'_{12}$ points-base, ces deux systèmes étant composés au moyen de I_2 et ces points-base étant des points de coïncidence de I_2.

De même, les courbes $C'_{01} + C_{11}$, $C'_{02} + C_{22}$ appartiennent à un système linéaire ayant $4\alpha_{11}$ points-base, les courbes $C'_{01} + C_{22}$, $C'_{02} + C_{11}$ à un système linéaire ayant $4\alpha_{12}$ points-base, ces systèmes étant composés au moyen de I_2 et leurs points-base étant des points de coïncidence de I_2 également.

Mais, en vertu de la relation fonctionnelle (4), chacun des deux premiers systèmes doit coïncider avec l'un des derniers. On peut donc écrire $\alpha_{11} = \alpha'_{11}$, $\alpha_{12} = \alpha'_{12}$.

En poursuivant ce raisonnement, on trouve finalement

$$\alpha_{i1} = \alpha'_{i1}, \quad \alpha_{i2} = \alpha'_{i2}, \qquad (i = 1, 2, ..., k).$$

Tous les systèmes continus complets, sur la surface F, *contenant* 2^{2q+1} *systèmes linéaires composés au moyen de l'involution* I_2, *l'un de ces systèmes étant dépourvu de points-base, se comportent de la même manière vis-à-vis des points de coïncidence de l'involution.*

4. Il nous sera nécessaire pour la suite de montrer que la seconde hypothèse faite plus haut est inadmissible.

En nous plaçant dans cette hypothèse, nous avons $\alpha_{11} = \alpha'_{11}$, $\alpha_{12} = \alpha'_{12}$. Considérons le système $|C_1 + C'_1|$.

Les courbes $C_{11} + C'_{12}$, $C_{12} + C'_{11}$ appartiennent à un même système linéaire, composé au moyen de I_2, ayant comme points-base tous les points de coïncidence de cette involution.

Les courbes $C_{11} + C'_{11}$, $C_{12} + C'_{12}$ appartiennent à un même système linéaire, composé au moyen de I_2, mais dépourvu de points-base.

Les courbes $C_{11} + C'_{11}$, $C_{12} + C'_{12}$ pourraient ne pas appartenir à $|(C + C')_0|$ seulement dans le cas où la surface Φ aurait un diviseur σ pair. Mais alors, on recommencerait le même raisonnement pour les systèmes suivants et l'on arriverait à une absurdité.

Il est facile de voir qu'on peut numéroter les systèmes linéaires de $\{C\}$, $\{C'\}$, transformés en eux-mêmes par T, de manière à avoir

$$|C_0 + C'_0| = |C_1 + C'_1| = |C_2 + C'_2| = \cdots = |C_k + C'_k|.$$

On en déduira sans peine

$$|C_0 + C'_1| = |C_1 + C'_0|, \quad \ldots, \quad |C_0 + C'_k| = |C_k + C'_0|.$$

Plus généralement, on aura

$$|C_i + C'_j| = |C_j + C'_i|.$$

5. Considérons le système

$$\{D\} = \{2C\}.$$

D'après ce que nous venons de voir, il contient $2^{2q} = k + 1$ systèmes linéaires transformés en eux-mêmes par T. L'un de ces systèmes,

$$|D_0| = |2C_0| = |2C_1| = \cdots = |2C_k|,$$

contient deux systèmes linéaires partiels composés au moyen de I_2, dont l'un est dépourvu de points-base.

Les autres systèmes linéaires transformés en eux-mêmes par T sont

$$|D_1| = |C_0 + C_1|, \quad |D_2| = |C_0 + C_2|, \quad \ldots, \quad |D_k| = |C_0 + C_k|.$$

Au sujet de ces systèmes, nous ferons la remarque suivante, qui nous sera utile dans la suite :

Si le système
$$|D_i| = |C_0 + C_i|$$
contient les courbes $C_j + C_l$, les systèmes
$$|D_j| = |C_0 + C_j|, \quad |D_l| = |C_0 + C_l|$$
contiennent, le premier les courbes $C_l + C_i$, le second les courbes $C_i + C_j$ (i, j, l étant des entiers positifs distincts inférieurs à k).

En effet, si l'on a
$$C_0 + C_i \equiv C_j + C_l,$$
on peut écrire
$$C_0 + 2C_i + C_j \equiv C_i + 2C_j + C_l,$$
ou, comme $2C_i$ et $2C_j$ appartiennent toutes deux au système $|D_0|$,
$$C_0 + C_j \equiv C_l + C_i.$$

La seconde partie de la remarque se démontre de même.

6. Parmi les systèmes continus complets appartenant à la surface F, il peut exister des systèmes ne contenant aucun système linéaire partiel, composé au moyen de I_2, dépourvu de points-base.

Soit $\{E\}$ un système continu complet, formé de ∞^q systèmes linéaires, transformé en lui-même par T et contenant, par suite, $2^{2q} = k + 1$ systèmes linéaires $|E_0|, |E_1|, \ldots, |E_k|$, possédant la même propriété. Supposons que le système linéaire $|E_i|$ ($i = 0, 1, 2, \ldots, k$) contienne deux systèmes linéaires partiels $|E_{i1}|$, $|E_{i2}|$, composés au moyen de I_2 et possédant, le premier $2\beta_{i1}$, le second $2\beta_{i2}$ points-base simples qui soient des points de coïncidence de I_2 (*). On a, d'ailleurs,
$$\beta_{i1} + \beta_{i2} = 2\alpha,$$

(*) Les nombres $2\beta_{i1}$, $2\beta_{i2}$ sont certainement pairs en vertu de la formule de Zeuthen.

car, si l'on rapporte projectivement les courbes E_i aux hyperplans d'un espace linéaire ayant même dimension que $|E_i|$, on obtient une transformée birationnelle de F sur laquelle T est déterminée par une homographie birationnelle involutive. Les 4α points de coïncidence de I_2 sont sur l'un ou l'autre des espaces unis de cette homographie; d'où la propriété énoncée.

Nous allons démontrer que le système complet $\{2E\}$ contient un système linéaire partiel composé au moyen de I_2 et dépourvu de points-base qui soient des points de coïncidence de I_2.

Le système $\{2E\}$ contient le système linéaire $|2E_0|$, transformé en lui-même par T, et contenant deux systèmes linéaires partiels composés au moyen de I_2.

Les courbes $E_{01} + E_{02}$ sont transformées en elles-mêmes par T et passent simplement par les $2(\beta_{01} + \beta_{02}) = 4\alpha$ points de coïncidence de I_2; donc, dans le système $|2E_0|$, il y a un système linéaire partiel composé au moyen de I_2 et ayant pour points-base simples les points de coïncidence de cette involution.

Il en résulte que le second système de $|2E_0|$, composé au moyen de I_2, est dépourvu de points-base qui soient des points de coïncidence de I_2. Ce système contient les courbes $2E_{01}$, qui passent doublement par $2\beta_{01}$, et les courbes $2E_{02}$, qui passent doublement par $2\beta_{02}$ points de coïncidence de I_2.

S'il existe sur la surface F *un système continu complet* ∞^q, *transformé en lui-même par* T, *le double de ce système contient certainement un système linéaire partiel, composé au moyen de* I_2, *dépourvu de points-base qui soient des points de coïncidence de* I_2.

Marcel HAYEZ, imprimeur, rue de Louvain, 112, Bruxelles.