ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE
Extrait des *Bulletins de la Classe des Sciences*. Séance du 5 mai 1925, n° 5, pp. 157-166.

GÉOMÉTRIE. — Sur les involutions régulières d'ordre deux appartenant à une surface irrégulière (*),

(Troisième note),

par L. GODEAUX, professeur à l'École militaire.

Si F est une surface algébrique irrégulière et Σ un système continu ∞^1 de courbes non équivalentes tracées sur F, on peut, par une construction imaginée par M. Severi (**), faire correspondre à F, dans la variété de Picard V attachée à cette surface, soit une courbe, et alors F possède un faisceau irrationnel de courbes, soit une surface de même irrégularité que F, et alors F est dépourvue de faisceau irrationnel de courbes. Nous utiliserons cette construction en partant d'un système Σ transformé en lui-même par une transformation birationnelle involutive T de la surface F en elle-même, génératrice d'une involution régulière I_2, d'ordre deux, n'ayant qu'un nombre fini de points de coïncidence. Cela nous permet de ramener l'étude des systèmes de courbes tracées sur F à celle des systèmes de courbes tracées sur une surface appartenant à la variété de Picard V et transformée en elle-même par une transformation de seconde espèce de cette variété. Nous étudions ensuite plus particulièrement le cas où l'irrégularité de la surface F t égale à deux.

1. Soit F une surface algébrique d'irrégularité $q > 0$, possédant une involution régulière I_2, d'ordre deux, n'ayant qu'un nombre fini, 4α, de points de coïncidence. Désignons par V_q la variété de Picard attachée à F, par T la transformation birationnelle de F en elle-même, génératrice de I_2, par θ la transfor-

(*) Nos deux premières notes sur ce sujet ont paru dans le *Bulletin de l'Acad roy. de Belgique*, 1924, pp. 434-446; 1925, pp. 37-47.

(**) *Relazioni tra gl' integrali semplici e gl' integrali multipli di 1ª specie di una varietà algebrica.* (ANNALI DI MATEMATICA, 1913, t. XX.)

mation birationnelle involutive correspondante de la variété V_q en elle-même. La transformation θ est une des transformations ordinaires de seconde espèce de V_q.

Considérons, sur F, un système continu complet $\{C\}$, formé de ∞^9 systèmes linéaires irréductibles $|C|$, de dimension r, transformé en lui-même par T. Les points de la variété de Picard V_q correspondent birationnellement aux systèmes linéaires $|C|$ de $\{C\}$.

Soit ensuite L une courbe algébrique, dépourvue de points multiples, tracée sur la variété V_q, transformée en elle-même par θ. Il est toujours possible de construire une courbe telle que L d'une infinité de manières. Soit, en effet, Ω la variété à q dimensions image de l'involution d'ordre deux engendrée par θ sur V_q. Cette involution ne possédant qu'un nombre fini, 2^{2q}, de points de coïncidence, il est possible de prendre, pour modèle projectif de la variété Ω, une variété sur laquelle les points de diramation soient isolés (*). Il suffit alors de prendre, pour la courbe L, la courbe qui correspond, sur V_q, à la courbe section de Ω par un nombre convenablement choisi d'hypersurfaces de l'espace ambiant, ne passant pas par les points de diramation.

Aux points de L correspondent, sur F, ∞^1 systèmes linéaires $|C|$ formant un système continu Σ', transformé en lui-même par T.

Considérons enfin une courbe D, algébrique, irréductible, de F, transformée en elle-même par T et dont l'ordre soit supérieur à celui des courbes C. Les courbes C ne peuvent donc jamais avoir une partie commune avec D.

Dans chacun des systèmes linéaires $|C|$ appartenant au système Σ', il y aura un nombre fini de courbes ayant un contact d'ordre r-1 avec la courbe D. Les courbes ainsi obtenues

(*) On obtient la variété Ω en partant de la variété V_q comme la surface de Kummer en partant de la surface de Jacobi.

forment un système continu Σ, simplement infini, transformé en lui-même par T.

2. Considérons les courbes du système Σ passant par un point déterminé de F. Elles forment une courbe réductible que nous désignerons par E. Aux points de F correspondent donc ainsi ∞^2 courbes E et ces courbes E appartiennent à un système continu ∞^2 transformé en lui-même par T.

Deux cas peuvent se présenter (*) :

1° Parmi les ∞^2 courbes E, il y en a ∞^1 équivalentes à une courbe E déterminée;

2° Parmi les ∞^2 courbes E, il n'y en a qu'un nombre fini, ν, équivalentes à une courbe E déterminée.

Dans le premier cas, il existe un faisceau irrationnel $\{K\}$ sur la surface F et les ∞^1 courbes E relatives aux points d'une courbe K sont équivalentes. Le faisceau irrationnel $\{K\}$ est transformé en lui-même par T et il lui correspond, sur la variété de Picard V_q, une courbe K_1, transformée en elle-même par θ. Les courbes K de $\{K\}$ et la courbe K_1 sont en correspondance birationnelle.

Dans le second cas, la surface F ne peut posséder de faisceau irrationnel de courbes.

Observons que le second cas ne peut se présenter si $q = 1$, car alors la variété de Picard attachée à F est une courbe elliptique V_1, et l'on se trouve nécessairement dans le premier cas. Une surface d'irrégularité 1 possède toujours un faisceau elliptique de courbes (**).

3. Plaçons-nous dans l'hypothèse où la surface F possède un faisceau irrationnel de courbes $\{K\}$ et soit Φ une surface (régulière) image de l'involution I_2. D'après ce qui vient d'être dit, le faisceau $\{K\}$ est transformé en lui-même par T. Comme

(*) Severi, *loc. cit.*

(**) Cette remarque est connue : voir Severi, *Osservazioni sui sistemi continui di curve appartenenti ad una superficie algebrica.* (Atti di Torino, 1903-1904.)

la surface régulière Φ ne peut posséder de faisceau irrationnel de courbes, les courbes K ne peuvent être transformées en elles-mêmes par T. Cette transformation engendre donc, dans le faisceau $\{K\}$, une involution d'ordre deux, nécessairement rationnelle, g_2^1. Il en résulte qu'il y a certainement des courbes du faisceau $\{K\}$, en nombre fini, transformées en elles-mêmes par T. Soit K_0 une de ces courbes.

Envisageons une courbe algébrique H, tracée sur F, transformée en elle-même par T, irréductible et d'ordre supérieur à celui des courbes K. Soient K' les courbes qui correspondent, sur Φ, aux courbes K, K'_0 la courbe correspondant à K_0, H' la courbe correspondant à H.

Si n est le nombre de points communs aux courbes K et à la courbe H, les courbes K' coupent la courbe H' en n points également. En particulier, la courbe K_0 coupe H et la courbe K'_0 coupe H' en n points. Ces n points sont donc nécessairement des points invariants pour T. Ce raisonnement pouvant être répété pour toute courbe telle que H, on voit que tous les points de la courbe K_0 sont des points de coïncidence de l'involution I_2. Cette involution I_2 ne pouvant, par hypothèse, avoir une infinité de points de coïncidence, la surface F ne peut posséder de faisceau irrationnel de courbes.

Une surface possédant un faisceau irrationnel de courbes ne peut contenir une involution régulière d'ordre deux, n'ayant qu'un nombre fini de points de coïncidence.

4. Plaçons-nous maintenant dans l'hypothèse où F est dépourvue de faisceau irrationnel de courbes et est donc d'irrégularité $q > 1$.

Les ∞^2 courbes E se distribuent en ∞^2 groupes de ν courbes équivalentes. Aux ∞^2 systèmes linéaires non équivalents déterminés par ces ∞^2 groupes de courbes E correspondent, sur la variété de Picard V_q, les points d'une surface algébrique Ψ d'irrégularité q. A un point de F correspond une courbe E et, par suite, un point de Ψ. A un point de Ψ correspondent ν courbes E et, par suite, les ν points de F ayant donné naissance à ces courbes. La surface Ψ représente donc une involution I_ν, d'ordre ν, appartenant à F.

Le système Σ étant transformé en lui-même par T, cette transformation échange entre elles les ∞^2 courbes E. Il en résulte que la surface Ψ est transformée en elle-même par la transformation θ. Les groupes de l'involution I_ν sont échangés entre eux par T, mais cette involution I_ν ne peut évidemment pas être composée au moyen de l'involution I_2. A l'involution I_2 correspond, sur la surface Ψ, une involution I_2 d'ordre deux engendrée par θ.

Désignons par Φ la surface régulière image de l'involution I_2, par Ψ' la surface image de l'involution I'_2 engendrée sur Ψ par θ. A l'involution I_ν correspond, sur Φ, une involution I'_ν, d'ordre ν, dont la surface Ψ' est l'image. Cette surface Ψ' est donc régulière.

Soit, sur F, P un point de coïncidence de I_2. A P correspond, sur Ψ, un point P_1 invariant pour θ, car la courbe E relative au point P est transformée en elle-même par T. Il en résulte que le groupe de l'involution I_ν, contenant P, est tranformé en lui-même par T. A ce groupe doit correspondre, sur Φ, un groupe de points de l'involution I'_ν ayant pour image, sur Ψ', le point correspondant à P_1. Le groupe de I_ν contenant P et le groupe correspondant de I'_ν, sur Φ, doivent être formés du même nombre de points (ce nombre sera précisément ν si P_1 n'appartient pas à la courbe de diramation de la surface Ψ pour la correspondance avec F). Il en résulte que tous les points du groupe de I_ν contenant un point de coïncidence de I_2 sont des points de coïncidence de I_2.

La surface Ψ doit passer simplement par les points invariants pour θ qu'elle contient, sans quoi la surface F posséderait des courbes de coïncidence pour l'involution I_2, contrairement à l'hypothèse.

Si une surface algébrique irrégulière contient une involution régulière d'ordre deux, n'ayant qu'un nombre fini de points de coïncidence, elle est la transformée rationnelle d'une surface de même irrégularité, appartenant à la variété de Picard attachée à la première surface, et transformée en elle-même par une transformation de seconde espèce de cette variété. Les points de la première surface, qui correspondent aux points de la seconde, invariants pour la transformation de seconde espèce, sont les points de coïncidence de l'involution d'ordre deux considérée.

5. Considérons, sur la surface Ψ, un système continu complet $\{\Gamma\}$, transformé en lui-même par la transformation θ. D'après ce que nous avons établi dans notre première note, nous pouvons choisir $\{\Gamma\}$ de manière que ce système contienne 2^{2q} systèmes linéaires transformés en eux-mêmes par θ, chacun de ces systèmes contenant deux systèmes linéaires partiels composés au moyen de l'involution I'_2 engendrée par θ, et enfin l'un au moins de ces 2^{2q+1} systèmes partiels étant dépourvu de points-base qui soient des points de coïncidence de I'_2.

Au système continu $\{\Gamma\}$ correspondra, sur F, un système continu complet, $\{C\}$, transformé en lui-même par T. Ce système $\{C\}$, qui sera en général plus ample que $\{\Gamma\}$, contiendra 2^{2q+1} systèmes linéaires partiels composés au moyen de l'involution I_2, l'un d'eux (au moins) étant dépourvu de points-base qui soient des points de coïncidence de l'involution I_2. Ces systèmes partiels appartiendront, par couples, à 2^{2q} systèmes linéaires de $\{C\}$, transformés en eux-mêmes par T.

Nous avons établi, dans notre deuxième note, que tous les systèmes continus complets appartenant à F et possédant les mêmes propriétés que $\{C\}$ se comportaient de la même manière vis-à-vis des points de coïncidence de I_2. Comme ceux-ci correspondent aux points de coïncidence de I'_2 sur Ψ, la question revient à l'étude de la manière dont se comporte le système $\{\Gamma\}$

vis-à-vis des points de coïncidence de cette dernière involution.

Nous n'étudierons pas actuellement cette question dans le cas général; nous étudierons seulement le cas où $q = 2$. La variété de Picard V_2 se confond alors avec la surface Ψ.

Remarquons que la surface Ψ ne peut posséder de faisceau irrationnel de courbes; par conséquent, la surface Ψ est une surface de Picard (ou de Jacobi) en relation avec une courbe de genre deux non dégénérée.

6. Soit donc Ψ une surface de Picard dépourvue de faisceau irrationnel de courbes et soit δ son diviseur. On sait (*) que Ψ est l'image d'une involution cyclique I_δ, d'ordre δ, appartenant à une surface de Jacobi Ψ_0. Cette involution I_δ est privée de points de coïncidence et engendrée par une transformation ordinaire, de première espèce, de période δ, de Ψ_0. Soit τ cette transformation. A une transformation de seconde espèce θ de Ψ correspondent, sur Ψ_0, δ transformations (involutives) de seconde espèce,

$$\theta_0, \quad \tau\theta_0, \quad \tau^2\theta_0, \quad \ldots, \quad \tau^{\delta-1}\theta_0.$$

Sur la surface de Jacobi Ψ_0 existe toujours un système continu ∞^2, $\{ K_0 \}$, formé de courbes de genre deux non équivalentes, transformé en lui-même par ces δ transformations de seconde espèce.

Le système $\{ K_0 \}$ contient seize courbes invariantes pour θ_0 et chacune de ces courbes passe par six des seize points invariants pour cette transformation. On a, pour les transformations $\tau\theta_0, \ldots, \tau^{\delta-1}\theta_0$, la même propriété, mais les seize courbes et les seize points invariants diffèrent pour chaque transformation.

Le système continu complet $\{2K_0\}$, de genre 5, degré 8,

(*) Voir Enriques-Severi, *Mémoire sur les Surfaces hyperelliptiques.* (Acta Mathematica, 1903, vol. 32 et 33.)

formé de ∞^2 systèmes linéaires de dimension 3, contient seize systèmes linéaires invariants pour θ_0. L'un de ces systèmes est dépourvu de points-base et composé au moyen de l'involution engendrée par θ_0; les quinze autres possèdent chacun deux faisceaux de courbes invariantes pour θ_0. Chacun de ces faisceaux possède 8 points-base qui sont des points invariants pour θ_0.

Aux courbes K_0 correspondent, sur Ψ, des courbes K, de genre deux, possédant $\delta - 1$ points doubles variables et formant un système continu transformé en lui-même par θ. Les courbes K appartiennent comme courbes totales à un système continu complet $\{K\}$, transformé en lui-même par θ et formé de ∞^2 systèmes linéaires de dimension $\delta - 1$, genre $\delta + 1$ et degré 2δ. Ce système $\{K\}$ contient seize systèmes linéaires transformés en eux-mêmes par θ.

Aux courbes du système $\{2K_0\}$ correspondent sur Ψ des courbes du système $\{2K\}$. Le système complet $\{2K\}$ est formé de ∞^2 systèmes linéaires de degré 8δ, de genre $4\delta + 1$ et de dimension $4\delta - 1$. Il est transformé en lui-même par θ et contient seize systèmes linéaires transformés en eux-mêmes par θ. L'un de ces systèmes contient deux systèmes partiels composés au moyen de l'involution I'_2 engendrée par θ; le premier de ces systèmes partiels, de dimension $2\delta + 1$, est dépourvu de points-base; l'autre, de dimension $2\delta - 3$, possède comme points-base les seize points de coïncidence de I'_2. Les quinze autres systèmes linéaires $|K|$ invariants pour θ contiennent chacun deux systèmes partiels composés au moyen de I'_2, ayant pour points-base huit points de coïncidence de I'_2.

7. Considérons la surface F, d'irrégularité $q = 2$, admettant une involution régulière I_2, d'ordre deux, satisfaisant aux conditions énumérées plus haut.

Nous avons établi, dans notre deuxième note, que tous les systèmes continus complets, invariants pour T et contenant $2^{2q+1} = 32$ systèmes linéaires partiels composés au moyen de I_2, l'un de ces systèmes étant dépourvu de points-base qui soient des coïncidences de I_2, se comportaient de la même manière vis-à-vis des points de coïncidence de cette involution. Actuellement, aux courbes du système $\{2K\}$ de Ψ vont correspondre sur F des courbes C appartenant comme courbes totales à un système complet $\{C\}$ satisfaisant aux conditions énumérées ci-dessus. Il en résulte que les points de coïncidence de l'involution I_2 se partagent en seize groupes, en général formés d'un même nombre de points, et que tout système continu complet, transformé en lui-même par T, contenant un système linéaire partiel composé au moyen de I_2 et dépourvu de points-base qui soient des points de coïncidence de I_2, contient encore trente et un systèmes linéaires partiels composés au moyen de I_2; l'un de ces systèmes a comme points-base tous les points de coïncidence de I_2; les autres ont, comme points-base, les points de huit groupes.

La surface Φ, image de l'involution I_2, est une surface de Kümmer (généralisée) multiple.

Si l'on se reporte à notre seconde note (n° 2), on voit que le diviseur de la surface Φ est nécessairement impair.

En général, nous aurons (notation de la seconde note)

$$\alpha = 4\nu, \qquad \alpha_{ik} = 2\nu.$$

8. Nous terminerons cette note en établissant quelques inégalités entre les genres de la surface Φ et les nombres α, q.

Retournons au cas général, où F a l'irrégularité q. Nous avons (*)

$$p_a = 2\pi_a - \alpha + 1, \tag{1}$$

$$p^{(1)} - 1 = 2(\pi^{(1)} - 1), \tag{2}$$

π_a, $\pi^{(1)}$ étant les genres arithmétique et linéaire de Θ, p_a, $p^{(1)}$ ceux

(*) L. Godeaux, *Mémoire sur les Surfaces doubles*... (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1914.)

de F. De plus, les genres géométriques p_g, π_g de F et de Φ sont, d'après nos hypothèses,

$$p_g = p_a + q, \qquad \pi_g = \pi_a.$$

Nous devons avoir

$$p_g < 2(p_a + 2), \tag{3}$$

sans quoi la surface F posséderait un faisceau irrationnel de courbes (*). On en conclut

$$p_a + 4 > q. \tag{4}$$

Ensuite, d'après M. Rosenblatt (**), si la condition (3) est remplie, on a

$$p^{(1)} - 1 \leq 16 p_a + 26,$$

c'est-à-dire, moyennant les formules (1) et (2),

$$\pi^{(1)} \leq 16\pi_a - 8\alpha + 22. \tag{5}$$

La formule (1) peut s'écrire

$$p_g - \pi_g = \pi_g - \alpha + q + 1.$$

Le premier membre étant positif ou nul, on a

$$\pi_g \geq \alpha - q - 1. \tag{6}$$

On obtient ainsi pour la surface F l'inégalité (4) et pour la surface Φ les inégalités (5) et (6).

Bruxelles, le 24 mars 1925.

(*) Cette inégalité a fait l'objet de différents travaux de MM. Castelnuovo et Rosenblatt. Un résultat définitif a été obtenu par M. Comessatti, *Intorno alle superficie algebriche irregolari con* $p_g \geq 2(p_a + 2)$, ... (Rend. di Palermo, 1922.)

(**) Rosenblatt, *Sur quelques inégalités dans la théorie des surfaces algébriques.* (C. R., juin 1912.)

Marcel Hayez, imprimeur, rue de Louvain, 112, Bruxelles.