ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

Extrait des *Bulletins de la Classe des Sciences*. Séance du 11 octobre 1924, pp. 418-428.

GÉOMÉTRIE. — **Sur les surfaces du quatrième ordre possédant quatre points doubles uniplanaires ordinaires,**

par L. GODEAUX, professeur à l'École militaire (*).

Dans les nombreuses études consacrées aux surfaces du quatrième ordre possédant des points doubles en nombre fini, les points doubles considérés sont des points coniques (**). Nos études sur les involutions nous ont conduit à considérer le cas des points doubles biplanaires ordinaires et des points doubles biplanaires auxquels sont infiniment voisins des points doubles coniques (***). Dans cette note, nous nous proposons d'étudier la surface du quatrième ordre possédant quatre points doubles uniplanaires ordinaires. Nous commencerons par former l'équation d'une telle surface, ce qui nous permettra d'en déduire les propriétés essentielles.

1. — Soit F une surface du quatrième ordre possédant quatre points doubles uniplanaires ordinaires A_1, A_2, A_3, A_4. Supposons en premier lieu que ces points forment un tétraèdre proprement dit. Nous prendrons ce tétraèdre comme figure de référence. Les coordonnées homogènes seront x_1, x_2, x_3, x_4 et le point A_i aura toutes ses coordonnées nulles, sauf x_i.

La surface F passant doublement par les sommets du tétraèdre de référence, son équation ne peut contenir de termes en x_i^4, x_i^3.

(*) Impression décidée en séance du 5 juillet 1924.

(**) Pour un exposé de ces recherches, voir JESSOP, *Quartic surfaces with singular points*. Cambridge, 1916.

(***) *Sur les surfaces du quatrième ordre possédant six points doubles biplanaires ordinaires*. BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELG., 1922; *Sur les involutions cycliques d'ordre quatre appartenant à une surface de genres un* (seconde communication). BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELG., 1923.

Le cône tangent au point A_i sera représenté par le coefficient de x_i^2 dans l'équation de F. Actuellement, ce coefficient doit être un carré parfait. Si l'on exprime ces conditions, on trouve aisément que l'équation de F peut se mettre sous la forme

$$\varphi^2 + \lambda x_1 x_2 x_3 x_4 = 0, \tag{F}$$

où l'on a posé

$$\varphi \equiv a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{14}x_1x_4 + a_{23}x_2x_3 + a_{24}x_2x_4 + a_{34}x_3x_4.$$

Nous désignerons par Q la quadrique d'équation

$$\varphi = 0.$$

2. — Le cône tangent à la surface F au point A_1 a pour équation

$$(a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4)^2 = 0.$$

C'est donc, compté deux fois, le plan tangent à la quadrique Q au point A_1.

On sait que la surface F possède trois points doubles infiniment voisins de A_1 dans le plan considéré. La section de F par ce plan est une courbe possédant un point triple en A_1, les tangentes à cette courbe en A_1 passant précisément par les trois points doubles en question.

Si dans l'équation de F nous introduisons l'hypothèse

$$a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = 0, \tag{1}$$

cette équation se réduit à

$$(a_{23}x_2x_3 + a_{24}x_2x_4 + a_{34}x_3x_4)^2 + \lambda x_1x_2x_3x_4 = 0. \tag{2}$$

Si nous posons, dans (1) et (2), $x_2 = 0$, nous obtenons

$$a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = 0, \qquad a_{34}^2x_3^2x_4^2 = 0.$$

On voit donc que la droite

$$x_2 = 0, \qquad a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = 0$$

rencontre la courbe représentée par (1) et (2) en quatre points cofondus en A_1. On en conclut que les points doubles infiniment voisins de A_1 sont situés sur les faces du tétraèdre et dans le plan tangent à la quadrique Q en A_1.

3. — La surface F est rencontrée par le plan $x_1 = 0$ suivant la conique

$$\varphi = 0, \qquad x_1 = 0,$$

comptée deux fois. En d'autres termes, ce plan touche la surface suivant une conique.

D'après ce qui a été trouvé plus haut, cette conique passe par les points doubles infiniment voisins de A_2, A_3, A_4, situés dans le plan $x_1 = 0$.

4. — Supposons maintenant que les quatre points A_1, A_2, A_3, A_4 puissent se trouver dans ce même plan α. Comme tout plan passant par A_i coupe la surface F suivant une courbe ayant un point cuspidal en A_i, le plan α doit couper F suivant une courbe du quatrième ordre possédant quatre points cuspidaux A_1, A_2, A_2, A_4 ; cette courbe dégénère donc. Elle ne peut contenir une conique passant par les quatre points considérés ; elle doit donc être formée de droites, et les deux droites passant par un des points A_1, A_2, A_3, A_4 doivent être confondues. Il en résulte que le plan α touche F suivant deux droites, chacune de celles-ci contenant au moins deux des points A_1, A_2, A_3, A_4.

Soit d une de ces droites; supposons qu'elle coupe les points A_1, A_2. Les plans passant par d contiennent la surface F suivant les courbes formées de d et de cubiques planes tangentes à d en A_1, A_2 (puisque A_1, A_2 doivent être des points cuspidaux pour ces sections planes). Il en résulte que ces cubiques contiennent la droite d; celle-ci est donc double pour la surface F.

5. — En résumé,

Si une surface F, *d'ordre quatre, possède quatre points doubles uniplanaires ordinaires, sans autre singularité, ces quatre points forment un tétraèdre proprement dit. Les faces de ce tétraèdre touchent la surface* F *suivant des coniques. Sur chacune de ces coniques, il y a un point double de la surface infiniment voisin de chacun des sommets du tétraèdre.*

La surface F *fait partie d'un faisceau défini par une quadrique* Q, *comptée deux fois, passant par les sommets du tétraèdre, et par l'ensemble des faces du tétraèdre. Le cône tangent à* F *en un des sommets du tétraèdre est formé par le plan tangent à la quadrique* Q, *compté deux fois.*

6. — Nous allons considérer les biquadratiques gauches elliptiques passant par les points A_1, A_2, A_3, A_4.

Désignons par γ_i la conique suivant laquelle le plan $x_i = 0$ touche la surface F et considérons la biquadratique

$$\mu_1\varphi + \mu_2\sqrt{\lambda}x_1x_2 = 0, \qquad \mu_2\varphi - \mu_1\sqrt{\lambda}x_3x_4 = 0. \tag{1}$$

Lorsque μ_1, μ_2 varient, cette courbe engendre une surface dont l'équation est

$$\varphi^2 + \lambda x_1x_2x_3x_4 = 0,$$

c'est-à-dire précisément la surface F.

Désignons par γ_{12} la biquadratique (1). La surface F contient donc un faisceau de biquadratiques $|\gamma_{12}|$. Observons qu'une de ces biquadratiques, correspondant à $\mu_1 = 0$, est formée des coniques γ_1, γ_2. Une autre, correspondant à $\mu_2 = 0$, est formée des coniques γ_3, γ_4. Nous pouvons donc écrire la relation fonctionnelle

$$|\gamma_{12}| = |\gamma_1 + \gamma_2| = |\gamma_3 + \gamma_4|.$$

On trouvera de même deux autres faisceaux de biquadratiques :

$$|\gamma_{13}| = |\gamma_1 + \gamma_3| = |\gamma_2 + \gamma_4|,$$
$$|\gamma_{14}| = |\gamma_1 + \gamma_4| = |\gamma_2 + \gamma_3|.$$

Considérons les deux courbes du faisceau $|\gamma_{12}|$ représentées par (1) et par

$$\mu_1'\varphi + \mu_2'\sqrt{\lambda}x_1x_2 = 0, \qquad \mu_2'\varphi - \mu_1'\sqrt{\lambda}x_3x_4 = 0.$$

Ces deux courbes appartiennent à la quadrique

$$(\mu_1\mu_2' + \mu_2\mu_1')\,\varphi + \mu_2\mu_2'\sqrt{\lambda}x_1x_2 - \mu_1\mu_1'\sqrt{\lambda}x_3x_4 = 0.$$

Par suite, les quadriques passant par une courbe γ_{12} découpent, sur F, le faisceau $|\gamma_{12}|$. Il en résulte qu'il existe une quadrique inscrite à la surface F le long de chacune des courbes du faisceau $|\gamma_{12}|$. L'équation de la quadrique inscrite à la surface F le long de la courbe (1) est

$$2\mu_1\mu_2\varphi + \mu_2^2\sqrt{\lambda}x_1x_2 - \mu_1^2\sqrt{\lambda}x_3x_4 = 0.$$

Il existe, sur la surface F, *trois faisceaux de biquadratiques gauches elliptiques passant par les points doubles uniplanaires de la surface. Chacun de ces faisceaux comprend deux courbes formées de deux coniques suivant lesquelles la surface touche les plans du tétraèdre formé par ces points doubles. Il existe une quadrique inscrite à la surface* F *le long de chacune de ces biquadratiques.*

7. — Pour rechercher les coniques appartenant à la surface F, considérons la projection sur le plan $x_1 = 0$ du contour apparent de la surface vue du point A_1. On trouve facilement que l'équation de cette projection est

$$x_2x_3x_4\left[\lambda x_2x_3x_4 + 4(a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4)(a_{23}x_2x_3 + a_{24}x_2x_4 + a_{34}x_3x_4)\right] = 0.$$

Elle se décompose donc en trois droites A_2A_3, A_3A_4, A_4A_2 et en une cubique plane C_3

$$\lambda x_2x_3x_4 + 4(a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4)(a_{23}x_2x_3 + a_{24}x_2x_4 + a_{34}x_3x_4) = 0.$$

En général, cette cubique ne possède pas de points doubles.

Supposons maintenant que la surface F possède une conique γ' passant par A_1 et distincte des coniques γ_2, γ_3, γ_4. Soit α le plan de cette conique. Si le plan α ne touche pas la surface F le long de γ', l'intersection de α et du plan $x_1 = 0$ doit présenter l'une des positions suivantes :

a) Elle est tangente en trois points à la projection du contour apparent, c'est-à-dire nécessairement à la cubique C, si le plan α ne passe par aucun des points A_2, A_3, A_4;

b) Elle passe par un des points A_2, A_3, A_4 et est bitangente à la cubique C dans le cas opposé.

Aucune de ces particularités ne peut se présenter sans que la droite considérée ne fasse partie de la cubique C.

Si le plan α touche F le long de γ', l'intersection de α avec le plan $x_1 = 0$ fait partie de la courbe projection du contour apparent, c'est-à-dire, nécessairement de la courbe C et réciproquement. Soient, dans ces conditions,

$$\alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = 0$$

l'équation de cette droite,

$$\alpha_{23} x_2 x_3 + \alpha_{24} x_2 x_4 + \alpha_{34} x_3 x_4 = 0$$

l'équation de la conique qui complète la courbe C. Par identification des deux équations de la courbe, on trouve aisément

$$\frac{\alpha_{23}}{a_{23}} = \frac{\alpha_{24}}{a_{24}} = \frac{\alpha_{34}}{a_{34}}, \qquad \frac{\alpha_2}{a_{12}} = \frac{\alpha_3}{a_{13}} = \frac{\alpha_4}{a_{14}}, \qquad \lambda = 0.$$

Mais alors la surface F se réduit à la quadrique Q comptée deux fois; donc

La surface F *étant supposée irréductible, il n'existe que les quatre coniques* γ_1, γ_2, γ_3, γ_4 *passant par les points doubles* A_1, A_2, A_3, A_4.

8. — Nous avons trouvé plus haut trois faisceaux de biquadratiques elliptiques passant par A_1, A_2, A_3, A_4; supposons qu'il puisse exister une biquadratique elliptique γ passant par ces points et n'appartenant pas à ces faisceaux.

La courbe γ rencontre le plan $x_1 = 0$ en quatre points dont trois sont A_2, A_3, A_4, le quatrième étant sur la conique γ_1. Par un cinquième point de cette conique passe une quadrique contenant γ et γ_1. Cette quadrique rencontre encore F suivant une conique γ' passant par A_1, puisque ce point est double pour F. D'après ce qui vient d'être établi, γ' ne peut être qu'une des coniques γ_2, γ_3 ou γ_4. Mais alors γ est une des courbes γ_{12}, γ_{13} ou γ_{14}, contre l'hypothèse faite. Donc

Il n'existe pas d'autres biquadratiques elliptiques passant par A_1, A_2, A_3, A_4, *tracées sur* F, *que celles des faisceaux* $|\gamma_{12}|$, $|\gamma_{13}|$, $|\gamma_{14}|$.

9. — Les formules

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = y_2y_3y_4 : y_3y_4y_1 : y_4y_1y_2 : y_1y_2y_3 \qquad (\theta)$$

définissent une transformation birationnelle involutive θ, obtenue en rapportant projectivement aux plans de l'espace les surfaces cubiques passant par les arêtes du tétraèdre $A_1 A_2 A_3 A_4$.

La transformation θ fait correspondre à la surface F la surface F′ d'équation

$$(a_{12}y_3y_4 + a_{13}y_2y_4 + a_{14}y_2y_3 + a_{23}y_1y_4 + a_{24}y_1y_3 + a_{34}y_1y_2)^2 + \lambda y_1y_2y_3y_4 = 0$$

c'est-à-dire une surface de même nature. Écrivons cette équation sous la forme

$$[\psi(x_1, x_2, x_3, x_4)]^2 + \lambda x_1x_2x_3x_4 = 0,$$

en revenant aux coordonnées courantes.

La courbe d'ordre 16, commune aux surfaces F, F′, est située sur la surface

$$\varphi^2 - \psi^2 = 0.$$

Elle est donc formée de deux courbes du huitième ordre, situées respectivement sur les quadriques

$$\varphi + \psi = 0, \qquad \varphi - \psi = 0.$$

Ces courbes passent doublement par chacun des points A_1, A_2, A_3, A_4 et touchent en un même point, simple pour F et F′, chacune des faces du tétraèdre formé par ces quatre points.

La forme des équations de F, F′ montre que si une surface F est transformée en elle-même par la transformation θ, on a

$$a_{12} = a_{34}, \qquad a_{13} = a_{24}, \qquad a_{14} = a_{23}.$$

Son équation s'écrit donc

$$[a_{12}(x_1x_2 + x_3x_4) + a_{13}(x_1x_3 + x_2x_4) + a_{14}(x_1x_4 + x_2x_3)]^2 + \lambda x_1x_2x_3x_4 = 0.$$

Nous allons rencontrer ces surfaces dans un instant.

10. — Cherchons si une surface F peut posséder un point double (z_1, z_2, z_3, z_4) en dehors des quatre points A_1, A_2, A_3,

A_4. En représentant par $\varphi(z)$ ce que devient φ lorsqu'on remplace les x par les z, on doit avoir

$$\left.\begin{aligned}
2\varphi(z)(a_{12}z_2 + a_{13}z_3 + a_{14}z_4) + \lambda z_2z_3z_4 = 0,\\
2\varphi(z)(a_{12}z_1 + a_{23}z_3 + a_{24}z_4) + \lambda z_1z_3z_4 = 0,\\
2\varphi(z)(a_{13}z_1 + a_{23}z_2 + a_{34}z_4) + \lambda z_1z_2z_4 = 0,\\
2\varphi(z)(a_{14}z_1 + a_{24}z_2 + a_{34}z_3) + \lambda z_1z_2z_3 = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Supposons tout d'abord que l'on puisse avoir $z_1 = 0$. Alors le point double appartient à la conique γ_1 et, par suite, à la quadrique Q. On a donc $\varphi(z) = 0$ et, puisque λ ne peut être nul, $z_2z_3z_4 = 0$. Soit, par exemple, $z_2 = 0$. En faisant dans l'équation de F, $z_1 = z_2 = 0$, on trouve $a_{34} = 0$. Mais alors, la surface F passe doublement par la droite $x_1 = x_2 = 0$. Nous laisserons ce cas de côté, pour nous borner aux surfaces F non rationnelles (et précisément de genres un).

Dans ce qui suit, nous supposerons les quatre quantités z_1, z_2, z_3, z_4 non nulles.

Multiplions les équations (1) respectivement par z_1, z_2, z_3, z_4 et soustrayons les trois dernières de la première successivement. Il vient, comme $\varphi(z)$ et λ ne peuvent être nuls,

$$\left.\begin{aligned}
a_{13}z_1z_3 + a_{14}z_1z_4 = a_{23}z_2z_3 + a_{24}z_2z_4,\\
a_{12}z_1z_2 + a_{14}z_1z_4 = a_{23}z_2z_3 + a_{34}z_3z_4,\\
a_{12}z_1z_2 + a_{13}z_1z_3 = a_{24}z_2z_4 + a_{34}z_3z_4.
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Additionnant les deux premières de ces équations et tenant compte de la troisième, on trouve $a_{14} = a_{23}$. On obtient de même $a_{12} = a_{34}$, $a_{13} = a_{24}$, et, par suite, si F possède un point double, elle est invariante pour la transformation θ.

Portons ces conditions dans les équations (2) ; on a

$$\begin{aligned}
a_{13}(z_1z_3 - z_2z_4) + a_{14}(z_1z_4 - z_2z_3) = 0,\\
a_{12}(z_1z_2 - z_3z_4) + a_{14}(z_1z_4 - z_2z_3) = 0,\\
a_{12}(z_1z_2 - z_3z_4) + a_{13}(z_1z_3 - z_2z_4) = 0.
\end{aligned}$$

En soustrayant les deux premières équations membre à membre, on obtient

$$a_{13}(z_1z_3 - z_2z_4) - a_{12}(z_1z_2 - z_3z_4) = 0.$$

Aucun des coefficients a_{12}, a_{13}, a_{14} ne pouvant être nul sans que la surface F acquiert une droite double, on a

$$z_1 z_3 = z_2 z_4, \qquad z_1 z_2 = z_3 z_4,$$

et, de même,

$$z_1 z_4 = z_2 z_3.$$

On en déduit

$$z_1^2 = z_2^2 = z_3^2 = z_4^2.$$

Le point double peut donc être l'un des points

$$(1, 1, 1, 1), \quad (1, 1, -1, -1), \quad (1, -1, 1, -1), \quad (1, -1, -1, 1),$$

c'est-à-dire un des quatre points invariants de la transformation θ.

On a d'ailleurs

$$\lambda = -[\varphi(z)]^2.$$

Si la surface F *possède un cinquième point double, sans acquérir de ce fait une droite double, elle est invariante pour la transformation* θ *et le point double est un des points invariants pour cette transformation.*

11. — D'après ce qui précède, si la surface F possède, outre A_1, A_2, A_3, A_4, deux points doubles (ordinaires), ces points doivent être invariants pour θ. La seule condition à remplir sera d'obtenir la même valeur pour λ, c'est-à-dire pour $\varphi(z)$ en deux des points considérés. Il est facile de voir que cela porte la condition que deux des trois quantités a_{12}, a_{13}, a_{14} sont égales en valeur absolue (une de ces quantités ne pouvant être nulle sans que la surface acquière une droite double). Par exemple, en exprimant que la surface F doit posséder les points doubles $(1, 1, 1, 1)$, $(1, 1, -1, -1)$, on trouve

$$a_{12}(a_{13} + a_{14}) = 0;$$

d'où, puisque l'on doit écarter $a_{12} = 0$,

$$a_{13} + a_{14} = 0.$$

Si la surface F doit posséder trois points doubles supplémentaires, sans acquérir de droite double, on trouve que a_{12}, a_{13}, a_{14} doivent être égaux en valeur absolue.

Par exemple, la surface F, ayant les points doubles $(1, 1, -1, -1)$, $(1, -1, 1, -1)$, $(1, -1, -1, 1)$, est donnée par

$$a_{12} = a_{13} = a_1$$

et a pour équation

$$(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4)^2 - 36x_1x_2x_3x_4 = 0.$$

Elle est irréductible, car elle n'admet pas de courbe double.

Il existe des surfaces F *irréductibles, possédant deux ou trois points doubles en dehors des points* A_1, A_2, A_3, A_4, *sans acquérir de courbe double.*

12. — Nous terminerons par la définition d'une transformée birationnelle de la surface F située dans un espace linéaire à cinq dimensions S_5.

Rapportons projectivement les quadriques passant par A_1, A_2, A_3, A_4 aux hyperplans de S_5. A cet effet, posons

$$\frac{X_{12}}{x_1x_2} = \frac{X_{13}}{x_1x_3} = \frac{X_{14}}{x_1x_4} = \frac{X_{23}}{x_2x_3} = \frac{X_{24}}{x_2x_4} = \frac{X_{34}}{x_3x_4}, \tag{1}$$

et prenons les X comme coordonnées homogènes de S_5.

A l'espace à trois dimensions Σ contenant les quadriques correspond dans S_5 une variété V_3^4 d'équations

$$X_{12}X_{34} = X_{13}X_{24} = X_{14}X_{23}. \tag{2}$$

Cette variété est donc d'ordre quatre et la correspondance entre Σ et V_3^4 est donc birationnelle.

A la surface F correspond, sur V_3^4, la surface d'ordre huit découpée par l'hyperquadrique

$$(a_{12}X_{12} + a_{13}X_{13} + a_{14}X_{14} + a_{23}X_{23} + a_{24}X_{24} + a_{34}X_{34})^2 + \lambda X_{12}X_{34} = 0. \tag{3}$$

Observons qu'aux droites

$$\frac{x_2}{\alpha_2} = \frac{x_3}{\alpha_3} = \frac{x_4}{\alpha_4}, \tag{4}$$

passant par A_1, les formules (1) font correspondre les courbes

$$\frac{X_{12}}{\alpha_2} = \frac{X_{13}}{\alpha_3} = \frac{X_{14}}{\alpha_4}. \tag{5}$$

Au point A_1 correspond le plan $X_{23} = X_{25} = X_{34} = 0$. En d'autres termes, aux points de Σ infiniment voisins de A_1 correspondent les points du plan

$$X_{23} = X_{24} = X_{34} = 0, \tag{6}$$

appartenant à V_3^4. La correspondance est précisée par les formules (4), (5).

La surface F^*, transformée de F, et représentée par les équations (2) et (3), est tangente au plan (6) suivant la droite

$$X_{23} = X_{24} = X_{34} = 0, \qquad a_{12}X_{12} + a_{13}X_{13} + a_{14}X_{14} = 0.$$

Les points marqués sur cette droite par les hyperplans $X_{12} = 0$, $X_{13} = 0$, $X_{14} = 0$ sont des points doubles de F^*.

On obtient des résultats analogues pour les points A_2, A_3, A_4, auxquels correspondent respectivement les plans

$$X_{13} = X_{14} = X_{34} = 0,$$
$$X_{12} = X_{14} = X_{34} = 0,$$
$$X_{12} = X_{13} = X_{23} = 0.$$

La transformation entre Σ et V_3^4 qui vient d'être définie peut permettre l'étude des surfaces de Σ possédant quatre points doubles. A toute section de V_3^4 par une hyperquadrique correspond, en effet, dans Σ, une surface passant doublement par A_1, A_2, A_3, A_4. La nature de l'intersection de cette hyperquadrique avec le plan (6), par exemple, fixera la nature du point double A_1.

Bruxelles. — Imprimerie M. HAYEZ, rue de Louvain 112.