ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

Extrait des *Bulletins de la Classe des Sciences*. Séance du 11 octobre 1924, pp. 434-446.

Géométrie. — **Sur les involutions régulières d'ordre deux appartenant à une surface irrégulière.**

(*Première note*),

par L. GODEAUX, professeur à l'École Militaire.

Si l'on considère une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$), image d'une involution d'ordre deux n'ayant qu'un nombre fini de points de coïncidence, appartenant à une surface de genres $p_g = P_4 = 1$, on sait que cette première surface possède huit ou seize points de diramation. Le genre arithmétique de la seconde surface est dans le premier cas $p_a = 1$ (surface de genres un), dans le second cas $p_a = -1$ (surface de Jacobi ou de Picard). On est conduit par cet exemple à se demander si, étant donnée une correspondance rationnelle entre deux surfaces Φ, F, dont la première est régulière, il existe quelque relation entre le nombre de points de diramation sur Φ et l'irrégularité de F (ce nombre de points de diramation étant supposé fini). Ceci nous a amené à étudier les involutions régulières d'ordre deux, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface irrégulière.

Dans cette première note, nous construisons, sur la surface contenant l'involution, un système continu contenant des systèmes linéaires partiels composés au moyen de l'involution. D'une manière plus précise, nous établissons que si une surface algébrique d'irrégularité $q > 0$ est transformée en elle-même par une transformation birationnelle involutive T engendrant une involution régulière n'ayant qu'un nombre fini de points de coïncidence, on peut construire, sur cette surface, un système continu complet formé de ∞^q systèmes linéaires, transformé en lui-même par T. Ce système continu contient 2^{2q} systèmes linéaires transformés en eux-mêmes par T. Le système continu peut être construit de telle sorte que chacun de ces 2^{2q} systèmes linéaires contienne deux systèmes linéaires partiels composés au moyen de l'involution, l'un (au moins) de ces 2^{2q+1} systèmes partiels étant dépourvu de points-base.

A ces 2^{2q+1} systèmes partiels correspondent, sur une surface image de l'involution, des systèmes linéaires liés par certaines relations fonctionnelles dans lesquelles interviennent les courbes rationnelles de degré — 2 équivalentes, au point de vue des transformations birationnelles, aux points de diramation de la surface image.

Si une surface irrégulière possède une transformation birationnelle en elle-même, celle-ci donne naissance à une transformation birationnelle de la variété de Picard attachée à la surface. Dans le cas actuel, on obtient une transformation ordinaire (de seconde espèce) de la variété de Picard. C'est en établissant ce fait que nous pouvons déduire le nombre de systèmes linéaires transformés en eux-mêmes par T, dans le système continu considéré.

Dans une seconde note, nous étudierons la distribution des points de coïncidence de l'involution par rapport aux 2^{2q+1} systèmes linéaires partiels composés au moyen de l'involution.

1. Soit F une surface algébrique d'irrégularité $q > 0$, contenant une involution régulière I_2, d'ordre deux, n'ayant qu'un nombre fini de points de coïncidence. Désignons par T la transformation birationnelle involutive de F en elle-même engendrant I_2; par Φ une surface, régulière, image de cette involution. Nous supposerons que la surface F n'est ni réglée, ni référable, par une transformation birationnelle, à une surface réglée.

Nous pouvons construire, sur F, un système linéaire complet $|C_0|$, irréductible, dépourvu de points-base, transformé en lui-même par T, contenant un système linéaire $|C_{01}|$, également irréductible et dépourvu de points-base, composé au moyen de l'involution I_2 (*). Les courbes C_{01} sont des courbes totales du système $|C_0|$ et les systèmes $|C_0|$, $|C_{01}|$ peuvent coïncider. Enfin, on peut supposer la dimension de $|C_{01}|$ au moins égale à trois.

Aux courbes C_{01} correspondent, sur Φ, des courbes Γ formant un système linéaire simple, dépourvu de points-base et irréductible, de même dimension que $|C_{01}|$. Nous prendrons, comme modèle projectif de Φ, une surface dont les sections hyperplanes sont les courbes Γ. Les points de diramation sur cette surface Φ sont alors des points doubles coniques et sont en nombre multiple de 4 (**). Soit 4α ce nombre.

Si nous désignons par n le degré et π le genre du système $|\Gamma|$ des sections hyperplanes de Φ, le système $|C_{01}|$ et, par suite, le système $|C_0|$ auront le degré $2n$ et le genre $2\pi - 1$.

Nous allons montrer que l'on peut choisir le système $|C_0|$ de manière à ce que :

a) Le système $|C_0|$ soit plus ample que $|C_{01}|$;

b) Les courbes C_0 appartiennent comme courbes totales à un système continu complet $\{C\}$, formé de ∞^q systèmes linéaires.

Si le système $|C_0|$ ne satisfait pas à ces conditions, considérons le système $|\lambda C_0|$, où λ est un entier positif. Le système $|\lambda C_0|$ a le genre $2\lambda(\pi - 1) + \lambda(\lambda - 1)n + 1$ et le degré $2\lambda^2 n$. Si p_a est le genre arithmétique de la surface F, nous pouvons prendre λ assez grand pour avoir

$$p_a + 2\lambda^2 n - 2\lambda(\pi - 1) - \lambda(\lambda - 1)n = p_a + \lambda(\lambda + 1)n - 2\lambda(\pi - 1 \geq 0,$$

(*) L. Godeaux, *Recherches sur les involutions douées d'un nombre fini de points de coïncidence, appartenant à une surface algébrique.* (Bull. de la Soc. Math. de France, 1919.)

(**) L. Godeaux, *Mémoire sur les Surfaces algébriques doubles ayant un nombre fini de points de diramation.* (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1914.)

et pour que le système $|\lambda C_0|$ ne soit pas spécial. Dans ces conditions, d'après le théorème de Riemann-Roch (*), la dimension de $|\lambda C_0|$ est au moins égale à

$$p_a + \lambda(\lambda + 1)n - 2\lambda(\pi - 1)$$

et le système complet continu $\{\lambda C\}$, auquel les courbes λC_0 appartiennent comme courbes totales, est formé de ∞^q systèmes linéaires.

Le système $|\lambda C_0|$ est d'ailleurs irréductible, simple, privé de points-base, et transformé en lui-même par T. Il contient un système linéaire $|\lambda C_{01}|$ composé au moyen de l'involution I_2. Ce système $|\lambda C_{01}|$ est le transformé du système $|\lambda\Gamma|$ de Φ.

Le degré et le genre du système $|\lambda\Gamma|$ sont respectivement $\lambda^2 n$ et $\lambda\pi + \frac{1}{2}\lambda(\lambda - 1)n - (\lambda - 1)$. Si π_a est le genre arithmétique de Φ, en prenant λ suffisamment grand pour que $|\lambda\Gamma|$ soit non spécial et en désignant par s la surabondance de $|\lambda\Gamma|$, la dimension de ce système est

$$\pi_a + \frac{1}{2}\lambda(\lambda + 1)n - \lambda(\pi - 1) + s.$$

Mais pour λ suffisamment élevé, la surabondance s prend une valeur constante (indépendante de λ) (**). S'il était possible que, quel que soit λ, les systèmes $|\lambda C_0|$ et $|\lambda C_{01}|$ coïncident, on devrait avoir

$$\pi_a + \frac{1}{2}\lambda(\lambda + 1)n - \lambda(\pi - 1) + s \geq p_a + \lambda(\lambda + 1)n - 2\lambda(\pi - 1),$$

c'est-à-dire

$$\pi_a - p_a + s \geq \frac{1}{2}\lambda(\lambda + 1)n - \lambda(\pi - 1).$$

(*) SEVERI, *Sul teorema di Riemann-Roch e sulle serie continue di curve appartenenti ad una superficie algebrica.* (ATTI DELLA R. ACCAD. DI TORINO, 1904-1905)

(**) CASTELNUOVO, *Alcune proprietà fondamentali dei sistemi lineari di curve tracciati sopra una superficie algebrica.* (ANNALI DI MATEMATICA, 1897.)

Le premier membre a une valeur indépendante de λ, le second membre peut devenir aussi grand que l'on veut lorsque λ augmente. Nous parvenons donc à une absurdité. Donc, pour λ suffisamment grand, le système $|\lambda C_0|$ n'est pas composé au moyen de I_2.

En résumé, si $|C_0|$ ne possède pas les propriétés *a*), *b*), on peut lui substituer un de ses multiples convenablement choisi, possédant ces propriétés. Nous pouvons donc supposer, en changeant éventuellement de notation, que le système $|C_0|$ jouisse des propriétés *a*), *b*).

2. Considérons une courbe quelconque C du système complet $\{C\}$ et soit C′ la courbe que T lui fait correspondre sur F.

Lorsque C se déplace d'une manière continue dans $\{C\}$ et vient coïncider avec une courbe de $|C_0|$, la courbe C′ varie d'une manière continue sur F et vient également coïncider avec une courbe de $|C_0|$, puisque ce système est transformé en lui-même par T. Il en résulte que C′ appartient au système continu complet $\{C\}$, ou, en d'autres termes, que le système continu complet $\{C\}$ est transformé en lui-même par T.

Soit maintenant V_q la variété de Picard attachée à la surface F. Il existe, d'après la définition de cette variété, une correspondance biunivoque entre les points de V_q et les systèmes linéaires contenus dans $\{C\}$. Un système linéaire de $\{C\}$ est transformé par T en un système linéaire de $\{C\}$ (qui peut d'ailleurs coïncider avec le premier); il en résulte qu'à la transformation T correspond une transformation birationnelle θ de la variété V_q en elle-même. Nous montrerons plus loin que θ est une transformation ordinaire de seconde espèce de cette variété.

3. Soit, si c'est possible, $|C_1|$ un système linéaire complet de $\{C\}$, distinct de $|C_0|$, transformé en lui-même par T. Cette transformation T opère sur les courbes de $|C_1|$ comme une homographie involutive. Par suite, ou bien le système complet

$|C_1|$ est composé au moyen de l'involution I_2, ou bien il contient deux systèmes linéaires partiels composés au moyen de I_2. Si le premier cas se présente, il suffira de remplacer $\{C\}$ par un de ses multiples convenablement choisi pour l'éliminer. (On le démontre en répétant le raisonnement fait plus haut pour $|C_0|$.) Nous supposerons donc que $|C_1|$ contient deux systèmes linéaires partiels $|C_{11}|$, $|C_{12}|$, composés au moyen de I_2.

Rapportons projectivement les courbes de $|C_1|$ aux hyperplans d'un espace de même dimension que ce système. La surface F se transforme en une surface F^*, en correspondance birationnelle avec F. Cette surface F^* est transformée en elle-même par une homographie involutive qui, d'après ce qui précède, possède deux espaces linéaires unis. A tout point de coïncidence de I_2 sur F correspond un point commun à F^* et à l'un de ces espaces unis, et réciproquement. Les hyperplans passant par ces espaces unis découpent, sur F^*, les courbes correspondant à C_{11}, C_{12}. On en conclut que tout point de coïncidence de I_2 est point-base (simple) pour l'un des systèmes $|C_{11}|$, $|C_{12}|$.

Désignons par Γ_{11} les courbes qui correspondent, sur Φ, aux courbes C_{11}, et par x le nombre de points de coïncidence de I_2 situés sur les courbes C_{11}. Par la formule de Zeuthen, le genre des courbes Γ_{11} est égal à $\pi - \frac{1}{4}x$. Par suite, x doit être multiple de 4. Nous poserons $x = 4\alpha_{11}$, et le nombre des points de coïncidence de I_2 qui sont des points-base de $|C_{12}|$ sera alors $4\alpha_{12} = 4(\alpha - \alpha_{11})$, 4α étant le nombre total des points de coïncidence de I_2.

Les courbes Γ_{11} passent par $4\alpha_{11}$ points de diramation de Φ. Rappelons que chaque point de diramation est un point double conique équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à une courbe rationnelle de degré -2 (*). Repré-

(*) L. Godeaux, *Mémoire sur les Surfaces doubles*... (Loc. cit.)

sentons par A_{11} la somme des courbes de cette nature équivalentes aux points de diramation par lesquels passent les courbes F_{11}. Chacune de ces courbes est rencontrée en un point par les courbes Γ_{11}. Nous allons établir une relation fonctionnelle entre les courbes Γ, Γ_{11}, A_{11}.

Considérons une courbe quelconque C de $\{C\}$ et soit C′ la courbe que T lui fait correspondre. A l'ensemble des courbes C, C′ correspond, sur Φ, une courbe Γ^* de genre effectif $2\pi - 1$, présentant n points doubles correspondant aux $2n$ points communs à C et à C′. Lorsque la courbe C varie dans $\{C\}$, la courbe Γ^* varie dans un système continu qui appartient, puisque Φ est une surface régulière, à un système linéaire complet $|\Gamma^*|$, de degré $2n$ et de genre $2\pi + n - 1$.

Lorsque C vient coïncider avec une courbe C_{01}, la courbe Γ^* coïncide avec une section hyperplane Γ de Φ, comptée deux fois. On a donc

$$\Gamma^* \equiv 2\Gamma.$$

Lorsque C vient coïncider avec une courbe C_{11}, la courbe Γ^* coïncide avec une courbe Γ_{11}, comptée deux fois, augmentée des $4\alpha_{11}$ courbes rationnelles infiniment petites composant A_{11}. On a donc

$$\Gamma^* \equiv 2\Gamma_{11} + A_{11}$$

et, par suite,

$$2\Gamma \equiv 2\Gamma_{11} + A_{11}.$$

Si l'on désigne par Γ_{12} les courbes de Φ qui correspondent aux courbes C_{12}; par A_{12} la somme des $4\alpha_{12}$ courbes rationnelles équivalentes aux points de diramation par lesquels passent les courbes Γ_{12}, on a de même

$$2\Gamma \equiv 2\Gamma_{12} + A_{12}.$$

4. Nous allons maintenant montrer que le nombre de systèmes linéaires de $\{C\}$, transformés en eux-mêmes par T, est nécessairement fini. En d'autres termes, la transformation θ

ne laisse invariants qu'un nombre fini de points de la variété de Picard V_q.

Supposons que θ puisse laisser invariants une infinité de points de V_q. Comme cette variété est algébrique, θ laissera nécessairement invariants tous les points d'une variété continue appartenant à V_q. En correspondance, il y aura, sur F, une infinité continue de systèmes linéaires de $\{C\}$ transformés en eux-mêmes par T. Dans chacun de ces systèmes, il y aura deux systèmes linéaires partiels composés au moyen de I_2 et ayant pour points-base des points de coïncidence de cette involution. Comme ces points de coïncidence sont en nombre fini, on pourra toujours trouver une infinité continue de systèmes composés au moyen de I_2 ayant les mêmes points-base. A ces systèmes correspondront, sur Φ, des systèmes linéaires formant une infinité continue. Mais puisque Φ est régulière, toutes les courbes de ce système seront équivalentes ; il en sera de même des courbes qui leur correspondent sur F, contrairement à l'hypothèse faite. Par suite, il n'existe qu'un nombre fini de systèmes linéaires de $\{C\}$, transformés en eux-mêmes par T, ce que nous voulions démontrer.

5. Nous allons maintenant démontrer que la transformation θ de V_q en elle-même est une transformation ordinaire, de seconde espèce, de cette variété.

Si l'équation de V_q, dans un espace linéaire S_{q+1} à $q+1$ dimensions est, en coordonnées homogènes,

$$V(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_q) = 0,$$

on sait que $x_0, x_1, \ldots, x_q$ sont des fonctions abéliennes, $2q$ fois périodiques, de q variables

$$u_1, u_2, \ldots, u_q.$$

A un point de V_q correspond, à des périodes près, un seul système de valeurs de $u_1, u_2, \ldots, u_q$ et, réciproquement, à un système de valeurs de ces variables correspond un seul point de V_q (*).

Les valeurs $(u'_1, u'_2, \ldots, u'_q)$ des variables convenant à un point qu'une transformation de seconde espèce fait correspondre au point $(u_1, u_2, \ldots, u_q)$ sont déterminées, à des périodes près, par les congruences

$$u_1 + u'_1 \equiv a_1,\ u_2 + u'_2 \equiv a_2, \ldots, u_q + u'_q \equiv a_q, \tag{1}$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_q$ sont des constantes. Si l'on désigne par $|C'|$, $|C''|$ et $|C'''|$, $|C^{IV}|$ deux couples de systèmes linéaires de $\{C\}$ correspondant à deux couples de points de V_q se correspondant dans une transformation de seconde espèce, on a (**)

$$|C' + C''| = |C''' + C^{IV}|.$$

Reprenons, sur la surface Φ, le système $|\Gamma^*|$ considéré plus haut. A une courbe Γ^* possédant n points doubles correspond, sur F, une courbe dégénérée en deux courbes $C^{(1)}$, $C^{(2)}$ de $\{C\}$. A une courbe Γ^*, formée d'une section hyperplane Γ comptée deux fois, correspond une courbe C_{01} comptée deux fois. D'autre part, les courbes qui correspondent sur F aux courbes de $|\Gamma^*|$ forment un système linéaire; donc on a

$$|C^{(1)} + C^{(2)}| = |2C_0|.$$

On voit donc que la transformation T agit sur les courbes de $\{C\}$ de la même manière que les transformations de seconde espèce de V_q. Comme les transformations de seconde espèce

(*) E. Picard, *Mémoire sur la Théorie des fonctions algébriques de deux variables.* (Journal de Liouville, 1889.) — P. Painlevé, *Sur les fonctions qui admettent un théorème d'addition.* (Acta Mathematica, 1902, t. XXVII.) — P. Painlevé, *Leçons sur la Théorie analytique des équations différentielles.* (Paris, Hermann, 1897.)

Au sujet de l'introduction de la variété de Picard attachée à une surface algébrique, voir Castelnuovo, *Sugli integrali semplici appartenenti ad una superficie irregolare.* (Rend. R. Accad. Lincei, 1° sem. 1905.)

(**) Castelnuovo, *Sugli integrali...* (Loc. cit.)

de V_q sont en nombre ∞^q, on en conclut que θ est nécessairement une transformation de seconde espèce de V_q.

Le nombre de points de V_q, invariants pour une transformation de seconde espèce (1), est donné par le nombre de solutions des congruences

$$u_1 \equiv \frac{1}{2} a_1, \; u_2 \equiv \frac{1}{2} a_2, \ldots, \; u_q = \frac{1}{2} a_q.$$

Il est donc égal, comme on le sait d'ailleurs, à 2^{2q}.

On voit donc qu'il existe, dans $\{C\}$, 2^{2q} systèmes linéaires transformés en eux-mêmes par T.

6. On peut établir que θ est une transformation de seconde espèce de V_q par une autre voie, s'appuyant sur les travaux de M. Scorza.

Soit

$$\omega \equiv \left| \begin{array}{cccc} \omega_{1,1} & \omega_{1,2} & \ldots & \omega_{1,2q} \\ \omega_{2,1} & \omega_{2,2} & \ldots & \omega_{2,2q} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_{q,1} & \omega_{q,2} & \ldots & \omega_{q,2q} \end{array} \right|$$

un tableau de périodes primitives des fonctions abéliennes $x_0, x_1, \ldots, x_q$ de $u_1, u_2, \ldots, u_q$.

M. Scorza a démontré (*) qu'à toute transformation birationnelle de V_q en elle-même correspond une substitution riemannienne

$$\left.\begin{array}{l} \xi_1' = a_{1,1}\xi_1 + a_{1,2}\xi_2 + \cdots + a_{1,2q}\xi_{2q}, \\ \xi_2' = a_{2,1}\xi_1 + a_{2,2}\xi_2 + \cdots + a_{2,2q}\xi_{2q}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \xi_{2q}' = a_{2q,1}\xi_1 + a_{2q,2}\xi_2 + \cdots + a_{2q,2q}\xi_{2q}, \end{array}\right\} \quad (1)$$

de la matrice ω. Les a sont des entiers dont le déterminant est

(*) G. Scorza, *Intorno alla teoria generale delle matrici di Riemann e ad alcune sue applicazioni.* (Rend. Circolo Matem. di Palermo, 1916.) Voir la seconde partie.

égal à $+1$. De plus, le nombre des points invariants, s'il est fini, est donné par le déterminant (*)

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{1,1}-1 & a_{1,2} & \dots & a_{1,2q} \\ a_{2,1} & a_{2,2}-1 & \dots & a_{2,2q} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a^{2q,1} & a_{2q,2} & \dots & a_{2q,2q}-1 \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Si nous appliquons ces résultats à la transformation θ, nous devons de plus exprimer que la substitution (1) est involutive. Cela nous donne les conditions

$$\sum_{k=1}^{2q} a_{ik} a_{kl} = 0, \quad \sum_{k=1}^{2q} a_{ik} a_{ki} = 1, \tag{3}$$
$$(i, l = 1,2, \dots, 2q).$$

Supposons tout d'abord $a_{1,1}$ nul. L'un des nombres $a_{1,2}$, $a_{1,3}$, ..., $a_{1,2q}$ au moins, par exemple $a_{1,2}$, n'est pas nul. Multiplions les 2^e^, 3^e^, ... lignes du déterminant (2) respectivement par $a_{1,2}$, $a_{1,3}$, ..., $a_{1,2q}$ et additionnons-les à la seconde. Nous obtenons une relation, en vertu des égalités (3),

$$\delta = \frac{1}{a_{1,2}} \begin{vmatrix} -1 & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,2q} \\ 1 & -a_{1,1} & -a_{1,3} & \dots & -a_{1,2q} \\ a_{3,1} & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{2q,1} & \cdot & \cdot & \dots & a_{2q,2q}-1 \end{vmatrix}.$$

On en conclut $\delta = 0$, ce qui est impossible, car il n'y a qu'un nombre fini de points de V_q invariants pour θ (**). Par suite, $a_{1,1}$ et, d'une manière générale, $a_{i,i}$ ne sont pas nuls.

(*) G. Scorza, *Alcune questioni di geometria sopra una varietà abeliana qualunque.* (Atti Accad. Gioenia di Catania, 5^e^ série, vol. XI.)

(**) Lorsque la transformation envisagée admet une infinité de points invariants, on a $\delta = 0$. (G. Scorza, *Alcune questioni...* Loc. cit.)

Si l'on multiplie les $2q$ lignes du déterminant (2) par $a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{1\,2q}$ et que l'on ajoute les $2q - 1$ dernières lignes à la première, on trouve, en vertu des relations (3), un déterminant dont la première ligne est

$$1 - a_{1,1} \quad - a_{1,2} \quad \ldots \quad - a_{1,2q},$$

les autres lignes étant les mêmes que dans (2). On en conclut la relation

$$\delta(1 + a_{1,1}) = 0;$$

d'où, puisque δ n'est pas nul, $a_{1,1} = -1$. Si l'on suppose de plus $a_{1,2}$, par exemple, différent de zéro, on trouve aisément, en répétant le raisonnement fait plus haut, que cette hypothèse entraîne $\delta = 0$. Par suite, on a

$$a_{1,1} = -1, \quad a_{1,2} = a_{1,3} = \cdots = a_{1,2q} = 0.$$

On peut répéter ces raisonnements pour les autres coefficients de la substitution (1), et l'on arrive à cette conclusion que cette substitution a la forme

$$\xi'_1 = -\xi_1, \ \xi'_2 = -\xi_2, \ldots, \xi'_{2q} = \xi_{2q}.$$

On en conclut

$$\delta = 2^{2q}.$$

La substitution riemannienne (4) correspond aux transformations de seconde espèce de V_q (*).

Ainsi se trouve démontrée notre assertion.

7. Nous venons d'établir que dans le système $\{C\}$, il existe 2^{2q} systèmes linéaires transformés en eux-mêmes par T. L'un de ces systèmes est $|C_0|$. Nous désignerons les autres par $|C_1|, |C_2|, \ldots, |C_k|$, en posant $k = 2^{2q} - 1$. De plus, si T fait

(*) G. Scorza, *Intorno alla teoria...* (Loc. cit.)

correspondre au système $|C^{(1)}|$ de $\{C\}$, le système $|C^{(2)}|$, on a

$$|C^{(1)} + C^{(2)}| = |2C_0|,$$

et, par suite,

$$2C_0 \equiv 2C_1 \equiv 2C_2 \equiv \ldots \equiv 2C_k.$$

On peut choisir le système $\{C\}$ de manière que, dans chacun des systèmes $|C_1|, \ldots, |C_k|$, il y ait deux systèmes linéaires partiels composés au moyen de l'involution I_2. Si nous désignons par $|C_{i1}|$, $|C_{i2}|$ les systèmes partiels composés appartenant à $|C_i|$, parmi les points de coïncidence de I_2, il y en aura $4\alpha_{i1}$ qui seront des points-base simples de $|C_{i1}|$ et $4\alpha_{i2} = 4(\alpha - \alpha_{i1})$ qui seront des points-base simples de $|C_{i2}|$.

Dans le système $|C_0|$, il y a également deux systèmes linéaires partiels composés au moyen de I_2 : l'un, $|C_{01}|$, est dépourvu de points-base ; l'autre, que nous désignerons par $|C_{02}|$, a comme points-base simples les 4α points de coïncidence de I_2 (*).

Bruxelles, 10 juillet 1924.

(*) L. GODEAUX, *Mémoire sur les Surfaces doubles...* (LOC. CIT.)

Marcel HAYEZ, imprimeur, rue de Louvain, 112, Bruxelles.