SUR

LES INVOLUTIONS D'ORDRE HUIT

APPARTENANT

A UNE SURFACE DE GENRES UN

Dans nos travaux antérieurs (*), nous avons démontré qu'il pouvait exister trois types d'involutions d'ordre huit et de genres un ($p_a = P_4 = 1$), appartenant à une surface F de genres un ($p_a = P_4 = 1$) :

I. Involution engendrée par deux transformations birationnelles T_1, T_2, de période quatre, de la surface F en elle-même, telles que

$$T_1^2 = T_2^2 = (T_1T_2)^2.$$

Cette involution possède quatre points de coïncidence octuple et un groupe formé de quatre points de coïncidence double.

II. Involution engendrée de la même manière que celle du type I et possédant deux points de coïncidence octuple et trois groupes formés de deux points de coïncidence quadruple.

(*) *Mémoire sur les involutions appartenant à une surface de genres un* : Première partie (ANNALES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, 1914, pp. 357-430); Deuxième partie (IDEM, 1919, pp. 51-70). Dans la suite, nous désignerons ces mémoires respectivement par M-1 et M-2.

III. Involution engendrée par trois transformations birationnelles involutives, deux à deux permutables, de la surface F en elle-même. Cette involution possède quatorze groupes formés de quatre points de coïncidence double.

Dans chaque cas nous avons construit une surface normale de genres un, image de l'involution. Nous avons ainsi obtenu les trois types de surfaces suivants :

I. Surface d'ordre $2\pi - 2$, à sections hyperplanes de genre π, située dans un espace linéaire à π dimensions, possédant quatre points doubles uniplanaires ordinaires et un point double conique.

II. Surface d'ordre $2\pi - 2$, à sections hyperplanes de genre π, située dans un espace linéaire à π dimensions, possédant deux points doubles uniplanaires ordinaires et trois points doubles biplanaires singuliers (à chacun desquels est infiniment voisin un point double conique).

III. Surface d'ordre $2\pi - 2$, à sections hyperplanes de genre π, située dans un espace linéaire à π dimensions, possédant quatorze points doubles coniques.

De plus, nous avons établi que, sur une surface du type III, il existe sept systèmes linéaires de courbes d'ordre $2\pi - 2$, de de degré $2\pi - 6$, de genre et de dimension $\pi - 2$; le long d'une courbe de l'un de ces systèmes, il y a une hyperquadrique circonscrite à la surface (c'est-à-dire tangente à la surface en chaque point d'intersection). Les courbes de chacun de ces systèmes passent simplement par huit des quatorze points doubles coniques de la surface.

Dans ce travail, nous nous proposons de compléter nos recherches sur les surfaces des types I et II. Nous établirons l'existence, sur chacune de ces surfaces, de sept systèmes linéaires de courbes et la façon dont se comportent les courbes de chaque système aux points singuliers. Trois de ces systèmes sont de genre $\pi - 2$, un de genre $4\pi - 8$ et les trois autres de genre $4\pi - 6$. Les quatre derniers systèmes peuvent, d'ailleurs, se déduire des trois premiers et du système des sections hyperplanes de la surface.

Nous établirons également les relations fonctionnelles existant entre ces différentes courbes.

1. Soit F une surface de genres un possédant une involution I_8 d'ordre huit et de genres un, engendrée par deux transformations birationnelles T_1, T_2, de période quatre, de la surface F en elle-même. On a

$$T_1^2 = T_2^2 = (T_1T_2)^2.$$

Nous poserons

$$T_3 = T_1T_2, \qquad T = T_1^2 = T_2^2 = T_3^2.$$

La transformation T est involutive. Toutes les transformations birationnelles de la surface F, distinctes de T et laissant invariants tous les groupes de I_8, sont de période quatre et sont des puissances de T_1, T_2 ou T_3. Par exemple, on a

$$T_1T_2^3 = T_1T_2T = T_1T_2T_3^2 = T_3^3.$$

Nous supposerons que l'involution I_8 possède :

x_8 points de coïncidence octuple, c'est-à-dire x_8 points tels que chacun d'eux, compté huit fois, forme un groupe de l'involution ;

x_{41} groupes de deux points de coïncidence quadruple, chacun de ces points étant invariant pour T_1 ;

x_{42} groupes de deux points de coïncidence quadruple, chacun de ces points étant invariant pour T_2 ;

x_{43} groupes de deux points de coïncidence quadruple, chacun de ces points étant invariant pour T_3 ;

x_2 groupes de quatre points de coïncidence double, chacun de ces points étant invariant pour T (mais non pour T_1, T_2, T_3).

On sait d'ailleurs (M — 1) qu'on a

$$x_8 + 2(x_{41} + x_{42} + x_{43}) + 4x_2 = 8,$$

et que deux cas peuvent se présenter :

I. $x_8 = 4, \quad x_{41} = x_{42} = x_{43} = 0, \quad x_2 = 1;$

II. $x_8 = 2, \quad x_{41} = x_{42} = x_{43} = 1, \quad x_2 = 0.$

Rappelons que :

Un point de coïncidence octuple est invariant pour T_1, T_2, T_3. Les points de F, infiniment voisins d'un tel point, sont invariants pour T. Parmi ces points, il y en a deux invariants pour chacune des transformations T_1, T_2, T_3. Les six points ainsi obtenus sont distincts.

Un point de coïncidence quadruple, par exemple invariant pour T_1, est transformé en un second point invariant pour T_1 par les deux transformations T_2, T_3. Les points de F, infiniment voisins d'un tel point, sont invariants pour T, et parmi ces points, il y en a deux invariants pour T_1.

Un point de coïncidence double est transformé en trois points analogues, distincts, par T_1, T_2, T_3. Les points de F, infiniment voisins d'un tel point sont invariants pour T.

Tous les points de coïncidence de I_8 sont d'ailleurs des points simples de la surface F.

2. Soit Φ une surface normale, simple, de genres un, image de l'involution I_8, située dans un espace linéaire $S_\pi (\pi \geq 3)$ (*). La surface Φ est donc d'ordre $2\pi - 2$ et ses sections hyperplanes Γ ont le genre π. Nous supposerons que les sections hyperplanes de Φ ne passent pas, en général, pour les points de diramation pour la correspondance (1, 8) existant entre Φ et F.

Dans ces conditions, la surface Φ possède (M — 1) :

x_8 points doubles uniplanaires ordinaires;

$x_{41} + x_{42} + x_{43}$ points doubles biplanaires singuliers (ayant chacun un point double conique infiniment voisin);

x_2 points doubles coniques.

(*) La notation S_ω signifie, suivant l'usage, espace linéaire à ω dimensions.

Aux sections hyperplanes Γ de Φ correspondent, sur F, des courbes de degré $16\pi - 16$, de genre $8\pi - 7$, formant un système linéaire de dimension π, dépourvu de points-base, composé au moyen de I_8. Les courbes de ce sytème appartiennent à un système linéaire complet, de mêmes degré et genre, que nous désignerons par $|C|$. Le système $|C|$ a donc la dimension $8\pi - 7$; de plus, il est dépourvu de points-base. Enfin, le système $|C|$ est simple ; en effet, s'il était composé, ce ne pourrait être avec I_8, car on a $8\pi - 7 > \pi$; s'il était composé au moyen d'une autre involution, il en serait de même du système partiel formé des courbes C transformées des courbes Γ ; mais alors, $|\Gamma|$ serait lui-même composé, contrairement à l'hypothèse.

Rapportons projectivement les courbes de $|C|$ aux hyperplans d'un espace linéaire $S_{8\pi-7}$. La surface F se transforme birationnellement en une surface d'ordre $16\pi - 16$, normale et simple, que nous désignerons toujours par F. Nous continuerons également à désigner par $|C|$, le système des sections hyperplanes de la nouvelle surface F.

Observons qu'une courbe de $|C|$, transformée d'une courbe Γ de Φ, contenant ∞^1 groupes de I_8, est transformée en elle-même par T_1, T_2 et T_3. Il en résulte que les courbes du système complet $|C|$ sont transformées les unes dans les autres par T_1, T_2, T_3. En effet, si T_1, par exemple, transforme une courbe quelconque C en une courbe C', lorsque cette courbe C varie d'une manière continue dans $|C|$ et vient coïncider avec la transformée d'une courbe Γ de Φ, la courbe C' varie d'une manière continue et vient coïncider avec la même courbe. Par suite, $|C|$ étant complet et la surface Φ régulière, c'est une courbe de ce système.

Les transformations T_1, T_2, T_3 échangeant entre-elles les sections hyperplanes C de F, ces transformations sont déterminées, sur cette surface, par trois homographies de période quatre de l'espace ambiant $S_{8\pi-7}$. Nous désignerons ces homographies par les mêmes symboles que les transformations correspondantes.

La transformation T détermine une homographie involutive de l'espace $S_{8\pi-7}$. Cette homographie possède deux espaces linéaires unis, l'un de dimension $4\pi - 3$, l'autre de dimension $4\pi - 5$ (M — 2). Nous désignerons ces espaces par $S^0_{4\pi-3}$, $S^1_{4\pi-5}$. L'espace $S^1_{4\pi-5}$ ne rencontre pas F (M — 2) et les hyperplans qui le contiennent découpent, sur F, un système linéaire partiel $|C_0|$, composé au moyen de l'involution I_2, d'ordre deux, engendrée par T. L'autre espace $S^0_{4\pi-3}$ rencontre F en

$$x_8 + 2(x_{41} + x_{42} + x_{43}) + 4x_2 = 8,$$

points qui sont les points de coïncidence de I_2 (c'est-à-dire de I_8). Les hyperplans qui contiennent découpent, sur F, un système linéaire partiel $|C_1|$, composé au moyen de I_8, et possédant huit points-base.

$|C_0|$ a la dimension $4\pi - 3$, $|C_1|$ la dimension $4\pi - 5$.

Chacune des homographies T_1, T_2, T_3 possède quatre espaces linéaires unis, deux dans $S^0_{4\pi-3}$ et deux dans $S^1_{4\pi-5}$. Nous allons déterminer la position de ces espaces et à cet effet, nous allons considérer la surface Ψ, image de l'involution I_2.

3. Soit donc Ψ une surface image de l'involution I_2. Comme un groupe de I_8 est formé de quatre groupes de I_2, à un groupe de I_8 correspondra un groupe de quatre points sur Ψ. Les groupes ainsi obtenus formeront, sur Ψ, une involution I_4, d'ordre quatre, dont Φ est l'image. Il en résulte que la surface Ψ est de genres un.

Un groupe de quatre points de F, invariant pour T_1, a pour correspondant, sur Ψ, un groupe de deux points (faisant partie d'un groupe de I_4); par suite, à T_1 correspond une transformation birationnelle involutive T'_1 de Ψ en elle-même, et cette transformation T'_1 laisse invariant tout groupe de I_4. En effet, tout groupe de I_8 est formé de deux groupes de quatre points invariants pour I_4.

De même, aux transformations T_2, T_3 correspondent des transformations birationnelles involutives T'_2, T'_3 de Ψ en elle-même, et ces transformations laissent invariant tout groupe de I_4.

Il en résulte que l'involution I_4 est de seconde espèce (M — 2) et qu'on a

$$T'_2T'_3 = T'_3T'_2, \qquad T'_3T'_1 = T'_1T'_3, \qquad T'_1T'_2 = T'_2T'_1.$$

Voyons maintenant quels sont les points de coïncidence de I_4 (ils doivent être au nombre de vingt-quatre et former douze groupes de l'involution).

A un point de coïncidence de I_2 sur F correspond sur Ψ un point de diramation équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à une courbe rationnelle de degré -2.

Considérons un point de coïncidence octuple A de I_8 sur F. Il lui correspond, sur Ψ, une courbe de diramation a_1 rationnelle, de degré -2. Comme nous l'avons rappelé, il y a deux points de F, infiniment voisins de A, invariants pour chacune des transformations T_1, T_2, T_3 et ces six points sont distincts. Il y aura donc, sur a, six points de coïncidence de I_4 : deux invariants pour T'_1, deux pour T'_2, deux pour T'_3. Il résulte, d'ailleurs, de nos recherches antérieures (M — 1) que les deux points invariants pour T'_1, par exemple, sont échangés entre eux par T'_2, T'_3. Du reste, a est transformée en elle-même par T'_1, T'_2, T'_3; les six points de coïncidence dont il vient d'être question forment trois groupes de I_4.

Considérons maintenant deux points de coïncidence quadruple, B_1, B_2, formant un groupe de I_8 et invariants pour T_1, par exemple. A ces points correspondent, sur Ψ, deux courbes rationnelles de diramation, b_1, b_2, de degré -2. Il résulte de ce que nous avons rappelé plus haut que b_1, b_2 sont transformées l'une dans l'autre par T'_2, T'_3, mais sont transformées chacune en elle-même par T'_1. Il s'en suit que sur chacune d'elles il y a deux points invariants pour T'_1, c'est-à-dire deux points de coïncidence de I_4. Les quatre points ainsi obtenus forment deux groupes de I_4.

Enfin, les quatre courbes rationnelles de degré — 2 qui correspondent, sur Ψ, à quatre points de coïncidence double formant un groupe de I_8 sur F, sont échangées entre elles par T'_1, T'_2, T'_3. Ces quatre courbes n'ayant, d'ailleurs, deux à deux aucun point commun (M — 2) ne contiennent aucun point de coïncidence de I_4.

Nous avons donc trouvé $6x_8 + 4(x_{41} + x_{42} + x_{43})$ points de coïncidence de I_4; $2x_8 + 4x_{4i}$ de ces points sont invariants pour T'_i $(i = 1, 2, 3)$. On remarquera que pour les types I et II d'involutions I_8 on a

$$6x_8 + 4(x_{41} + x_{42} + x_{43}) = 24, \qquad 2x_8 + 4x_{4i} = 8;$$

tous les points de coïncidence de I_4 ont donc été obtenus (M — 2).

4. Rapportons projectivement les courbes de $|C_0|$ aux hyperplans d'un espace $S_{4\pi-3}$. Nous obtenons (M — 2) une surface Ψ_0, d'ordre $8\pi - 8$, modèle projectif de la surface Ψ, possédant huit points doubles coniques qui sont les points de diramation. Les courbes rationnelles de degré — 2 rencontrées plus haut $(a, b_1, b_2, \ldots)$ sont actuellement des courbes infiniment petites (domaines du premier ordre des points doubles). Il s'en suit que les sections hyperplanes de Ψ_0 ne passent pas, en général, par des points de coïncidence de l'involution I_4, puisque ceux-ci sont infiniment voisins des points doubles.

En appliquant les résultats obtenus antérieurement (M — 2) pour les involutions d'ordre quatre et de seconde espèce, on voit immédiatement que :

Il existe quatre systèmes linéaires partiels de sections hyperplanes de Ψ_0 composés au moyen de l'involution I_4.

L'un de ces systèmes, dépourvu de points-base, a la dimension π et correspond aux sections hyperplanes de Φ.

Les trois autres, de dimension $\pi - 2$, sont pourvus de points-base. Les courbes de chacun d'eux passent par les points invariants pour deux des trois transformations T'_1, T'_2, T'_3.

En correspondance, il existe sur F, dans $|C_0|$, quatre systèmes linéaires partiels composés avec I_8, à savoir :

Un système $|C_{00}|$, de dimension π, dépourvu de points-base, dont les courbes correspondent aux sections hyperplanes Γ de Φ.

Un système $|C_{01}|$, de dimension $\pi - 2$, dont les courbes passent par les points invariants pour T_2, T_3.

Un système $|C_{02}|$, de dimension $\pi - 2$, dont les courbes passent par les points invariants pour T_3, T_1.

Un système $|C_{03}|$, de dimension $\pi - 2$, dont les courbes passent par les points invariants pour T_1, T_2.

5. Rapportons projectivement les courbes de $|C_1|$ aux hyperplans d'un espace $S_{4\pi-5}$. Nous obtenons ainsi un second modèle projectif de la surface Ψ, soit Ψ_1, surface d'ordre $8\pi - 12$. Puisque les courbes de $|C_1|$ passent par les points de coïncidence de I_2, à ces points correspondent des droites de Ψ. Les courbes rationnelles a, b_1, b_2, ..., de degré -2, sont donc actuellement des droites que nous désignerons par le même symbole.

Les transformations T'_1, T'_2, T'_3 échangent entre elles les sections hyperplanes de Ψ_1, car T_1, T_2, T_3 échangent entre elles, par construction, les courbes de $|C_1|$. Il en résulte que T'_1, T'_2, T'_3 sont déterminées, sur Ψ_1, par des homographies involutives de $S_{4\pi-5}$, homographies que nous désignerons également par T'_1, T'_2, T'_3.

L'homographie involutive T'_1 possède deux espaces linéaires unis $S_r^{(11)}$, $S_t^{(12)}$, dont les dimensions r et t sont, d'après la théorie des homographies, liées par la relation

$$r + t = 4\pi - 6.$$

La droite a contient deux points invariants pour T'_1; par suite, chacun des espaces $S_r^{(11)}$, $S_t^{(12)}$ rencontre cette droite en un de ces points.

Les transformations T'_1, T'_2 étant permutables, deux cas peuvent se présenter :

1° T'_2 transforme l'espace $S_r^{(11)}$ en lui-même;

2° T'_2 transforme l'un dans l'autre les espaces $S_r^{(11)}$, $S_t^{(12)}$.

Si le premier cas se présentait, puisque a est transformée en elle-même par T'_2, le point commun à cette droite et à $S_r^{(11)}$ serait invariant pour T'_2. Or, les points de a, invariants pour T'_2, sont distincts de ceux qui sont invariants pour T'_1, comme nous l'avons fait remarquer plus haut. Donc, le premier cas ne peut se présenter.

T'_2 transformant $S_r^{(11)}$, $S_t^{(12)}$ l'un dans l'autre, ces deux espaces doivent avoir la même dimension

$$r = t = 2\pi - 3.$$

On peut tenir le même raisonnement pour les homographies T'_2, T'_3 et nous voyons que la transformation T'_i possède deux espaces linéaires unis $S_{2\pi-3}^{(i1)}$, $S_{2\pi-3}^{(i2)}$, échangés entre eux par les deux autres transformations. De plus, chacun de ces espaces rencontre la droite a. On voit aisément que $S_{2\pi-3}^{(11)}$, $S_{2\pi-3}^{(12)}$, par exemple, rencontrent les droites b_1, b_2. Les autres espaces rencontrent les droites provenant de points invariants pour T_2 ou T_3 de F.

Les six espaces qui viennent d'être obtenus n'ont deux à deux aucun point commun. Tout d'abord, cela est évident pour deux espaces unis d'une même homographie. Supposons que $S_{2\pi-3}^{(11)}$, $S_{2\pi-3}^{(12)}$, par exemple, puissent avoir un point P commun. Comme T'_2 transforme $S_{2\pi-3}^{(11)}$ en $S_{2\pi-3}^{(12)}$, ce dernier espace contiendrait également P, ce qui est absurde.

De tout ceci, il résulte que, dans le système des sections hyperplanes de Ψ_1, il n'y a pas de courbe transformée en elle-même à la fois par T'_1, T'_2, T'_3. Il y a six systèmes partiels, de dimension $2\pi - 3$, deux formés de courbes transformées en elles-mêmes par T'_1, deux de courbes transformées en elles-mêmes par T'_2, deux de courbes transformées en elles-mêmes par T'_3.

En correspondance, il existe sur F, dans le système $|C_1|$, six systèmes linéaires partiels de dimension $2\pi - 3$: deux de ces systèmes, $|C_{i1}|$, $|C_{i2}|$, ont leurs courbes transformées en elles-mêmes par T_i et une courbe quelconque de $|C_{i1}|$ est transformée en une courbe de $|C_{i2}|$ par les deux autres transformations. En d'autres termes, $|C_{i1}|$ et $|C_{i2}|$ sont composés avec l'involution cyclique d'ordre quatre engendrée sur F par T_i $(i = 1, 2, 3)$. Ces six systèmes n'ont, de plus, aucune courbe commune deux à deux.

6. Revenons à la surface F. L'homographie de période quatre T_i possède quatre espaces linéaires unis présentant le dispositif suivant (*) : deux espaces linéaires $S^{i1}_{2\pi-3}$, $S^{i2}_{2\pi-3}$ sont situés dans $S^1_{4\pi-5}$ et ne rencontrent donc pas F. Deux espaces linéaires $S'^{i}_{2\pi-1}$, $S''^{i}_{2\pi-3}$ sont situés dans $S^0_{4\pi-3}$; le premier rencontre F en $x_8 + 2x_{4i}$ points, le second ne rencontre pas F.

Les espaces $S'^1_{2\pi-1}$, $S'^2_{2\pi-1}$, ayant en commun x_8 points de la surface F, ont en commun un certain espace linéaire S^{00}_ρ. Il en résulte que T_2 change en lui-même $S'^1_{2\pi-1}$; mais, comme cet espace appartient à l'espace $S^0_{4\pi-3}$, uni par $T = T_2^2$, T_2 détermine dans $S'^1_{2\pi-1}$ une homographie involutive et celle-ci possède un second espace uni de dimension $2\pi - 2 - \rho$. Cet espace appartient nécessairement à l'espace $S''^2_{2\pi-3}$. Désignons-le provisoirement par S^{01}.

On voit, de même, que $S'^2_{2\pi-1}$ contient un espace S^{02}, de dimension $2\pi - 2 - \rho$, uni par T_1, T_2, et appartenant à $S''^1_{2\pi-3}$. Si, de plus, on observe qu'un point uni pour T_1, T_2, l'est également pour $T_3 = T_1T_2$, on voit que $S'^3_{2\pi-1}$ passe par S^{00}_ρ et contient un second espace uni pour T_1, T_2, soit S^{03}, de dimension $2\pi - 2 - \rho$, appartenant à $S''^1_{2\pi-3}$, $S''^2_{2\pi-3}$. L'espace $S''^3_{2\pi-3}$ passe par S^{01} et S^{02}.

D'après la théorie des homographies, les hyperplans passant

(*) Voir notre note *Sur les involutions cycliques d'ordre quatre, appartenant à une surface de genres un.* (BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1923, pp. 75-88.)

par $S^1_{4\pi-5}$, S^{01}, S^{02}, S^{03} sont en nombre ∞^ρ et sont invariants pour T_1, T_2, T_3. Observons qu'ils n'ont pas de point fixe commun avec F ; le système de courbes qu'ils découpent sur F ne peut donc être que le système $|C_{00}|$, composé avec I_8 et dépourvu de points-base. Ce système ayant la dimension π, on a $\rho = \pi$. Nous voyons donc qu'il existe, dans $S^0_{4\pi-3}$, quatre espaces linéaires S^{00}_π, $S^{01}_{\pi-2}$, $S^{02}_{\pi-2}$, $S^{03}_{\pi-2}$ unis à la fois pour T_1, T_2, T_3. Le premier de ces espaces recontre F en x_8 points (de coïncidence octuple pour I_8), les autres ne rencontrent pas cette surface.

Les six espaces linéaires $S^{i1}_{2\pi-3}$, $S^{i2}_{2\pi-3}$ ($i = 1, 2, 3$) contenus dans $S^1_{4\pi-5}$, n'ont deux-à-deux aucun point commun. Les hyperplans passant par $S^0_{4\pi-3}$ et $S^{11}_{2\pi-3}$, par exemple, sont en nombre $\infty_{2\pi-3}$ et découpent, sur F, le système $|C_{11}|$, composé avec l'involution cyclique d'ordre quatre engendrée par T_1.

D'une manière générale, nous supposerons le système $|C_{i1}|$, découpé par les hyperplans passant par $S^0_{4\pi-3}$ et $S^{i2}_{2\pi-3}$, le système $|C_{i2}|$, par les hyperplans, passant par $S^0_{4\pi-3}$ et $S^{i2}_{2\pi-3}$.

7. Soit A un point de coïncidence octuple de I_8. Considérons le plan tangent α à la surface F en ce point A (simple pour F comme nous l'avons dit plus haut). Le point A est invariant pour T_1, T_2, T_3, il en résulte que le plan α n'a que ce point en commun avec $S^0_{4\pi-3}$ (*). Les points de F, infiniment voisins de A, sont invariants pour T ; en d'autres termes, les tangentes à F au point A sont invariantes pour T et il en résulte que le plan α rencontre l'espace $S^1_{4\pi-5}$ suivant une droite.

La transformation T_1 opère sur les tangentes à F en A comme une homographie involutive. Il y a deux tangentes invariantes pour T_1, c'est-à-dire que le plan α rencontre chacun des espaces $S^{11}_{2\pi-3}$, $S^{12}_{2\pi-3}$ en un point (ces deux tangentes déterminent les points de F, infiniment voisins de A, invariants pour T_1, dont il a été question plus haut).

(*) *Sur les involutions cycliques d'ordre quatre*, ... (Loc. cit.)

En répétant le même raisonnement pour T_2, T_3, on voit que le plan tangent en un point de coïncidence octuple, s'appuie en un point sur chacun des six espaces $S^{11}_{2\pi-3}, \ldots, S^{32}_{2\pi-3}$.

Soient maintenant B_1, B_2 deux points de coïncidence quadruple, invariants pour T_1, formant un groupe de I_8, β_1, β_2 les plans tangents à F en ces points. En utilisant les résultats obtenus précédemment (*), on voit que ces plans β_1, β_2 n'ont en commun avec $S^0_{4\pi-3}$ que leur point de contact avec F. Ces plans s'appuient chacun en un point sur les espaces $S^{11}_{2\pi-3}$, $S^{12}_{2\pi-3}$ et, par suite, en une droite sur $S^1_{4\pi-5}$. De plus, comme T_2, T_3 changent B_1 en B_2, les plans β_1, β_2 sont aussi transformés l'un dans l'autre par ces homographies.

On obtient des résultats analogues pour les points de coïncidence quadruple de I_8, invariants pour T_2 ou T_3, et pour les plans tangents à F en ces points.

Soient, enfin, D_1, D_2, D_3, D_4 quatre points de coïncidence double de I_8, formant un groupe de cette involution, δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 les plans tangents à F en ces points. Chacun de ces plans n'a que le point de contact avec F commun avec l'espace $S^0_{4\pi-3}$. Les points de F infiniment voisins de l'un des points D_1, D_2, D_3, D_4 étant invariants pour T, les plans δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 rencontrent chacun $S^1_{4\pi-5}$ suivant une droite (mais ils ne rencontrent pas les espaces $S^{i1}_{2\pi-3}$, $S^{i2}_{2\pi-3}$). Les transformations T_1, T_2, T_3 échangent entre eux les points D_1, D_2, D_3, D_4 et, par suite, aussi les plans δ_1, δ_2, δ_3, δ_4.

8. Nous sommes en mesure d'obtenir des indications sur les systèmes linéaires partiels de sections hyperplanes de F, composés au moyen de I_8 ou de l'une des involutions cycliques d'ordre quatre engendrées par T_1, T_2 ou T_3.

Le système $|C_{00}|$, de dimension π, dépourvu de points-base, est découpé par les hyperplans passant par $S^1_{4\pi-5}$ et par $S^{01}_{\pi-2}$, $S^{02}_{\pi-2}$, $S^{03}_{\pi-3}$.

(*) *Sur les involutions cycliques d'ordre quatre,* ... (Loc. cit.)

Le système $|C_{01}|$, de dimension $\pi - 2$, est découpé par les hyperplans passant par $S^1_{4\pi-5}$, S^{00}_{π}, $S^{02}_{\pi-2}$, $S^{03}_{\pi-2}$. Ces hyperplans contiennent les espaces unis $S'^2_{2\pi-1}$, $S'^3_{2\pi-1}$ et, par conséquent, les x_8 points de coïncidence octuple de I_8, les $2x_{42}$ points invariants pour T_2 et les $2x_{43}$ points invariants pour T_3. Ils contiennent, en outre, les plans tangents à F en ces points. Il en résulte que les courbes du système $|C_{01}|$, composé au moyen de I_8, possèdent des points de multiplicité deux au moins aux x_8 points de coïncidence octuple de I_8 et aux $2(x_{42} + x_{43})$ points de F, invariants pour T_2 ou T_3.

Les courbes C_{01} étant invariantes pour T_1, T_2 et T_3, il leur correspond, sur Φ, des courbes Γ_{01} formant un système linéaire complet $|\Gamma_{01}|$ de dimension $\pi - 2$. Ce système a donc le degré $2\pi - 6$ et le genre $\pi - 2$. Par suite, le degré effectif de $|C_{01}|$ est égal à $16\pi - 48$; il y a donc 32 points d'intersection de deux courbes C_{01} absorbés aux points-base du système $|C_{01}|$. Nous verrons plus loin qu'il y a exactement 8 points d'intersection absorbés en un point de coïncidence octuple de I_8 et 4 points d'intersection absorbés en un point invariant pour T_2 ou pour T_3.

On arrive à des résultats analogues pour le système $|C_{02}|$, découpé par les hyperplans contenant

$$S^1_{4\pi-5}, \quad S^{00}_{\pi}, \quad S^{03}_{\pi-2}, \quad S^{07}_{\pi-2}.$$

et pour le système $|C_{03}|$, découpé par les hyperplans contenant

$$S^1_{4\pi-5}, \quad S^{00}_{\pi}, \quad S^{01}_{\pi-2}, \quad S^{02}_{\pi-2}.$$

Considérons maintenant le système $|C_{11}|$, de dimension $2\pi - 3$, découpé par les hyperplans contenant $S^0_{4\pi-3}$ et $S^{11}_{2\pi-3}$; il est composé avec l'involution d'ordre quatre engendrée par T_1, mais non avec I_8. T_2 et T_3 transforment $|C_{11}|$ en $|C_{12}|$. Il est aisé de voir que les courbes C_{11} passent simplement par les points de coïncidence octuple de I_8, en y touchant la tangente à F s'appuyant sur $S^{11}_{2\pi-3}$; simplement par les $2x_{41}$ points de F invariants pour T_1, en y touchant la tangente à F s'appuyant sur $S^{11}_{2\pi-3}$; enfin, simplement, mais avec une tangente variable, par les autres points de coïncidence de I_8.

On parvient à des conclusions analogues pour les systèmes

$$|C_{12}|,\quad |C_{21}|,\quad |C_{22}|,\quad |C_{31}|,\quad |C_{32}|.$$

9. Considérons l'involution cyclique I'_4 engendrée sur F par T_1 et soit Ψ' une surface image de cette involution. A un groupe de I_8 correspond, sur Ψ', un groupe de deux points et les groupes ainsi obtenus forment une involution I'_2, d'ordre deux, dont Φ est l'image. Il en résulte que Ψ' est de genres un.

Les hyperplans de $S_{8\pi-7}$ passant par $S^1_{4\pi-5}$ et $S''^1_{2\pi-3}$ sont transformés en eux-mêmes par T_1 et ne passent par aucun point fixe de F. Si nous rapportons projectivement ces hyperplans aux hyperplans d'un espace linéaire $S_{2\pi-1}$, il correspond à F une surface birationnellement identique à Ψ', d'ordre $4\pi - 4$, que nous continuerons à désigner par Ψ'.

De cette construction, il résulte que le système des sections hyperplanes de Ψ' est transformé en lui-même par la transformation birationnelle T', involutive, de cette surface en elle-même, déterminée par I'_2. Il y a deux systèmes linéaires partiels de sections hyperplanes de Ψ' composés au moyen de I'_2. L'un, que nous désignerons par $|C'_{00}|$, est formé de courbes qui correspondent à celles de $|C_{00}|$ de F; l'autre, $|C'_{01}|$, correspond au système $|C_{01}|$ de F.

La surface Ψ' possède (*) :

$x_8 + 2x_{41}$ points doubles biplanaires singuliers, correspondant aux points de F invariants pour T_1;

$x_{42} + x_{43} + 2x_2$ points doubles coniques correspondant aux points de F invariants pour $T_1^2 = T$, mais non pour T_1.

Les points de Ψ' invariants pour T', c'est-à-dire les points de coïncidence de I'_2, sont les suivants :

a) Les points qui correspondent aux points de F, infiniment

(*) *Sur les involutions cycliques d'ordre quatre*, ... (Loc. cit.), et M-1.

voisins d'un point de coïncidence octuple A, invariants pour T_2 et T_3.

b) Les points qui correspondent aux points de F, infiniment voisins d'un point B, invariant pour T_2 ou T_3, et qui sont eux-mêmes invariants pour ces transformations.

D'après la théorie des involutions d'ordre deux appartenant à une surface de genres un (M — 2), les courbes de $|C'_{01}|$ doivent passer par ces points.

Considérons un point A de F, coïncidence octuple pour I_8 et soient A_{11}, A_{12} les points de F, infiniment voisins de A, invariants pour T_1 (les droites AA_{11}, AA_{12} s'appuient donc respectivement sur $S^{11}_{2\pi-3}$, $S^{12}_{2\pi-3}$), A_{21}, A_{22} les points analogues, invariants pour T_2, A_{31}, A_{32} les points analogues invariants pour T_3. Aux points A_{11}, A_{12} correspondent, sur Ψ', deux courbes rationnelles a'_{11}, a'_{12}, de degré — 2, infiniment petites, formant le domaine du premier ordre du point double biplanaire singulier A' correspondant, sur cette surface, au point A. Aux points de F, infiniment voisins de A, correspondent sur Ψ' les points d'une courbe rationnelle a', de degré — 2, infiniment petite, formant le domaine du second ordre de A'. Les couples de points A_{21}, A_{22} et A_{31}, A_{32} sont transformés en eux-mêmes par T_1, il leur correspond donc sur Ψ' respectivement deux points A'_2, A'_3, situés sur a' et qui sont des coïncidences pour T'.

Considérons maintenant un point B de F, invariant pour T_2, par exemple, et soient B_1, B_2 les points de F infiniment voisins de B, invariants pour T_2 (les droites BB_1, BB_2 s'appuient respectivement sur $S^{21}_{2\pi-3}$, $S^{22}_{2\pi-3}$). Rappelons qu'un tel point B est transformé, par T_1 et T_3, en un autre point analogue de F. Aux points de F, infiniment voisins de B, correspondent, sur Ψ', les points d'une courbe rationnelle b', de degré — 2, infiniment petite, domaine du premier ordre du point double conique B' de cette surface correspondant à B. Aux points B_1, B_2 correspondent, sur Ψ', des points B'_1, B'_2 de b', qui sont des points invariants pour T'.

Les courbes C'_{01} doivent passer, comme il a été dit plus haut, par les points A'_2, A'_3, B'_1, B'_2 et par les autres points analogues. Il en résulte que les courbes C'_{01} comprendront, comme parties fixes, les courbes infiniment petites a', a'_{11}, a'_{12}, b' et les autres courbes analogues; les points de coïncidence de I'_2 se trouvent alors sur ces parties fixes.

Pour obtenir une représentation fonctionnelle des parties mobiles des courbes C'_{01}, précisons les notations précédentes en représentant par b'_2 une courbe b' provenant d'un point de F, invariant pour T_2, par b'_3 une courbe b' provenant d'un point de F, invariant pour T_3. Les parties mobiles des courbes C'_{01} forment le système linéaire

$$|C'_{01} - \Sigma(a' + a'_{11} + a'_{12}) - \Sigma b'_2 - \Sigma b'_3|,$$

les sommations s'étendant respectivement aux x_8 points tels que A', aux x_{42} points tels que B' provenant des points de F invariants pour T_2, aux x_{43} points tels que B', provenant des points de F invariants pour T_3. On en déduit que les parties mobiles des courbes C'_{01} forment un système linéaire de degré effectif

$$4\pi - 4 - 2x_8 - 2x_{42} - 2x_{43};$$

elles rencontrent les courbes a'_{11}, a'_{12} chacune en un point, les courbes b'_2, b'_3 chacune en un point, elles ne rencontrent pas la courbe a'.

Remarquons, d'ailleurs, que pour les deux types d'involutions I_8 on a

$$2x_8 + 2x_{42} + 2x_{43} = 8,$$

le système linéaire envisagé est donc de degré effectif $4\pi - 12$.

10. Aux courbes C'_{01} correspondent, sur Φ, les courbes Γ_{01}, de genre $\pi - 2$ et de degré $2\pi - 6$. Le système $|C'_{01}|$ étant composé avec I'_2 et son degré effectif étant $4\pi - 12$, on voit que le degré de $|\Gamma_{01}|$ est égal à $\frac{1}{2}(4\pi - 12) = 2\pi - 6$, comme nous l'avions trouvé précédemment.

Observons maintenant qu'au point A′ de Ψ' correspond, sur Φ, un point double uniplanaire ordinaire A″. Ce point A″ est équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à une courbe infiniment petite, de degré -2, a, à laquelle sont infiniment voisines trois courbes rationnelles de degré -2, infiniment petites, a_1, a_2, a_3 (équivalentes aux trois points doubles coniques du domaine du second ordre de A″). Ces trois dernières courbes ne se rencontrent pas deux à deux, mais rencontrent chacune a en un point (*). Puisque Φ est l'image de I'_2, aux points A'_2, A'_3 correspondent des points doubles coniques de cette surface; ce seront les points équivalents à a_2 et à a_3 respectivement. La courbe infiniment petite a' est transformée en elle-même par T′, il lui correspond la droite a. Enfin, T′ transforme a'_{11} en a'_{12} (puisque T_2, T_3 transforment, sur F, A_{11} en A_{12}); à ces deux courbes correspond la courbe a_1. Il en résulte que les courbes Γ_{01} rencontrent a_1 en un point, mais ne rencontrent pas a, a_2 ni a_3.

Envisageons maintenant un point double conique B′ de Ψ', correspondant à un point de F invariant pour T_2, par exemple. Il lui correspond, sur Φ, un point double biplanaire singulier B″ de cette surface et ce point double est équivalent à trois courbes rationnelles de degré -2, que nous désignerons par b_{21}, b_{22}, b_{20}. Les courbes b_{21}, b_{22} formeront le domaine du premier ordre de B″, la courbe b_{20} formera le domaine du second ordre. Les courbes b_{21}, b_{22} ne se rencontrent pas, mais rencontrent chacune en un point la courbe b_{20} (**). La courbe b' de Ψ' est transformée en elle-même par T′; par suite, il lui

---

(*) Au sujet des points doubles uniplanaires ordinaires, voir par exemple, ENRIQUES-CHISINI, *Teoria geometrica delle equazioni*, Bologne, 1918, vol. II, p. 597. Si l'on rapporte projectivement les hyperplans contenant le plan tangent à Φ en A″ aux hyperplans d'un $S_{\pi-3}$, Φ se transforme en une surface Φ', d'ordre $2\pi-8$, sur laquelle se trouvent trois droites. Ces trois droites sont les transformées des points doubles infiniment voisins de A″. Elles concourent en un point, double pour Φ', qui correspond à la courbe a.

(**) *Sur les involutions cycliques d'ordre quatre*, ... (LOC. CIT.)

correspond, sur Φ, la courbe b_{20} et il en résulte que les courbes Γ_{01} rencontrent b_{20} en un point. Aux points B'_1, B'_2 correspondent respectivement les courbes b_{21}, b_{22} et ces courbes ne sont pas rencontrées par les courbes Γ_{01}.

Introduisons encore les notations suivantes : un point double biplanaire singulier de Φ, provenant d'un point de F invariant pour T_3, est équivalent à un ensemble de courbes rationnelles b_{31}, b_{32}, b_{30}, de degré -2, formant une configuration analogue à l'ensemble b_{21}, b_{22}, b_{20}.

Nous sommes maintenant en mesure d'exprimer le lien fonctionnel existant entre $|\Gamma|$ et $|\Gamma_{01}|$. A une section hyperplane quelconque de Ψ' correspond, sur Φ, une courbe qui devient 2Γ lorsque la section considérée devient C'_{00} et qui devient $2\Gamma_{01}$, augmentée des composantes a, a_1, a_2, a_3 b_{21}, etc., quand la section hyperplane devient C'_{01}. Il existe donc une relation de la forme

$$2\Gamma_{01} + \Sigma(\lambda a + \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3) + \Sigma(\mu_1 b_{21} + \mu_2 b_{22} + \mu b_{20}) + \Sigma(\nu_1 b_{31} + \nu_2 b_{32} \nu b_{30}) \equiv 2\Gamma,$$

les sommations s'étendant respectivement aux x_8 points uniplanaires, aux x_{42} points biplanaires provenant des points de F invariants pour T_2, aux x_{43} points biplanaires relatifs à T_3. Les λ, μ, ν sont des entiers que nous allons déterminer (*).

En exprimant que les courbes Γ_{01} rencontrent a_1 en un point, mais ne rencontrent pas a, a_2, a_3, on trouve

$$2 + \lambda - 2\lambda_1 = 0, \qquad -2\lambda + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0,$$
$$\lambda - 2\lambda_2 = 0, \qquad \lambda - 2\lambda_3 = 0;$$

d'où

$$\lambda = 2, \qquad \lambda_1 = 2, \qquad \lambda_2 = 1, \qquad \lambda_3 = 1.$$

(*) Il est évident que les points singuliers de même nature, de Φ, jouent un rôle symétrique par rapport aux courbes Γ_{01}. En deux points uniplanaires, par exemple, ces courbes se comportent de la même manière.

En exprimant que les courbes Γ_{01} rencontrent b_{20} en un point, mais ne rencontrent pas b_{21}, b_{22}, on trouve

$$-2\mu_1 + \mu = 0, \qquad -2\mu_2 + \mu = 0, \qquad 2 + \mu_1 + \mu_2 - 2\mu = 0,$$

d'où

$$\mu = 2, \qquad \mu_1 = 1, \qquad \mu_2 = 1.$$

On trouve de même

$$\nu = 2, \qquad \nu_1 = 1, \qquad \nu_2 = 2.$$

Par suite, on a

$$\left.\begin{aligned} 2\Gamma_{01} + \Sigma(2a + 2a_1 + a_2 + a_3) + \Sigma(2b_{20} + b_{21} + b_{22}) \\ + \Sigma(2b_{30} + b_{31} + b_{32}) \equiv 2\Gamma. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

On obtiendra de même, en introduisant des notations analogues b_{10}, b_{11}, b_{12} pour les points doubles biplanaires provenant des points de F invariants pour T_1,

$$\left.\begin{aligned} 2\Gamma_{02} + \Sigma(2a + a_1 + 2a_2 + a_3) + \Sigma(2b_{30} + b_{31} + b_{32}) \\ + \Sigma(2b_{10} + b_{11} + b_{12}) \equiv 2\Gamma, \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} 2\Gamma_{03} + \Sigma(2a + a_1 + a_2 + 2a_3) + \Sigma(2b_{10} + b_{11} + b_{12}) \\ + \Sigma(2b_{20} + b_{21} + b_{22}) \equiv 2\Gamma. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Des résultats obtenus ici, on déduit sans peine ceux-ci, relatifs au système de sections hyperplanes $|C_{01}|$ de F :

Les points de F, infiniment voisins d'un point B, invariant pour T_2, par exemple, ayant pour correspondant sur Φ les points de la courbe b_{20}, les courbes C_{01} ont un point double, à tangentes variables, en B. Deux courbes C_{01} ont donc quatre de leurs intersections absorbées en B.

Les courbes C_{01} ont huit de leurs intersections absorbées en un point A, de coïncidence octuple pour I_8. En effet, ce nombre doit être égal à

$$\frac{1}{x_8}[32 - 4 \cdot 2(x_{42} + x_{43})],$$

il vaut donc 8 si $x_8 = 4$, $x_{42} = x_{43} = 0$ ou si $x_8 = 2$, $x_{42} = x_{43} = 1$. Le point A est double pour les courbes C_{01};

les tangentes à ces courbes en A sont fixes et sont précisément les droites issues de A, situées dans le plan tangent à F en ce point et s'appuyant respectivement sur $S^{11}_{2\pi-3}$, $S^{12}_{2\pi-3}$. Enfin, les deux branches de courbes C_{01} en A ont des contacts du second ordre.

11. Reprenons la surface Ψ' qui représente l'involution I'_4 engendrée, sur F, par T_1. Les systèmes $|C_{11}|$, $|C_{12}|$ de sections hyperplanes de F, de dimension $2\pi - 3$, étant composés avec cette involution I'_4, il leur correspond, sur Ψ', des systèmes linéaires de courbes de même dimension, complets, que nous représenterons respectivement par $|C'_{11}|$, $|C'_{12}|$. Ces systèmes ont le genre $2\pi - 3$ et, par suite, le degré $4\pi - 8$. Nous connaissons, d'autre part, la façon dont se comportent les courbes C'_{11}, C'_{12} aux points singuliers de Ψ' (*). Précisément, en un point biplanaire singulier tel que A', les courbes C'_{11} rencontrent en un point la courbe infiniment petite a'_{11}, mais ne rencontrent pas a' ni a'_{12}. Les courbes C'_{12} rencontrent en un point la courbe a'_{12}, mais ne rencontrent ni a', ni a'_{11}.

En un point double B', correspondant à un point de F invariant pour T_2 ou pour T_3, les courbes C'_{11}, C'_{12} rencontrent chacune en un point la courbe b'.

En un point double conique D', provenant d'un point de F invariant pour T, mais non pour T_1, T_2 ou T_3, les courbes C'_{11}, C'_{12} rencontrent chacune en un point la courbe infiniment petite d', rationnelle, de degré -2, équivalente à ce point.

Soit, enfin, B'_1 un point double biplanaire singulier de Ψ', provenant d'un point de F invariant pour T_1. Ce point équivaut à l'ensemble de trois courbes rationnelles, de degré -2, b'_{11}, b'_{12}, b'_{10}, les deux premières ne se rencontrant pas, mais rencontrant la troisième chacune en un point. Les courbes C'_{11} rencontrent b'_{11} en un point, mais ne rencontrent pas b'_{12}, b'_{10}; les

(*) *Sur les involutions cycliques d'ordre quatre*, ... (Loc. cit.)

courbes C'_{12} rencontrent b'_{12} en un point, mais ne rencontrent pas b'_{11}, b'_{10}.

Les transformations T_2, T_3 changeant une courbe C_{11} en une courbe C_{12}, la transformation T' de Ψ' en elle-même change une courbe C_{11} en une courbe C_{12}. Il en résulte que le système linéaire

$$|C'_{11} + C'_{12}|$$

est transformé en lui-même par T'. Par conséquent, il contiendra deux systèmes linéaires partiels composés avec l'involution I'_2. Ce sont ces systèmes, et les systèmes correspondants sur Φ, que nous allons déterminer.

A une courbe C'_{11} correspond, sur Φ, une courbe Γ_{11} et à cette courbe correspond, sur Ψ', la courbe C'_{11} dont nous sommes partis et la courbe C'_{12} que T' fait correspondre à cette courbe C'_{11}. La courbe Γ_{11}, de genre effectif $2\pi - 3$ (comme C'_{11}), possède des points doubles qui proviennent des couples de points de C'_{11} formant des groupes de I'_2, points doubles qui tombent en des points simples de Φ. Ces couples de points de C'_{11} sont précisément fournis par les points de rencontre des courbes C'_{11}, C'_{12} dont il vient d'être question. Si l'on observe que sur F deux courbes C_{11}, C_{12} ont en commun, en dehors des points fixes, $16\pi - 24$ points formant $4\pi - 6$ groupes de I'_4, on voit que les deux courbes C'_{11}, C'_{12} de Ψ' ont en commun $4\pi - 6$ points formant $2\pi - 3$ groupes de I'_2. Il en résulte que la courbe Γ_{11} présente $2\pi - 3$ points doubles (en des points simples de Φ). Par suite, cette courbe a le genre virtuel $4\pi - 6$ et détermine un système linéaire $|\Gamma_{11}|$, de degré $8\pi - 14$, de genre et de dimension $4\pi - 6$. Comme Φ est une surface régulière, toutes les courbes de Φ déduites par ce procédé des courbes C'_{11}, C'_{12} appartiennent à $|\Gamma_{11}|$. Aux courbes Γ_{11} correspondent, sur Ψ', les courbes d'un système linéaire partiel, composé avec I_2, appartenant à $|C'_{11} + C'_{12}|$.

Comme on sait de quelle manière se comportent les courbes $C'_{11} + C'_{12}$ aux points singuliers de Ψ', il est facile de voir comment se comportent les courbes Γ_{11} aux points siguliers de Φ. Précisément, les courbes Γ_{11} rencontrent la courbe a_1 en un point, mais ne rencontrent pas les courbes a, a_2, a_3; elles rencontrent les courbes b_{11}, b_{12} en un point chacune, mais ne rencontrent pas b_{10}; elles rencontrent les courbes b_{20}, b_{30} chacune en un point, mais elles ne rencontrent pas b_{21}, b_{22}, b_{31}, b_{32}. Enfin, si l'on représente par d la courbe rationnelle de degré -2 équivalente à un point double conique D'' de Φ provenant d'un point de F invariant pour T (mais non pour T_1, T_2, T_3), on voit que les courbes Γ_{11} rencontrent d en deux points.

Nous avons une relation fonctionnelle de la forme

$$\begin{aligned} & l\Gamma_{11} + \Sigma(\lambda a + \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3) + \Sigma(\mu b_{10} + \mu_1 b_{11} + \mu_2 b_{12}) \\ & + \Sigma(\nu b_{20} + \nu_1 b_{21} + \nu_2 b_{22}) + \Sigma(\rho b_{30} + \rho_1 b_{31} + \rho_2 b_{32}) \\ & + \sigma \Sigma d \equiv m\Gamma, \end{aligned}$$

les l, m, λ, μ, ν, ρ, σ étant des entiers et les sommations s'étendant aux points singuliers de même nature de Φ, comme il a été convenu plus haut.

Une courbe $C_{11} + C_{12}$ de F rencontrant une courbe C_{00} en $32\pi - 32$ points, les courbes Γ_{11} rencontrent les courbes Γ en $4\pi - 4$ points. On doit donc avoir

$$(4\pi - 4)l = (2\pi - 2)m,$$

c'est-à-dire $m = 2l$.

En exprimant quels sont les nombres de points de rencontre des courbes Γ_{11} avec les courbes a, a_1, ..., on trouve sans difficulté

$$\lambda = l, \quad \lambda_1 = l, \quad \lambda_2 = \frac{l}{2}, \quad \lambda = \frac{l}{2};$$

$$\mu = l, \quad \mu_1 = l, \quad \mu_2 = l;$$

$$\nu = \rho = l, \quad \nu_1 = \rho_1 = \frac{l}{2}, \quad \nu_2 = \rho_2 = \frac{l}{2};$$

$$\sigma = l.$$

La relation fonctionnelle devient donc, en remarquant que $l' = \frac{l}{2}$ doit être entier,

$$\begin{aligned} l' [2\Gamma_{11} &+ \Sigma(2a + 2a_1 + a_2 + a_3) + 2\Sigma(b_{10} + b_{11} + b_{12}) \\ &+ \Sigma(2b_{20} + b_{21} + b_{22}) + \Sigma(2b_3 + b_{31} + b_{32}) \\ &+ 2\Sigma d] \equiv 4l'\Gamma. \end{aligned}$$

La division, sur une surface de genres un, étant une opération univoque (*), on en déduit

$$\left.\begin{aligned} 2\Gamma_{11} &+ \Sigma(2a + 2a_1 + a_2 + a_3) + 2\Sigma(b_{10} + b_{11} + b_{12}) \\ &+ \Sigma(2b_{20} + b_{21} + b_{22}) + (2b_{30} + b_{31} + b_{32}) \\ &+ 2\Sigma d \equiv 4\Gamma. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Si l'on compare les relations fonctionnelles (1) et (4), on en tire

$$2\Gamma_{11} + 2\Sigma(b_{10} + b_{11} + b_{12}) + 2\Sigma d \equiv 2\Gamma + 2\Gamma_{01},$$

et, par suite, puisque la division sur Φ est univoque,

$$\Gamma_{11} + \Sigma(b_{10} + b_{11} + b_{12}) + \Sigma d \equiv \Gamma + \Gamma_{01}. \quad (5)$$

Il s'en suit que l'existence du système $|\Gamma_{11}|$ est une conséquence de l'existence du système $|\Gamma_{01}|$ et des points singuliers de la surface Φ.

En partant des systèmes de courbes $|C_{21}|$, $|C_{22}|$, puis $|C_{31}|$, $|C_{32}|$, de F, on parviendrait de même à l'existence, sur Φ, de deux autres systèmes linéaires $|\Gamma_{12}|$, $|\Gamma_{13}|$, de degré $8\pi - 14$, de genre et de dimension $4\pi - 6$, de courbes d'ordre $4\pi - 4$, donnant lieu aux relations fonctionnelles

$$\left.\begin{aligned} 2\Gamma_{12} &+ \Sigma(2a + a_1 + 2a_2 + a_3) + 2\Sigma(b_{20} + b_{21} + b_{22}) \\ &+ \Sigma(2b_{30} + b_{31} + b_{32}) + \Sigma(2b_{10} + b_{11} + b_{12}) \\ &+ 2\Sigma d \equiv 4\Gamma, \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

$$\Gamma_{12} + \Sigma(b_{20} + b_{21} + b_{22}) + \Sigma d \equiv \Gamma + \Gamma_{02}, \quad (7)$$

$$\left.\begin{aligned} 2\Gamma_{13} &+ \Sigma(2a + a_1 + a_2 + 2a_3) + 2\Sigma(b_{30} + b_{31} + b_{32}) \\ &+ \Sigma(2b_{10} + b_{11} + b_{12}) + \Sigma(2b_{20} + b_{21} + b_{22}) \\ &+ 2\Sigma d \equiv 4\Gamma, \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

$$\Gamma_{13} + \Sigma(b_{30} + b_{31} + b_{32}) + \Sigma d \equiv \Gamma + \Gamma_{03}. \quad (9)$$

(*) SEVERI, *La base minima pour la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique.* (ANNALES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, 1908, pp. 449-468.)

12. Nous avons énuméré plus haut (n° 9) les points de la surface Ψ' transformés en eux-mêmes par T' (points de coïncidence de I'_2). On constate que les courbes C'_{11}, C'_{12} ne passent pas, en général, par ces points; il en sera, par suite, de même des courbes du système $|C'_{11} + C'_{12}|$. Les courbes de ce dernier système, transformées des courbes Γ_{11} de Φ, jouissent, par construction, de la même propriété. Il résulte de la théorie des involutions du second ordre (M — 2) que le second système linéaire partiel contenu dans $|C'_{11} + C'_{12}|$, et composé avec I'_2, aura la dimension $4\pi - 8$ et que ses courbes passeront par les points de Ψ', invariants pour T'. A ce système correspondra, sur Φ, un système linéaire complet, de dimension $4\pi - 8$ et, par suite, de degré $8\pi - 18$, genre $4\pi - 8$, que nous désignerons par $|\Gamma_1|$. Nous allons rechercher de quelle manière les courbes Γ_1 se comportent aux points singuliers de Φ.

Désignons par C'_1 une courbe de $|C'_{11} + C'_{12}|$ qui correspond, sur Ψ', à une courbe Γ_1.

Tout d'abord, dans le domaine des points singuliers de Ψ' qui correspondent à des points de F invariants pour T_1 ou pour T (mais non pour T_1, T_2, T_3), il n'y a aucun point invariant pour T_1 et, par suite, les courbes C'_1 se comportent, en ces points, comme les courbes $C'_{11} + C'_{12}$. Par conséquent, aux points singuliers correspondants de Φ, les courbes Γ_1 et Γ_{11} se comportent de même.

Considérons maintenant le point double biplanaire singulier A' de Ψ'. Les courbes de $|C'_{11} + C'_{12}|$ qui donnent naissance aux courbes C'_1 doivent passer par les deux points de la courbe a' invariants pour T'; ces courbes doivent donc contenir la courbe a' et, par suite, les courbes C'_1 rencontrent a' en deux points (variables).

En un point double conique B' de Ψ' (correspondant à un point de F invariant pour T_2 ou T_3), les courbes C'_1 doivent passer par les points infiniment voisins B'_1, B'_2, qui sont invariants pour T'. A ces points correspondent, sur Φ, les courbes infiniment petites b_{21}, b_{22} si B' provient d'un point de F invariant pour T_2, les courbes b_{31}, b_{32} si B' provient d'un point de F invariant pour T_3. On en conclut que les courbes Γ_1 rencontrent les courbes b_{21}, b_{22}, b_{31}, b_{32} chacune en un point, mais ne rencontrent pas b_{20}, b_{30}.

De ce qui précède, on déduit que l'on a, sur Ψ',

$$C'_1 + \Sigma a' = C'_{11} + C'_{12},$$

la sommation s'étendant aux x_8 points tels que A'. De cette relation fonctionnelle résulte que la courbe a' rencontre C' en deux points, mais (si l'on se souvient que a'_{11} rencontre C'_{11} en un point, mais ne rencontre pas C'_{12}) que les courbes C'_1 ne rencontrent pas a'_{11}, a'_{22}. Aux deux points d'une courbe C'_1 situés sur a' correspond un seul point de a, car C'_1 et a' sont toutes deux transformées en elles-mêmes par T'. Par suite, les courbes Γ_1 rencontrent a en un point, mais ne rencontrent pas les courbes a_1, a_2, a_3.

En résumé, les courbes Γ_1 rencontrent en un point a, b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}, b_{31}, b_{32}, en deux points la courbe d, mais ne rencontrent pas les courbes a_1, a_2, a_3, b_{10}, b_{20}, b_{30}.

Au moyen d'un raisonnement analogue à celui qui a été fait plus haut, on trouve sans peine la relation fonctionnelle

$$\left.\begin{aligned} &\Gamma_1 + \Sigma(2a + a_1 + a_2 + a_3) + \Sigma(b_{10} + b_{11} + b_{12}) \\ &+ \Sigma(b_{20} + b_{21} + b_{22}) + \Sigma(b_{30} + b_{31} + b_{31}) \\ &+ \Sigma d \equiv 2\Gamma. \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Cette relation montre que l'existence du système $|\Gamma_1|$ est une conséquence de l'existence des points singuliers de la surface Φ. Interprétée projectivement, la relation (10) montre que les courbes Γ_1 sont découpées, sur Φ, par les hyperquadriques de S_π passant par les points singuliers de la surface.

13. Nous allons maintenant démontrer qu'on peut toujours trouver une courbe Γ_{11}, une courbe Γ_{12} et une courbe Γ_{13} ayant, en des points simples de Φ, $2\pi - 3$ points doubles ordinaires communs et que, de plus, ce choix peut se faire de $\infty^{2\pi-3}$ manières.

Rappelons tout d'abord qu'une courbe C_{11} de F et la courbe C_{12} que T_2 et T_3 lui font correspondre, donnent naissance sur Φ à une courbe Γ_{11} possédant $2\pi - 3$ points doubles. Ceux-ci correspondent aux $2\pi - 3$ groupes de I_8 communs aux deux courbes C_{11}, C_{12} (en dehors des points fixes, situés dans $S^0_{4\pi-3}$).

De même, à l'ensemble de deux courbes C_{21}, C_{22} de F, transformées l'une dans l'autre par T_1 et T_3, correspond sur Φ une courbe Γ_{12} ayant $2\pi - 3$ points doubles. Enfin, à l'ensemble de deux courbes C_{31}, C_{32} de F, transformées l'une dans l'autre par T_1, T_2, correspond une courbe Γ_{13} ayant $2\pi - 3$ points doubles.

Il en résulte que : à trois couples de courbes C_{11} et C_{12}, C_{21} et C_{22}, C_{31} et C_{32}, satisfaisant aux conditions indiquées et découpées sur F par des hyperplans d'un même faisceau, correspondront sur Φ trois courbes Γ_{11}, Γ_{12}, Γ_{13} ayant $2\pi - 3$ points doubles communs. L'espace $S_{8\pi-9}$ commun à ces hyperplans doit être invariant pour T_1, T_2, T_3; il passe par $S^0_{4\pi-3}$ et doit rencontrer $S^1_{4\pi-5}$ suivant un espace $S_{4\pi-7}$, invariant pour T_1, T_2, T_3. Si nous observons que l'hyperplan contenant la courbe C_{11} considérée, par exemple, contient l'espace $S^{11}_{2\pi-3}$, nous voyons que cet espace $S_{4\pi-7}$ doit rencontrer $S^{11}_{2\pi-3}$ suivant un espace $S_{2\pi-4}$. Nous voyons donc qu'il faut trouver un espace linéaire ξ, à $4\pi - 7$ dimensions, situé dans $S^1_{4\pi-5}$, et rencontrant les six espaces $S^{11}_{2\pi-3}$, $S^{12}_{2\pi-3}$, $S^{21}_{2\pi-3}$, $S^{22}_{2\pi-3}$, $S^{31}_{2\pi-3}$, $S^{32}_{2\pi-3}$, suivant des espaces linéaires à $2\pi - 4$ dimensions.

Réciproquement, si nous avons trouvé un espace ξ satisfaisant à ces conditions, les six hyperplans passant par $S^0_{4\pi-3}$, ξ et par l'un des espaces $S^{11}_{2\pi-3}$, ..., $S^{32}_{2\pi-3}$ découperont sur F six courbes C_{11}, ..., C_{32} qui donnent naissance à des courbes Γ_{11}, Γ_{12}, Γ_{13} satisfaisant aux conditions indiquées.

Cela étant. soit ξ_{11} un espace linéaire à $2\pi - 4$ dimensions, appartenant à $S^{11}_{2\pi-3}$. Avec les espaces $S^{21}_{2\pi-3}$, $S^{22}_{2\pi-3}$, ξ_{11} détermine deux espaces $S_{4\pi-6}$ ayant en commun un espace ξ, à $4\pi - 7$ dimensions, s'appuyant sur $S^{21}_{2\pi-3}$, $S^{22}_{2\pi-3}$ suivant des espaces à $2\pi - 4$ dimensions.

De même, par ξ_{11} passe un espace ξ', à $4\pi - 7$ dimensions, s'appuyant sur $S^{31}_{2\pi-3}$, $S^{32}_{2\pi-3}$ suivant des espaces à $2\pi - 4$ dimensions.

Observons maintenant que ξ est invariant pour T_2, ξ' pour T_3. La transformation T_2, changeant $S^{11}_{2\pi-3}$ en $S^{12}_{2\pi-3}$, fait correspondre à ξ_{11} un espace ξ_{12} de $S^{12}_{2\pi-3}$. Mais cet espace doit appartenir à ξ, donc ξ rencontre $S^{12}_{2\pi-3}$ suivant un espace à $2\pi - 4$ dimensions.

La transformation T_3 change ξ_{11} en ξ_{12} également, puisqu'on a $T_3 = T_1 T_2$; par suite, ξ' contient également ξ_{12} et coïncide avec ξ. Ce dernier espace s'appuie donc sur les six espaces $S^{11}_{2\pi-3}, \ldots, S^{32}_{2\pi-3}$ suivant des espaces à $2\pi - 4$ dimensions et est invariant pour T_1, T_2, T_3.

Comme, d'autre part, les espaces linéaires à $2\pi - 4$ dimensions appartenant à $S^{11}_{2\pi-3}$ sont $\infty^{2\pi-3}$, il y a $\infty^{2\pi-3}$ espaces tels que ξ et, par suite, $\infty^{2\pi-3}$ groupes de courbes Γ_{11}, Γ_{12}, Γ_{13} de Φ ayant $2\pi - 3$ points doubles communs.

14. Application aux involutions du type I. — Pour une involution I_8 du type I, on a

$$x_8 = 4, \qquad x_{41} = x_{42} = x_{43}, \qquad x_2 = 1.$$

Les relations fonctionnelles (1), (2) et (3) deviennent

$$2\Gamma_{01} + \Sigma(2a + 2a_1 + a_2 + a_3) \equiv 2\Gamma, \tag{1'}$$
$$2\Gamma_{02} + \Sigma(2a + a_1 + 2a_2 + a_3) \equiv 2\Gamma, \tag{2'}$$
$$2\Gamma_{03} + \Sigma(2a + a_1 + a_2 + 2a_3) \equiv 2\Gamma. \tag{3'}$$

Projectivement, ces relations signifient que le long de chacune des courbes Γ_{01}, Γ_{02}, Γ_{03} il y a une hyperquadrique circonscrite à la surface Φ (c'est-à-dire tangente à Φ en chaque point d'intersection).

Les relations (4), (6) et (8) deviennent

$$2\Gamma_{11} + \Sigma(2a + 2a_1 + a_2 + a_3) + 2d \equiv 4\Gamma, \tag{4'}$$
$$2\Gamma_{12} + \Sigma(2a + a_1 + 2a_2 + a_3) + 2d \equiv 4\Gamma, \tag{6'}$$
$$2\Gamma_{13} + \Sigma(2a + a_1 + a_2 + 2a_3) + 2d \equiv 4\Gamma. \tag{8'}$$

Le long de chacune des courbes Γ_{11}, Γ_{12}, Γ_{13} il y a donc une hypersurface du quatrième ordre circonscrite à la surface Φ.

Si une courbe Γ_{11} possède un point double en un point simple de la surface Φ, l'hypersurface du quatrième ordre circonscrite à Φ le long de cette courbe possède un contact du troisième ordre avec cette surface en ce point, et réciproquement (*).

Nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Si une surface normale de genres un, Φ, de l'espace S_π, est l'image d'une involution d'ordre huit du type I, *appartenant à une surface de genres un,*

1° elle possède quatre points doubles uniplanaires ordinaires et un point double conique,

2° il y a trois familles d'hyperquadriques circonscrites à la surface le long de courbes de genre $\pi - 2$; les hyperquadriques de ces familles passent par les quatre points uniplanaires et chaque point double infiniment voisin d'un de ces points est situé sur les hyperquadriques d'une seule famille,

3° on peut trouver, de $\infty^{2\pi-3}$ façons, des groupes de trois hypersurfaces du quatrième ordre, circonscrites à la surface et ayant toutes trois, en $2\pi - 3$ points simples de celle-ci, des contacts du troisième ordre. Les trois hypersurfaces de chaque groupe passent par les cinq points doubles de la surface, et

---

(*) Si l'on projette Φ d'un $S_{\pi-3}$ générique sur un S_3, on obtient une surface birationnellement identique dont l'équation est de la forme

$$f(x, y, z) \,.\, \varphi(x, y, z) + [\Psi(x, y, z)]^2 = 0, \tag{1}$$

la courbe projection de la courbe Γ_{11} envisagée étant découpée par la surface

$$f(x, y, z) = 0. \tag{2}$$

On peut toujours supposer le point double de cette courbe correspondant au point double envisagé situé à l'origine. L'origine est alors point simple pour les surfaces $f = 0$, $\Psi = 0$, mais n'appartient pas à la surface $\varphi = 0$. Les surfaces $f = 0$, $\Psi = 0$ sont tangentes en 0. Il est alors aisé de voir que les dérivées de z par rapport à x et à y, dans les équations (1) et (2), sont égales à l'origine jusqu'au troisième ordre. Réciproquement, en partant de cette hypothèse, on constate que les surfaces $f = 0$, $\Psi = 0$ se touchent à l'origine.

chaque point double infiniment voisin d'un point double uniplanaire est situé sur une seule des hypersurfaces.

15. Application aux involutions du type II. — Pour une involution I_8 du type II, on a

$$x_8 = 2, \qquad x_{41} = x_{42} = x_{43} = 1, \qquad x_2 = 0.$$

Les relations fonctionnelles (1), (2), (3) deviennent

$$\left.\begin{aligned} 2\Gamma_{01} + \Sigma(2a + 2a_1 + a_2 + a_3) + 2b_{20} + b_{21} + b_{22} + 2b_{30} \\ + b_{31} + b_{32} \equiv 2\Gamma, \end{aligned}\right\} \quad (1'')$$

$$\left.\begin{aligned} 2\Gamma_{02} + \Sigma(2a + a_1 + 2a_2 + a_3) + 2b_{30} + b_{31} + b_{32} + 2b_{10} \\ + b_{11} + b_{12} \equiv 2\Gamma, \end{aligned}\right\} \quad (2'')$$

$$\left.\begin{aligned} 2\Gamma_{03} + \Sigma(2a + a_1 + a_2 + 2a_3) + 2b_{10} + b_{11} + b_{12} + 2b_{20} \\ + b_{21} + b_{22} \equiv 2\Gamma. \end{aligned}\right\} \quad (3'')$$

Le long de chacune des courbes Γ_{01}, Γ_{02}, Γ_{03}, il y a une hyperquadrique circonscrite à Φ.

Les relations (4), (6), (8) deviennent

$$\left.\begin{aligned} 2\Gamma_{11} + \Sigma(2a + 2a_1 + a_2 + a_3) + 2(b_{10} + b_{11} + b_{12}) \\ + 2b_{20} + b_{21} + b_{22} + 2b_{30} + b_{31} + b_{32} \equiv 4\Gamma, \end{aligned}\right\} \quad (4'')$$

$$\left.\begin{aligned} 2\Gamma_{12} + \Sigma(2a + a_1 + 2a_2 + a_3) + 2(b_{20} + b_{21} + b_{22}) \\ + 2b_{30} + b_{31} + b_{32} + 2b_{10} + b_{11} + b_{12} \equiv 4\Gamma, \end{aligned}\right\} \quad (6'')$$

$$\left.\begin{aligned} 2\Gamma_{13} + \Sigma(2a + a_1 + a_2 + 2a_3) + 2(b_{30} + b_{31} + b_{32}) \\ + 2b_{10} + b_{11} + b_{12} + 2b_{20} + b_{21} + b_{22} \equiv 4\Gamma. \end{aligned}\right\} \quad (8'')$$

Le long de chacune des courbes Γ_{11}, Γ_{12}, Γ_{13}, il y a une hypersurface du quatrième ordre circonscrite à la surface Φ.

Si une surface normale de genres un, Φ, de l'espace S_π, est l'image d'une involution d'ordre huit et du type II, *appartenant à une surface de genres un,*

1° elle possède deux points doubles uniplanaires ordinaires et trois points doubles biplanaires singuliers (à chacun desquels est infiniment voisin un point double conique),

2° Il y a trois familles d'hyperquadriques circonscrites à la surface le long de courbes de genre $\pi - 2$. Les hyperquadriques *de ces trois familles passent par les points uniplanaires, chaque point double infiniment voisin d'un de ces points étant situé sur les hyperquadriques d'une seule famille. Les hyperquadriques de chaque famille passent par deux des trois points doubles biplanaires en y touchant la droite commune aux deux plans tangents,*

3° on peut trouver, de $\infty^{2\pi-3}$ *façons, des groupes de trois hypersurfaces du quatrième ordre, circonscrites à la surface et ayant, en* $2\pi - 3$ *points simples de celle-ci, des contacts du troisième ordre. Les trois hypersurfaces de chaque groupe passent par les cinq points doubles de la surface; chaque point double infiniment voisin d'un point uniplanaire est situé sur une seule des hypersurfaces. Une et une seule hypersurface d'un groupe touche, en deux points biplanaires, la droite commune aux deux plans tangents.*

16. Remarque. — Supposons qu'une surface algébrique F quelconque soit transformée en elle-même par deux transformations birationnelles de période quatre dont les carrés coïncident. Ces transformations engendrent, sur F, une involution d'ordre huit. Cette involution présentera, en général, des points de coïncidence double, quadruple, octuple en nombre fini ou infini. Si les points de coïncidence sont en nombre fini, ils pourront ne pas présenter les mêmes caractères que dans le cas où la surface est de genres un : par exemple, un point de coïncidence quadruple pourra avoir tous ses points infiniment voisins invariants pour une des transformations de période quatre. Nous remarquerons que, si les points de coïncidence de l'involution sont en nombre fini et présentent les mêmes caractères que si la surface était de genres un, les raisonnements faits plus haut (nos 1 à 13) subsistent. Il suffit de laisser tomber les relations entre les degré, genre et dimension d'un système linéaire et la relation

$$x_8 + 2(x_{41} + x_{42} + x_{43}) + 4x_2 = 8,$$

qui découlent du fait que la surface F est de genres un.