Bulletin de la Classe des sciences

Note sur les surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que trois points caractéristiques

Lucien Godeaux

Résumé

Examen de l'enveloppe des quadriques de Lie d'une surface lorsque ces quadriques n'ont que trois points caractéristiques.

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE PROJECTIVE

Note sur les surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que trois points caractéristiques

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie

Résumé. — Examen de l'enveloppe des quadriques de Lie d'une surface lorsque ces quadriques n'ont que trois points caractéristiques.

On sait que les quadriques de Lie d'une surface (x) ont en général cinq points caractéristiques dont le point x. Demoulin puis nous avons étudié le cas où les quadriques de Lie n'ont que deux points caractéristiques (1). Nous avons ensuite considéré le cas où ces quadriques n'ont que trois points caractériques (2). M. Rozet a ensuite démontré que ces surfaces dépendaient de cinq fonctions d'un argument (3). En utilisant nos résultats, M. Marcus a déterminé celles de ces surfaces dont une directrice de Wilczynski décıit une congruence parabolique (4). Nous reprenons cette question pour obtenir les résultats de notre première note et quelques autres par une méthode purement géométrique.

1. Soit (x) une surface non réglée rapportée à ses asymptotiques u, v. Représentons par U, V les points de l'hyperquadrique Q de Klein, de S_5, qui représentent les tangentes asymtotiques xx_u, xx_v

(1) Pour la bibliographie, voir notre exposé sur *La Théorie des surfaces et l'espace réglé* (Paris, Hermann, 1934).

(2) *Sur les surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que trois points caractéristiques* (Bulletin de la Société mathématique de France, 1929, pp. 26-41).

(3) *Sur le degré de généralité des surfaces dont les quadriques de Lie ont moins de cinq points caractéristiques* (Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique, 1932, pp. 70-703).

(4) *Sur les surfaces de Godeaux* (Analele Stiintifice ale Universitatii din Jasi, 1961, pp. 299-306).

en un point x de la surface (x). Les points U, V se correspondent dans une transformation de Laplace (Bompiani, Tzitzeica) et appartiennent à une suite de Laplace

$$\ldots, U^n, \ldots, U^1, U, V, V^1, \ldots, V^n, \ldots \qquad \text{(L)}$$

où chaque point est le transformé de Laplace du précédent dans le sens des u. Nous supposerons cette suite illimitée dans les deux sens.

La suite L est autopolaire par rapport à l'hyperquadrique Q. Rappelons que les points U^1, V^1 ne peuvent appartenir à Q.

Soient C^1, C^2 les points de rencontre de la droite U^1U^2 avec Q et D^1, D^2 ceux de V^1V^2. Ces points représentent les côtés du quadrilatère de Demoulin dont les sommets sont, avec le point x, les points caractéristiques de la quadrique de Lie Φ. Si l'on veut que ces quadriques n'aient que trois points caractéristiques, c'est-à-dire en dehors de (x) n'aient que deux points caractéristiques, il faut que les points C^1, C^2 coïncident, ou que les points D^1,D^2 coïncident. Nous supposerons pour fixer les idées que c'est le premier cas qui se présente. Dans ces conditions, la droite U^1U^2 est tangente à Q et le point de contact coïncide nécessairement avec U^2. Le point U^2 appartient donc à l'hyperquadrique Q. Ce point représente une droite r de l'espace de la surface (x).

Les points D^1, D^2 représentent deux droites d_1, d_2 qui rencontrent r aux points caractéristiques de la quadrique de Lie Φ.

Les droites U^2D^1 et U^2D^2 appartiennent à Q et représentent deux faisceaux de rayons ayant en commun la droite r.

2. Le plan $U^1U^2U^3$ tangent à Q au point U^2 est certainement distinct du plan $V^1V^2V^3$. Il rencontre l'hyperquadrique Q suivant deux droites r_1, r_2. Ces droites représentent deux faisceaux de rayons (R_1, ρ_1), (R_2, ρ_2) de sommets R_1, R_2 et de plans ρ_1, ρ_2. Ils contiennent la droite r, leurs sommets sont sur cette droite et leurs plans passent par cette droite.

Les deux modes de génératrices rectilignes de la quadrique Φ_1 sont représentés sur Q par les sections de cette hyperquadrique par les plans $U^1U^2U^3$ et $V^1V^2V^3$. Le premier de ces plans coupant Q suivant deux droites r_1, r_2, la quadrique Φ_1 est dégénérée en deux plans ρ_1, ρ_2 si on la considère comme quadrique-lieu, en deux gerbes de rayons de sommets R_1,R_2 si on la considère comme quadrique-enveloppe. La section de Q par le plan $V^1V^2V^3$ doit donc dégénérer en deux droites.

Modifions nos notations et représentons que D^{11}, D^{12} les sections de Q par la droite V^1V^2 et par D^{21}, D^{22} les sections de Q par la droite V^2V^3.

La section de Q par le plan $V^1V^2V^3$ dégénère en deux droites passant par les points D^{11}, D^{12} et par les points D^{21}, D^{22}. Nous supposerons que ce sont les droites $D^{11}D^{21}$ et $D^{12}D^{22}$.

Ces droites représentent deux faisceaux de rayons dont les plans coïncident avec ρ_1, ρ_2 et les sommets avec R_1, R_2.

Nous supposerons, pour fixer les idées, que le point D^{11} représente une droite d_{11} appartenant au plan ρ_1 et D^{12} une droite d_{12} appartenant au plan ρ_2. De plus, ces droites doivent passer par un des points R_1, R_2. Il en résulte que le point U^2 est l'intersection des droites $D^{11}D^{21}$, $D^{12}D^{22}$.

Par le point U^2 passent quatre droites appartenant à Q: les droites r_1, r_2 et les droites $D^{11}D^{21}$, $D^{12}D^{22}$. Les plans $U^1U^2U^3$ et $V^1V^2V^3$ ne rencontrent certainement pas Q en dehors de r_1, r_2 ou de $D^{11}D^{21}$, $D^{12}D^{22}$, mais les plans r_1D^{11}, r_1D^{12}, r_2D^{11}, r_2D^{12} appartiennent à Q. Nous pouvons supposer que le plan r_1D_{zz} représente le plan ρ_1 et que le plan r_1D^{12} représente la gerbe de sommet R_1. Dans ces conditions le plan r_2D_{zz} représente la gerbe de sommet R_2 et le plan r_2D^{12} le plan ρ_2. La droite $D^{11}D^{21}$ représente le faisceau (R_2, ρ_1) et la droite $D^{12}D^{22}$ le faisceau (R^1, ρ_2).

Le point U^2 appartenant au plan $V^1V^2V^3$, le point U^1 appartient au plan $V^2V^3V^4$ et le point U^2 au plan VV^1V^3.

3. La tangente en D^{11} à la ligne u tracée sur la surface (D^{11}) rencontre la droite VV^1 en un point qui ne peut appartenir à Q et la tangente à la ligne v rencontre la droite V^2V^3. D'autre part, le plan tangent en D^{11} à la surface (D^{11}) contient la droite $D^{11}U^2 = D^{11}D^{21}$. Ce plan coïncide donc avec le plan $D^{21}D^{11}D^{11}_u$ et il passe donc par le point D^{21}. La tangente à la ligne u en D^{11} coïncide avec la droite $D^{11}D^{21}$.

La tangente à la ligne v en D^{21} rencontre la droite V^3V^4 et la tangente à la ligne u rencontre la droite V^1V^2. Le plan tangent à (D^{21}) en D^{21} contient la droite $D^{21}D^{11}$ et coïncide donc avec le plan $D^{11}D^{21}D^{21}_v$. La tangente à la ligne v en D^{11} passe donc par D^{21}.

De tout ceci résulte que le transformé de Laplace de D^{11} dans le sens des v est le point D^{21} et le transformé de Laplace de ce dernier point dans le sens des u est le point D^{11}. Il en est de même des points D^{12}, D^{22}.

Il en résulte que le plan tangent $D^{11}D^{21}D^{11}_u$ touche Q le long de la droite $D^{11}D^{21}$ et que le plan $D^{11}D^{21}D^{21}_v$ touche également Q suivant la même droite.

4. Reprenons les points d'intersection des droites d_{11}, d_{12} avec la droite r, c'est-à-dire les points R_1, R_2, qui sont caractéristiques pour les quadriques de Lie Φ. Précisément, le point R_1 correspond à la droite d_{12} et aux droites du faisceau (R_1, ρ_2) correspondent les points de la droite $D^{12}D^{22}$. Le point D^{12} étant le transformé de Laplace de D^{22} dans le sens des u et D^{12} celui de D^{22} dans le sens des v, le point D^{12} représente la tangente en R_2 à la ligne des u sur la surface (R_1) et le point D^{22} la tangente à la ligne des v. On obtient des résultats analogues pour la surface (R_2) et par suite

Si les quadriques de Lie d'une surface n'ont que trois points caractéristiques, les lignes asymptotiques se correspondent sur les trois nappes de l'enveloppe.

5. Les génératrices rectilignes des deux modes de la quadrique de Lie Φ sont représentées que Q par les sections de cette hyperquadrique par les plans UU^1U^2 et VV^1V^2. Ces coniques et la quadrique Φ sont irréductibles. La section de Q par le plan UU^1U^2 passe par le point U^2 et la quadrique de Lie touche les plans ρ_1, ρ_2 respectivement en R_2, R_1.

Rappelons que nous avons démontré que les quadriques de Lie des surfaces (R_1), (R_2) n'ont que trois points caractéristiques (¹).

Les génératrices rectilignes de la quadrique Φ_2 sont représentées par les points des intersections de Q avec les plans $U^2U^3U^4$ et $V^2V^3V^4$. Ces sections et la quadrique Φ_2 sont irréductibles. La pıemière des coniques passe par le point U^2. Les quadriques Φ_2 n'ont que six points caractéristiques (au lieu de huit dans le cas général). Deux de ces points sont R_1, R_2 et les quadriques Φ_2 touchent respectivement en ces points les plans ρ_2, ρ_1.

(¹) *Sur les quadriques de Lie de certaines surfaces* (Bulletin de l'Académie royale de Belgique, 1929, pp. 943-952).

L'enveloppe des quadriques Φ, Φ_2 ont une partie commune, les surfaces (R_1), (R_2).

6. Les points D^{11} et D^{21} étant les transformés de Laplace l'un de l'autre, ils appartiennent à une suite de Laplace inscrite dans la suite L. On peut obtenir aisément la construction des points de cette suite.

Pour abréger les notations, posons $X = D^{11}$, $Y = D^{21}$

Lorsque l'on fait varier u, à la droite YU^2 correspond la droite XU^3 et d'autre part, la droite XX_u rencontre la droite VV^1. Comme U^3 appartient au plan VV^1V^2, les droites XX_u et VV^1 se rencontrent en un point X^1. Inversement, si l'on fait varier v, à la droite XU^3 correspond la droite YU^2 et la droite $X^1X^1_u$ doit rencontrer la droite V^1V^2. Ce ne peut être qu'au point X et par conséquent les points X et X^1 sont transformés de Laplace l'un de l'autre.

Le transformé de Laplace X^2 de X^1 dans le sens des u est le point d'intersection des droites XU^4 et VU. Celui X^3 de X^2 dans le même sens est l'intersection des droites X^2X^5 et UU^1. Et ainsi de suite. *Le point* X^n *est l'intersection des droites* $X^{n-1}U^{n+2}$ *et* $U^{n-3}U^{n-2}$.

Le même raisonnement montre que la transformée de Laplace Y^1 de Y dans le sens des v est l'intersection de la droite YU^1 avec la droite V^2V^3. Le transformé de Laplace Y^2 de Y^1 dans le sens des v est l'intersection des droites Y^1U et V^3V^4. Plus généralement *le point* Y^n *est l'intersection des droites* $Y^{n-1}U^{n-2}$ *et* $V^{n+1}V^{n+2}$.

On obtient des résultats analogues pour la suite de Laplace à laquelle appartiennent les points D^{12} et D^{22}.

On voit en outre que *les suites de Laplace associées aux surfaces* (R_1), (R_2) *sont inscrites dans la suite* L.

7. A la suite de Laplace L est attachée une ligne brisée L_1 formée des segments de droites joignant deux points consécutifs. De même à la suite L est attaché un polyèdre à faces triangulaires L_2 formé par les triangles ayant pour sommets les termes de points consécutifs de la suite.

Le point U^2 appartient au plan $V^1V^2V^3$. Par conséquent le point U^3 appartient au plan VV^1V^2, le point U^4 au plan UVV^1, le point U^n au plan $U^{n-4}U^{n-5}U^{n-6}$.

De même, le point U^1 appartient au plan $V^2V^3V^4$, le point U au plan $V^3V^4V^5$ et plus généralement le point U^n appartient au plan $V^{n+4}V^{n+5}V^{n+6}$.

On peut en résumé dire que le point V^n appartient au plan $V^{n+4}V^{n+5}V^{n+6}$ que n soit positif, nul ou négatif, à condition de remplacer V^{n-i} par U^{i-1} si $n < i$.

La ligne brisée L_1 *est inscrite dans le polyèdre à faces triangulaires* L_2.

Nous avons vu plus haut que le point U^2 appartient à la droite XY et que le point U^3 appartient à la droite XU^3. Il en résulte que la suite de Laplace L est incrite dans la suite de Laplace à laquelle appartiennent X, Y.

Revenant à nos anciennes notations, nous voyons que *la suite* L *est inscrite dans les suites auxquelles appartiennent les points* D^{11} *et* D^{21}, D^{12} *et* D^{22}, *ces deux suites étant à leur tour inscrites dans la suite* L.

Il y a là nous semble-t-il une configuration intéressante à signaler.

Liège, le 3 mars 1971.