ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE
Extrait des *Bulletins de la Classe des Sciences*, 5e série, t. XVI, nº 5.
Séance du 6 mai 1930, pp. 562-569

GÉOMÉTRIE

Remarques sur les surfaces desmiques du quatrième ordre,

par LUCIEN GODEAUX, professeur à l'Université de Liége.

Une surface du quatrième ordre est appelée surface desmique lorsqu'elle appartient à un faisceau comprenant trois surfaces dégénérées chacune en quatre plans. Ces surfaces ont été étudiées par G. Humbert [1]. Nous nous proposons d'ajouter, dans cette courte note, quelques compléments aux résultats obtenus par ce géomètre.

1. L'équation d'une surface desmique peut s'écrire, d'après G. Humbert,

$$a_1(x_1^2x_2^2+x_3^2x_4^2)+a_2(x_1^2x_3^2+x_2^2x_4^2)+a_3(x_1^2x_4^2+x_2^2x_3^2)=0, \qquad (1)$$

moyennant

$$a_1+a_2+a_3=0.$$

Les surfaces obtenues en supposant nulle, dans l'équation (1), une et une seule des quantités a_1, a_2, a_3, sont les surfaces dégénérées en quatre plans appartenant au faisceau représenté par l'équation (1).

Soit F une surface représentée par l'équation (1) où les quantités a_1, a_2, a_3 sont déterminées et différentes de zéro. Cette surface possède douze points doubles coniques, à savoir :

1° Les sommets O_1 (1, 0, 0, 0), O_2 (0, 1, 0, 0), O_3 (0, 0, 1, 0), O_4 (0, 0, 0, 1) du tétraèdre de référence;

---

[1] G. HUMBERT, Sur la surface desmique du quatrième ordre. (*Journal de Liouville*, 1891, pp 353-398.)

2° Les points A_1 $(-1, 1, 1, 1)$, A_2 $(1, -1, 1, 1)$, A_3 $(1, 1, -1, 1)$, A_4 $(1, 1, 1, -1)$, sommets d'un tétraèdre T_a ;

3° Les points B_1 $(1, 1, 1, 1)$, B_2 $(1, 1, -1, -1)$, B_3 $(1, -1, 1, -1)$, B_4 $(1, -1, -1, 1)$, sommets d'un tétraèdre T_b.

La surface F ne possède pas d'autres points singuliers et est par suite de genres un $(p_a = P_4 = 1)$.

L'inversion θ

$$x_1 x_1' = x_2 x_2' = x_3 x_3' = x_4 x_4' \tag{θ}$$

transforme la surface F en elle-même ; elle engendre donc sur cette surface une involution I_2, d'ordre deux, car on a $\theta^2 = 1$. L'inversion θ possède huit points unis, sommets des tétraèdres T_a, T_b et par suite les domaines de ces points, sur F, sont constitués par des points unis de l'involution I_2. En effet, à une droite passant par l'un de ces points, A_1 par exemple, θ fait correspondre une cubique gauche tangente à cette droite en A_1.

Si x est un point de F, x' son inverse, les points $\lambda x + \mu x'$ de la droite xx' appartenant à F sont donnés par $\lambda^2 \mu^2 = 0$. Par suite la droite xx' est tangente à la surface F aux points x et x'.

2. Représentons par X_{12}, X_{23}, X_{31}, X_{14}, X_{24}, X_{34} les coordonnées radiales d'une droite de l'espace. Nous avons

$$X_{12}X_{34} + X_{23}X_{14} + X_{31}X_{24} = 0. \tag{2}$$

En particulier, si la droite joint un point x à son inverse x', nous avons

$$\left.\begin{aligned} &\frac{X_{12}}{x_3 x_4 (x_1^2 - x_2^2)} = \frac{X_{23}}{x_1 x_4 (x_2^2 - x_3^2)} = \frac{X_{31}}{x_2 x_4 (x_3^2 - x_1^2)} \\ = &\frac{X_{14}}{x_2 x_3 (x_1^2 - x_4^2)} = \frac{X_{24}}{x_1 x_3 (x_2^2 - x_4^2)} = \frac{X_{3'}}{x_1 x_2 (x_3^2 - x_4^2)}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

et par suite

$$X_{12}X_{23}X_{31} + X_{31}X_{14}X_{34} + X_{12}X_{24}X_{14} + X_{23}X_{34}X_{24} = 0. \tag{4}$$

Ces droites forment donc un complexe cubique qui, comme on sait, est formé des génératrices rectilignes des quadriques circonscrites aux tétraèdres T_a, T_b.

D'autre part, il existe un système linéaire ∞^5 de surfaces du quatrième ordre passant par les arêtes du tétraèdre T et, simplement, par les sommets des tétraèdres T_a, T_b, dont chacune est sa propre inverse [1]. Ces surfaces, que nous désignerons par Φ, ont pour équation

$$\lambda_{12}x_3x_4(x_1^2-x_2^2)+\lambda_{23}x_1x_4(x_2^2-x_3^2)+\cdots+\lambda_{34}x_1x_2(x_3^2-x_4^2)=0,$$

c'est-à-dire

$$\lambda_{12}X_{12}+\lambda_{23}X_{23}+\cdots+\lambda_{34}X_{34}=0.$$

Les surfaces Φ découpent, sur F, un système linéaire de degré 16, composé au moyen de l'involution I_2. Par suite, si l'on rapporte projectivement les surfaces Φ aux hyperplans d'un espace linéaire S_5 à cinq dimensions, ce qui revient à interpréter les X_{ik} comme coordonnées de cet espace, aux couples de points inverses de l'espace correspondent les points de la variété V_3^6, à trois dimensions, d'ordre six, représentée par les équations (2) et (4); aux couples de points de l'involution I_2 correspondent les points d'une surface F' d'ordre huit, appartenant à la variété V_3^6 et à l'hyperquadrique

$$a_1X_{31}X_{24}-a_2X_{12}X_{34}=0. \tag{5}$$

L'équation de cette dernière s'obtient en supposant que, dans les équations (3), le point x satisfait à l'équation (1).

Aux gerbes de rayons de sommets O_1, O_2, O_3, O_4 correspondent sur l'hyperquadrique (2) des plans que nous désignerons par ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3, ϖ_4 respectivement. Le plan ϖ_1, par exemple, a pour équations

$$X_{23}=X_{24}=X_{34}=0$$

(1) L. Godeaux, Recherches sur les surfaces algébriques de genres zéro et de bigenre un. (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1926, pp. 726-741, 892-905; 1927, pp. 114-133.)

et appartient à la variété V_3^6 et à l'hyperquadrique (5). Par suite, l'intersection de la variété V_3^6 et de l'hyperquadrique (5) se compose de la surface F' et des quatre plans ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3, ϖ_4.

Aux gerbes de rayons de sommets A_i, B_i correspondent des plans α_i, β_i de l'hyperquadrique (2).

On sait que les huit plans α_1, α_2, α_3, α_4, β_1, β_2, β_3, β_4 appartiennent à la variété V_3^6, mais ils ne peuvent appartenir à l'hyperquadrique (5); ils sont rencontrés, par la surface F', chacun suivant une conique de diramation pour la correspondance (1, 2) entre F' et F.

3. Les surfaces Φ découpent, sur la surface F. des courbes C de degré seize et par suite de genre neuf, puisque F est de genres un. Chacune des ces courbes est sa propre inverse et θ engendre sur chacune d'elles une involution d'ordre deux. Les courbes C ont un point double en chacun des sommets des tétraèdres T_a, T_b. Sur chaque courbe C, l'involution d'ordre deux possède donc seize points doubles, deux dans le domaine du premier ordre de chacun des points unis de θ. Appliquant la formule de Zeuthen à la correspondance (2, 1) entre une courbe C et la section hyperplane homologue de F', on voit que cette dernière est de genre un. La surface F' représentant une involution appartenant à une surface régulière, elle est elle-même régulière. Ses sections hyperplanes étant elliptiques, elle est de plus rationnelle.

4, Les droites $x x'$ joignant deux points x, x' inverses appartenant à la surface F engendrent une congruence G représentée par la surface F' sur l'hyperquadrique (2).

Pour trouver la classe de la congruence G, considérons un plan quelconque ξ. L'inversion θ lui fait correspondre une surface cubique qui coupe en douze points la section (F, ξ) de F par ξ. En chacun de ces points la tangente à la courbe (F, ξ) touche cette courbe en un second point; mais ce point est aussi un des douze points trouvés; donc il y a six droites du plan ξ touchant F en deux points inverses. La congruence G est de classe six.

La surface F′ étant d'ordre huit, il y a huit droites de G s'appuyant sur deux droites gauches et par conséquent cette congruence est d'ordre deux.

5. Les courbes C découpées sur F par les surfaces Φ étant de genre neuf, le système complet $|C|$ est de dimension neuf. Pour trouver quelles sont les surfaces découpant sur F toutes les courbes C, considérons les surfaces du quatrième ordre Ψ ayant des points doubles en O_1, O_2, O_3, O_4. Ces surfaces forment un système linéaire complet $|\Psi|$ de dimension 18. Une surface Ψ est transformée par θ en une surface Ψ et il existe deux systèmes linéaires formés de surfaces Ψ transformées en elles-mêmes par θ. Les surfaces du premier système, que nous désignerons par Ψ_0, sont représentées par l'équation

$$\left.\begin{aligned} \lambda_{12}x_3x_4(x_1^2+x_2^2)+\cdots+\lambda_{34}x_1x_2(x_3^2+x_4^2)+\lambda x_1x_2x_3x_4 \\ +\lambda_1(x_1^2x_2^2+x_3^2x_4^2)+\lambda_2(x_1^2x_3^2+x_2^2x_4^2)+\lambda_3(x_1^2x_4^2+x_2^2x_3^2)=0; \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

les surfaces du second système, que nous désignerons par Ψ_1, sont représentées par l'équation

$$\left.\begin{aligned} \mu_{12}x_3x_4(x_1^2-x_2^2)+\cdots+\mu_{34}x_1x_2(x_3^2-x_4^2)+\mu_1(x_1^2x_2^2-x_3^2x_4^2) \\ +\mu_2(x_1^2x_3^2-x_2^2x_4^2)+\mu_3(x_1^2x_4^2-x_2^2x_3^2)=0. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Les surfaces Ψ_0 forment un système linéaire de dimension neuf, contenant les surfaces desmiques, n'ayant comme point-base que les sommets du tétraèdre T. Les surfaces Ψ_1, qui comprennent les surfaces Φ, forment un système linéaire de dimension huit, ayant comme points-base doubles les sommets du tétraèdre T, comme points-base simples les sommets des tétraèdres T_a, T_b [1].

[1] On voit aisément que l'inversion θ engendre, sur une surface Ψ_0, une involution en général dépourvue de points unis, de genres zéro et de bigenre un ($p_a=p_g=0$, $P_2=1$) et, sur une surface Ψ_1, une involution ayant huit points unis, de genres un ($p_a=P_4=1$).

Le système complet $|C|$ est découpé sur F par les surfaces Ψ passant par les sommets des tétraèdres T_a, T_b. Parmi ces surfaces se trouve la surface F elle-même. Le système $|C|$, ∞^9 sera défini par le système ∞^8, composé au moyen de l'involution I_2, découpé par les surfaces Ψ_1, et par la courbe découpée par une surface Ψ_0, distincte de F, passant par les points A, B. Un calcul simple montre que cette surface peut être représentée par l'équation (1), où a_1, a_2, a_3 ont des valeurs différentes de celles qui définissent la surface F, mais d'ailleurs quelconques. La courbe C découpée sur F par cette surface se compose des seize droites joignant chacun des points A_1, A_2, A_3, A_4 à chacun des points B_1, B_2, B_3, B_4.

Aux courbes C découpées sur F par les surfaces Ψ_1 correspondent sur F' des courbes elliptiques Γ, formant un système complet $|\Gamma|$ de dimension huit, dont font partie les sections hyperplanes de F'. Le système $|\Gamma|$ a le degré huit.

A la courbe C formée des seize droites $A_i\,B_k$ correspondent, sur F', des points simples de cette surface. A la droite $A_i\,B_k$, par exemple, correspond le point commun aux plans α_i, β_k et à celui des plans ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3, ϖ_4 qui correspond au sommet du tétraèdre T situé sur la droite $A_i\,B_k$ envisagée. Appelons en effet O ce sommet du tétraèdre T. Les surfaces Φ contenant la droite $A_i\,B_k$ sont en nombre ∞^4; deux de ces surfaces ont en commun une courbe (variable) d'ordre neuf, passant par les sommets de T, par les sommets de T_a, T_b excepté A_i, B_k, et s'appuyant en deux points sur $A_i\,B_k$ en dehors de O. Cette courbe d'ordre neuf coupe F en 14 points variables; par suite les espaces à trois dimensions de S_5 passant par le point commun aux plans α_i, β_k coupent F' en sept points en dehors de ce point; d'où la propriété énoncée.

6. On peut obtenir une représentation plane de la surface F' de la manière suivante :

Les quadriques

$$\lambda_1(x_1x_2 + x_3x_4) + \lambda_2(x_1x_3 + x_2x_4) + \lambda_3(x_1x_4 + x_2x_3) = 0 \qquad (8)$$

sont transformées en elles-mêmes par θ; elles passent par les sommets des tétraèdres T, T_a. Comme l'a remarqué G. Humbert, parmi ces quadriques, il y a en ∞^1 qui touchent la surface F le long de biquadratiques C', formant un faisceau. Chaque courbe C' est sa propre inverse et il lui correspond, sur F', une conique Γ' variable dans un faisceau.

De même, parmi les quadriques, passant par les sommets des tétraèdres T, T_b,

$$\mu_1 (x_1 x_2 - x_3 x_4) + \mu_2 (x_1 x_3 - x_2 x_4) + \mu_3 (x_1 x_4 - x_2 x_3) = 0, \qquad (9)$$

transformées en elles-mêmes par θ, il y en a ∞^1 touchant F le long de biquadratiques C'' formant un faisceau. A celui-ci correspond sur F' un faisceau de coniques $|\Gamma''|$.

Une courbe C' et une courbe C'' ont en commun deux points variables formant un groupe de l'involution I_2; par suite les coniques Γ' coupent les coniques Γ'' en un point.

Etablissons une projectivité entre les coniques de $|\Gamma'|$ et les droites d'un plan σ passant par un point S_1 et une projectivité entre les coniques du faisceau $|\Gamma''|$ et les droites de σ passant par un point S_2. Nous avons ainsi établi une correspondance birationnelle entre la surface F' et le plan σ. Il est aisé de voir qu'aux courbes Γ de F' correspondent les courbes du quatrième ordre de σ ayant des points doubles en S_1, S_2. Aux coniques de F' contenues dans les plans α_1, α_2, α_3, α_4 correspondent quatre droites de σ passant par S_2 et aux coniques de F' contenues dans les plans β_1, β_2, β_3, β_4 correspondent quatre droites de σ passant par S_1. Parmi les quadriques (8) touchant la surface F le long d'une courbe C', il y en a une, par exemple, qui passe par B_1 et qui est un cône de sommet B_1 passant par les droites $B_1 A_1$, $B_1 A_2$, $B_1 A_3$, $B_1 A_4$; la conique Γ' correspondante est la conique de F' située dans β_1 et il lui correspond une droite de σ passant par S_1.

7. Les tétraèdres T, T_a, T_b jouent, vis-à-vis de la surface F′, des rôles symétriques. Par suite F′ est transformée en elle-même par des inversions θ_a, relative au tétraèdre T_a, et θ_b, relative au tétraèdre T_b, possédant les mêmes propriétés que θ. D'ailleurs, on peut remarquer que l'homologie harmonique de centre A_1 et de plan

$$x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0,$$

par exemple, change F en elle-même, le tétraèdre T en T_b et θ en θ_b. De même, l'homologie harmonique de centre B_1 et de plan

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

change F en elle-même, T en T_a et θ en θ_a. Par suite :

Une surface desmique du quatrième ordre est transformée en elle-même par trois inversions engendrant des involutions rationnelles du second ordre sur cette surface. La droite joignant deux points inverses est tangente à la surface en ces points et engendre une congruence d'ordre deux et de classe six.

Les trois congruences ainsi obtenues avaient d'ailleurs été rencontrées par G. Humbert d'une autre manière (1).

(1) L'équation (5) montre que chacune des trois congruences appartient à un complexe tétraédral.

Liége, le 9 mars 1930.

Marcel HAYEZ, imprimeur de l'Académie royale de Belgique
Rue de Louvain, 112, Bruxelles