ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE
Extrait des *Bulletins de la Classe des Sciences*, 5e série, t. XVI, no 5.
Séance du 6 mai 1930, pp. 570-575.

GÉOMÉTRIE. — Sur le complexe lieu des droites appartenant aux quadriques d'un réseau,

par LUCIEN GODEAUX, professeur à l'Université de Liége.

On sait que le lieu des droites appartenant aux quadriques Q d'un réseau $|Q|$ ayant huit points-base est un complexe Σ du troisième ordre (1). Les huit points-base du réseau sont des points principaux du complexe Σ et, en général, celui-ci ne possède pas d'autre point principal. Cependant, le complexe Σ relatif au réseau de quadriques

$$\lambda_1(x_1^2 - x_4^2) + \lambda_2(x_2^2 - x_4^2) + \lambda_3(x_3^2 - x_4^2) = 0$$

possède douze points principaux (2). Nous nous proposons d'examiner dans cette note dans quels cas le complexe Σ possède plus de huit points principaux, les points-base du réseau $|Q|$ étant supposés être au nombre de huit (3).

1. Commençons par rappeler quelques propriétés du complexe Σ.

Les bisécantes d'une biquadratique gauche, intersection de deux quadriques du réseau $|Q|$, appartiennent au complexe Σ. Le cône du complexe ayant pour sommet un point P est le

---

(1) REYE, *Geometrie der Lage*, Bd. III. — R. STURM, *Journal de Crelle*, t. LXX; *Mathem. Annalen*, t. VI. — MONTESANO, Su di un complesso di rette del terzo grado. (*Memorie della R. Accad. di Bologna*, 1893.) — J. NEUBERG, Sur le complexe de Grassmann. (*Mathesis*, 1902.)

(2) G. HUMBERT, Sur la surface desmique du quatrième ordre. (*Journal de Mathématiques de Liouville*, 1891.)

(3) Nous avons considéré le complexe Σ dans nos « Recherches sur les surfaces algébriques de genres zéro et de bigenre un ». (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1926, pp. 726-741, 892-904; 1927, pp. 114-133.)

cône projetant, de ce point, la biquadratique gauche, base du faisceau des quadriques Q passant par le point P.

Le lieu des sommets des cônes appartenant au réseau $|Q|$ est en général une courbe C_6 du sixième ordre et de genre trois, ne passant pas par les points-base de $|Q|$.

Si le réseau $|Q|$ a pour équation

$$\lambda_1\varphi_1(x_1, x_2, x_3, x_4) + \lambda_2\varphi_2 + \lambda_3\varphi_3 = 0,$$

où φ_1, φ_2, φ_3 sont des formes du second degré, la courbe C_6 a pour équations

$$\left\| \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_1} \ \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_2} \ \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_3} \ \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_4} \right\| = 0, \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Nous désignerons par A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4 les huit points-base, supposés distincts, du réseau $|Q|$.

2. Supposons que le complexe Σ possède un point principal R_1, distinct des points-base du réseau $|Q|$. Alors, chacune des ∞^1 quadriques Q passant par R_1 doit contenir ∞^1 droites passant par ce point et ces quadriques sont donc des cônes de sommet R_1.

Le réseau $|Q|$ peut être défini par deux cônes de sommet R_1 et par une quadrique ne passant pas par R_1. Soit ρ_1 le plan polaire de ce point par rapport à cette dernière quadrique. Le plan polaire de R_1 par rapport à une quadrique quelconque du réseau $|Q|$ coïncide avec ρ_1.

Désignons par $|Q_1|$ le faisceau de cônes de sommet R_1 appartenant à $|Q|$. Ce faisceau possède quatre droites-base, chacune d'elles contenant deux points-base de $|Q|$. Nous supposerons que les droites A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4 passent par R_1.

Le faisceau $|Q_1|$ contient trois quadriques dégénérées en deux plans. La courbe C_6 est composée des trois droites communes à ces couples de plans et de la jacobienne du réseau de coniques découpé par le réseau $|Q|$ sur le plan ρ_1. Cette courbe, du troisième ordre, s'appuie sur les trois droites en question [1].

Supposons que le complexe Σ possède un dixième point principal R_2. Ce point est le sommet de cônes d'un faisceau $|Q_2|$ appartenant à $|Q|$. Les faisceaux $|Q_1|$, $|Q_2|$ ont en commun un cône nécessairement dégénéré en deux plans passant par la droite $R_1 R_2$. De plus, le point R_2 doit appartenir au plan ρ_1.

Désignons par R'_2, R'_3, R'_4 les points de rencontre du plan ρ_1 avec les droites doubles des quadriques Q qui sont des cônes Q_1 dégénérés. Si Σ possède un dixième point principal R_2, celui-ci coïncide donc avec l'un des trois points R'_2, R'_3, R'_4. Cela étant, considérons un réseau $|Q|$ défini par deux cônes de sommet R_1 et par une quadrique non conique passant par R'_2, R'_3, R'_4 [2]. Le complexe Σ lieu des droites appartenant aux quadriques de ce réseau possède les neuf points principaux A_1, ... B_4, R_1 et n'en possède pas d'autre. Par suite :

Il existe des complexes Σ possédant neuf points principaux et seulement neuf.

3. Reprenons l'hypothèse d'un dixième point principal R_2 de Σ, coïncidant avec R'_2. Le point R_2 a même plan polaire ρ_2 par rapport à toutes les quadriques du réseau $|Q|$ et ce plan passe par les points R_1, R'_3, R'_4.

Les points-base du réseau $|Q|$ se partagent en quatre couples de points situés sur des droites passant par R_2. Pour fixer les

---

(1) MONTESANO, *loc. cit.*

(2) La quadrique considérée doit nécessairement être tangente aux droites

$$R_1R'_2,\ R_1R'_3,\ R_1R'_4 \quad \text{en} \quad R'_2,\ R'_3,\ R'_4$$

respectivement, puisque le plan polaire de R_1 par rapport à cette quadrique doit être

$$\rho_1 = R'_2\ R'_3\ R'_4.$$

idées, nous supposerons que les droites A_1B_2, A_2B_1, A_3B_4 et A_4B_3 passent par R_2.

Le faisceau $|Q_2|$ contient trois cônes dégénérés en deux plans. L'un de ceux-ci est formé de deux plans passant par R_1R_2 et appartient également au faisceau $|Q_1|$. Soient R_3'', R_4'' les points où les droites doubles des deux autres cônes coupent le plan ρ_2. Les droites $R_3''R_2$, $R_4''R_2$ appartiennent au plan ρ_1 et les points R_3'', R_4'', de même que les points R_3', R_4', appartiennent à la droite $\rho_1\rho_2$.

La courbe C_6 se compose actuellement des droites R_1R_2, R_1R_3', R_1R_4', R_2R_3'', R_2R_4'' et d'une sixième droite qui est précisément la droite $\rho_1\rho_2$. Soit, en effet, P un point quelconque de cette droite. Par P passe un cône Q_1 tangent au plan R_1R_2P le long de R_1P, puisque ρ_2 est le plan polaire de R_2 par rapport à ce cône. De même, par P passe un cône Q_2 tangent au plan R_1R_2P le long de R_2P. Il en résulte que les quadriques Q passant par P touchent le plan R_1R_2P en P ; par suite, parmi ces quadriques se trouve un cône de sommet P.

Supposons que le complexe Σ possède un onzième point principal. Il est le sommet des cônes d'un faisceau appartenant à $|Q|$ et il appartient à la droite double d'un cône Q_1 dégénéré et d'un cône Q_2 dégénéré. Si ce point n'appartient pas à la droite R_1R_2, il doit coïncider, d'une part, avec l'un des points R_3', R_4', d'autre part, avec l'un des points R_3'', R_4''. Le onzième point principal ne peut appartenir à la droite R_1R_2, car alors le plan ρ_1 passerait par cette droite et R_1 serait un point-base du réseau $|Q|$, contrairement à l'hypothèse.

Cela étant, remarquons que l'on peut construire un réseau de quadriques $|Q|$ pour lequel les points R_3', R_4', R_3'', R_4'' sont distincts. Considérons, par exemple, le réseau

$$\lambda_1(x_2^2-x_3^2)+\lambda_2(x_3^2-x_4^2)+\lambda_3(x_3x_4-x_1^2)=0. \qquad (1)$$

Les points $R_1\,(1,0,0,0)$, $R_2\,(0,1,0,0)$ sont les sommets de ∞^1 cônes appartenant au réseau $|Q|$. Les plans ρ_1, ρ_2 ont respectivement pour équations $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. Les points R'_3, R'_4 ont respectivement pour coordonnées $(0, 0, 1, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$, et les points R''_3, R''_4, respectivement $(0, 0, i, 1)$, $(0, 0, i, -1)$. Par suite :

Il existe des complexes Σ possédant dix points principaux et seulement dix.

4. Envisageons maintenant l'hypothèse de l'existence d'un onzième point principal R_3 du complexe Σ; d'après ce qu'on vient de voir, R_3 coïncide avec l'un des points R'_3, R'_4 et avec l'un des points R''_3, R''_4, par exemple avec R'_3, R''_3.

Le point R_3 a même plan polaire ρ_3 par rapport à toutes les quadriques du réseau $|Q|$. Le plan ρ_3 passe par les droites $R_1 R_2$, $R_1 R'_4$, $R_2 R''_4$ et par suite les points R'_4, R''_4 coïncident en un point R_4.

Les quadriques Q passant par R_3 forment un faisceau de cônes $|Q_3|$ de sommet R_3. Parmi ces cônes, il y en a trois dégénérés en deux plans. Un de ces cônes dégénérés appartient au faisceau $|Q_1|$ et a comme droite double $R_1 R_3$; un second appartient au faisceau $|Q_2|$ et a comme droite double $R_2 R_3$; le troisième a une droite double qui doit appartenir aux plans ρ_1, ρ_2 et qui, par suite, coïncide avec la droite $\rho_1 \rho_2 = R_3 R_4$. Il en résulte que les quadriques Q passant par R_4 sont des cônes formant un faisceau $|Q_4|$, ces cônes ayant pour sommet R_4. Par suite R_4 est un point principal du complexe Σ. La courbe C_6 est actuellement formée des six arêtes du tétraèdre $R_1 R_2 R_3 R_4$.

Si un complexe Σ possède onze points principaux, il en possède un douzième.

5. Les huit points-base du réseau $|Q|$ se distribuent par couples sur quatre droites passant par R_1, sur quatre droites passant par R_2, sur quatre droites passant par R_3 et enfin sur quatre droites passant par R_4. Supposons que les droites $A_1 B_3$, $A_1 B_4$ passent respectivement par R_3, R_4.

Nous avons supposé que $A_2 B_2$ passait par R_1, $A_2 B_1$ par R_2. De plus, d'après les notations introduites plus haut, les quadriques dégénérées du faisceau $| Q_1 |$ sont

$$A_1A_2B_1B_2 + A_3A_4B_3B_4, \quad A_1A_3B_1B_3 + A_2A_4B_2B_4, \quad A_1A_4B_1B_4 + A_2A_3B_2B_3, \qquad (1)$$

et celles du faisceau $| Q_2 |$,

$$A_1A_2B_1B_2 + A_3A_4B_3B_4, \quad A_1A_3B_2B_4 + A_2A_4B_1B_3, \quad A_1A_4B_2B_3 + A_2A_3B_1B_4. \qquad (2)$$

Puisque les points A_1, B_3, R_3 sont en ligne droite, le point R_3 doit appartenir à la seconde des quadriques (1) et à la troisième des quadriques (2). De même, le point R_4 appartient à la troisième des quadriques (1) et à la seconde des quadriques (2). La seconde des quadriques (2) ne pouvant passer par R_3, la droite $A_2 R_3$ passe par B_4. De même, $A_2 R_4$ passe par B_3. On en conclut que les cônes dégénérés appartenant au faisceau $| Q_3 |$ sont

$$A_1A_2B_3B_4 + A_3A_4B_1B_2, \quad A_1A_3B_1B_3 + A_2A_4B_2B_4, \quad A_1A_4B_2B_3 + A_2A_3B_1B_4$$

et que ceux qui appartiennent au faisceau $| Q_4 |$ sont

$$A_1A_2B_3B_4 + A_3A_4B_1B_2, \quad A_1A_3B_2B_4 + A_2A_4B_2B_4, \quad A_1A_4B_1B_4 + A_2A_3B_2B_3.$$

Il est aisé de voir que les droites $A_3 B_1$, $A_4 B_2$ passent par R_3 et les droites $A_3 B_2$, $A_4 B_1$, par R_4. On reconnaît que les douze points A, B, R forment la configuration rencontrée par G. Humbert dans ses recherches sur les surfaces desmiques (*loc. cit.*).

Il est évident que le complexe Σ ne peut posséder un treizième point principal; donc :

Les complexes Σ possèdent huit, neuf, dix ou douze points principaux [1].

---

[1] Ces complexes sont signalés par M. Montesano dans son mémoire cité.

Liége, le 1er avril 1930.

Marcel Hayez, imprimeur de l'Académie royale de Belgique
Rue de Louvain, 112, Bruxelles