GÉOMÉTRIE.

Sur les courbes fondamentales des transformations birationnelles de l'espace,

par LUCIEN GODEAUX, professeur à l'Université de Liége.

Considérons une transformation birationnelle θ de l'espace et soient F les surfaces qui correspondent aux plans. Les surfaces F forment un système homaloïdal $|F|$ et les points-base de ce système sont les points fondamentaux de la transformation θ. Habituellement, lorsqu'on traite des transformations birationnelles de l'espace, on suppose que les surfaces F ont, en un point-base du système $|F|$, des tangentes variables avec la surface. Nous avons cherché, dans ce travail, à nous affranchir de cette restriction.

Les points-base du système $|F|$ peuvent se ranger en deux catégories. Une courbe-base du système $|F|$ est une courbe commune à toutes les surfaces F. Nous appellerons point-base isolé du système $|F|$ un point appartenant à toutes les surfaces F, isolé au sens ordinaire du mot, ou bien appartenant à une ou plusieurs courbes-base, les surfaces F n'ayant pas en ce point la singularité qu'elles ont en un point générique de cette ou de ces courbes-base. On aura ainsi à considérer les courbes fondamentales et les points fondamentaux isolés de la transformation θ. Nous ne considérons dans ce travail que les courbes fondamentales; les points fondamentaux isolés feront l'objet d'un second travail.

En un point d'une courbe-base du système homaloïdal $|F|$, les surfaces F peuvent avoir tous leurs plans tangents variables, ou une partie de ces plans variables, ou tous ces plans fixes.

Le premier cas a été traité par Cremona, Cayley et Nœther dans leurs travaux classiques sur les transformations birationnelles; M. Montesano, dans un travail cité plus loin, a apporté récemment un complément essentiel à la question. Pour plus de clarté dans notre exposé, nous avons repris brièvement ce premier cas. Dans les deuxième et troisième cas, nous avons introduit une hypothèse restrictive ; nous avons supposé que, Γ étant la courbe-base du système $|F|$ envisagée, les surfaces F possédaient une seule courbe multiple dans le domaine du premier ordre de Γ. D'une manière plus précise, nous avons, dans le second cas, supposé que les surfaces F possédaient une courbe F multiple d'ordre s, une courbe Γ_0, infiniment voisine de Γ, multiple d'ordre s_1 et $s - s_0 - s_1$ courbes simples, infiniment voisines successives de $\Gamma_0 (s_0 < s, \ s_1 \leq s - s_0)$. Nous avons plus particulièrement considéré le cas où l'on a $s_1 = s - s_0$. Dans le troisième cas, nous avons supposé que les surfaces F possédaient la courbe Γ multiple d'ordre s, la courbe Γ_0, infiniment voisine de Γ, multiple d'ordre s_1 $(s_1 \leq s)$, $s - s_1$ courbes simples, infiniment voisines successives de Γ_0.

On sait que dans le premier cas une courbe est dite fondamentale de première espèce si elle est rencontrée en des points variables par les courbes transformées des droites de l'espace, fondamentale de seconde espèce dans le cas opposé. Nous avons étendu ces dénominations aux cas que nous avons considérés ici, en leur donnant le même sens.

1. Soit, dans un espace Σ, $|F|$ un système linéaire homaloïdal (c'est-à-dire de degré un) de surfaces F d'ordre n. En rapportant projectivement les surfaces F aux plans d'un second espace Σ', nous établissons, entre Σ et Σ', une correspondance birationnelle θ. Aux plans de l'espace Σ correspondent, dans l'espace Σ', des surfaces F' d'un certain ordre n', formant un système homaloïdal $|F'|$. Aux droites de Σ' correspondent des courbes C de Σ, intersections variables des surfaces F; les courbes C sont d'ordre n'. De même, aux droites de Σ correspondent, dans Σ', des courbes C' d'ordre n, intersections variables des surfaces F'.

2. Soit Γ une courbe-base du système $|F|$, d'ordre ν, multiple d'ordre s pour les surfaces F. En un point générique A de Γ, une surface F a s plans tangents; trois hypothèses peuvent être faites :

1° Les s plans tangents sont tous variables avec la surface F;

2° $s_0 < s$ de ces plans tangents sont variables avec les surfaces F, les $s - s_0$ autres restant fixes;

3° Les s plans tangents sont tous fixes.

Nous nous placerons successivement dans ces trois hypothèses.

Envisageons la première hypothèse. Soient A un point générique de la courbe Γ, a la tangente en ce point à cette courbe, α un plan passant par a, et p une droite du plan α, passant par A mais distincte de a. Les surfaces F passant par un point P de la droite p forment un réseau et il leur correspond, dans Σ', les plans d'une gerbe dont le sommet P' est bien déterminé et est l'homologue de P dans la transformation θ. Lorsque le point P tend vers A sur la droite p, le réseau des surfaces F passant par P a pour limite le réseau des surfaces F tangentes à p en A, c'est-à-dire tangentes au plan α en ce point. Dans la projectivité existant entre les surfaces F et les plans de Σ', aux surfaces de ce réseau correspondent les plans d'une gerbe bien déterminée dont le sommet A' est la limite du point P'.

Lorsque le plan α décrit le faisceau d'axe a, le point A' décrit une courbe Γ'. Lorsque le point A parcourt la courbe Γ, deux cas peuvent se présenter :

a) La courbe Γ' varie et engendre une surface Δ';

b) La courbe Γ' reste fixe.

Plaçons-nous dans le premier cas. Entre les points de Γ et les courbes Γ' de la surface Δ', il y a une correspondance birationnelle. Aux points infiniment voisins d'un point générique A de Γ correspondent les points de la courbe Γ' homologue; par suite, aux plans passant par ce point A correspondent dans Σ' les surfaces F' contenant cette courbe Γ'. Ces surfaces F' forment un réseau et celui-ci coïncide avec le réseau formé par les surfaces F' passant par un point de la courbe Γ' considérée, en dehors des points-base de $|F'|$. Par suite, les surfaces F' passant par un point d'une courbe Γ' distinct des points-base de $|F'|$ contiennent entièrement cette courbe.

La courbe Γ étant d'ordre ν, une surface F' contient ν courbes Γ' et ces ν courbes forment, avec la base du système $|F'|$, l'intersection complète de la surface Δ' et de la surface F' considérée.

Considérons un point A' de la surface Δ', distinct des points-base de $|F'|$. Supposons qu'il puisse passer par ce point A' deux courbes Γ', soient Γ'_1, Γ'_2. Alors, si A_1, A_2 sont les points de Γ homologues des courbes Γ'_1, Γ'_2, au point A' correspondraient dans Σ des points distincts, infiniment voisins de A_1, A_2, ce qui n'est possible que si A' est fondamental pour la transformation θ. Le point A' serait donc un point-base de $|F'|$, contrairement à l'hypothèse. Par suite, sur la surface Δ', les courbes Γ' forment un faisceau.

Soit p' une droite de Σ' ne passant par aucun point-base de $|F'|$. Considérons un des points A' où p' rencontre Δ', la courbe Γ' passant par ce point et le point A de Γ qui lui est homologue. Nous avons vu qu'aux surfaces F tangentes en A à un plan α passant par la tangente a à Γ correspondaient les plans d'une gerbe de Σ' ayant pour sommet un point de Γ'. Supposons qu'inversement aux plans passant par A' correspondent dans Σ des surfaces F ayant, en A, un certain nombre $\lambda\,(\geq 1)$ de plans tangents $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\lambda$ fixes. Soit β un plan passant par A, non tangent à la courbe Γ en ce point.

Les courbes découpées sur β par deux surfaces F quelconques ont en A la multiplicité s et par suite s^2 points d'intersection. Au contraire, les courbes découpées sur β par deux surfaces F correspondant à des plans passant par A' ont au moins $s^2 + \lambda$ points d'intersection absorbés en A. Il en résulte que la droite p' rencontre, en dehors de A', les surfaces F' transformées des plans passant par A, en $n' - \lambda$ points au plus. En d'autres termes, la courbe Γ' envisagée a la multiplicité λ au moins pour ces surfaces F'. D'après un théorème de M. Bertini (*), un système linéaire irréductible de surfaces $|F'|$ ne peut avoir de courbes multiples variables; par suite les courbes Γ' doivent être simples pour les surfaces F' et l'on a $\lambda = 1$. Aux plans passant par un point de Δ' correspondent donc des surfaces F ayant un plan tangent fixe en un point de la courbe Γ.

Si δ' est l'ordre de la surface Δ', les courbes C transformées des droites de Σ' s'appuient en δ' points variables sur la courbe F. Cette courbe est donc fondamentale de première espèce pour la transformation θ et la surface Δ' est la surface fondamentale correspondante.

A une droite p de Σ s'appuyant en un point A sur la courbe Γ correspond dans Σ' une courbe C' dégénérée en une courbe C'_1, d'ordre $n - s$, variable avec la droite p dans la gerbe de sommet A, et en la courbe Γ' homologue de A. Cette courbe Γ' est rencontrée par la courbe C'_1 au point A' homologue du plan tangent aux surfaces F en A contenant p. On en conclut que les courbes Γ' sont d'ordre s. De plus, ces courbes sont rationnelles.

3. Le second cas, où la courbe Γ' est fixe quelle que soit la position du point A sur la courbe Γ, a été l'objet d'une

(*) E. Bertini, *Sui sistemi lineari* (Rend. R. Ist. Lomb., 1880). *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi*, p. 227. (Pisa, Spoerri, 1907.)

étude récente de M. Montesano (*); nous indiquerons brièvement ici les raisonnements faits par ce géomètre.

Aux plans de Σ' passant par un point A' de Γ' correspondent des surfaces F, formant un réseau, ayant en chaque point A de Γ un certain nombre $\lambda\ (\geq 1)$ de plans tangents fixes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\lambda$. Lorsque le point A' parcourt la courbe Γ', le groupe de λ plans tangents fixes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\lambda$, en chaque point de Γ, engendre une involution g^1_λ d'ordre λ et de dimension un, dans le faisceau des plans tangents à Γ au point A. Si ν' est l'ordre de la courbe Γ', une surface F possède, en chaque point de Γ, $\lambda\nu' = s$ plans tangents. Considérons une droite p' s'appuyant en A' sur la courbe Γ'. Aux plans passant par p' correspondent des surfaces F, formant un faisceau, se raccordant suivant λ nappes le long de Γ; en d'autres termes, ces surfaces F ont en commun λ courbes simples infiniment voisines de Γ. Par conséquent, à la droite p' correspond une courbe C formée de ces λ courbes et d'une courbe C_1, d'ordre $n' - \lambda\nu$, variable en même temps que p' dans la gerbe de sommet A'. Il en résulte que les droites p' passant par A' rencontrent les surfaces F', en dehors de ce point, en $n' - \lambda\nu$ points et que la courbe Γ' est multiple d'ordre $\lambda\nu$ pour les surfaces F'. La courbe Γ' est donc une courbe-base du système $|F'|$ et par suite une courbe fondamentale de la transformation θ.

Aux points infiniment voisins d'un point A de Γ correspondent les points de la courbe Γ'. Celle-ci n'est pas rencontrée en général par une droite de Σ'; donc les courbes C ne peuvent s'appuyer qu'en des points fixes sur la courbe Γ et ces points d'appui ont, pour les surfaces F, une singularité différente de celle d'un point générique A de la courbe Γ. Cette courbe est donc fondamentale de seconde espèce par θ.

(*) D. Montesano, *Sulla teoria generale delle corrispondenze birazionali dello spazio* (Rend. R. Accad. Lincei, 1° sem. 1918, pp. 396-400, 438-441; 2° sem. 1921, pp. 447-451).

Reprenons la droite p' s'appuyant en un point A' sur la courbe Γ' et la courbe C_1 d'ordre $n' - \lambda\nu$ qui lui correspond dans Σ. Les surfaces F homologues des plans de Σ' ne passant pas par A' rencontrent C_1 en un point variable, mais les surfaces F qui correspondent aux plans passant par A' ne rencontrent plus C_1 en dehors des points-base de $|F|$. Par suite la courbe C_1 doit s'appuyer en un certain point A sur la courbe Γ et les surfaces F homologues des plans passant par A' doivent être tangentes à C_1 en A. Dans la correspondance birationnelle entre la courbe C_1 et la droite p'; les points A et A' sont homologues. Considérons un point P' de la droite p'; aux surfaces F' passant par P' correspondent, dans Σ, des plans passant par un point P de C_1. Lorsque le point P' tend vers A' sur la droite p', le point P tend vers A sur la courbe C_1. Le réseau des surfaces F' passant par P' a pour limite le réseau des surfaces F' tangentes à p' en A', c'est-à-dire tangentes en A' au plan α' tangent à Γ' en A' et contenant p'. Lorsque le plan α' varie dans le faisceau des plans tangents à Γ' en A', le point A décrit la courbe Γ et lorsque le point A' parcourt la courbe Γ', cette courbe Γ reste nécessairement fixe. On en conclut que la courbe Γ' est également une courbe fondamentale de seconde espèce pour la transformation θ.

En répétant le raisonnement fait plus haut et en supposant qu'aux plans passant par le point A de Γ correspondent des surfaces F' ayant, en chaque point A' de Γ', λ' plans tangents fixes, on voit que la courbe Γ' est multiple d'ordre $\lambda'\nu$ pour les surfaces F' et qu'on a donc $\lambda = \lambda'$.

Les courbes fondamentales de seconde espèce des transformations birationnelles de l'espace ont été rencontrées par Cremona (*) dans le cas $\lambda = 1$. M. Montesano, dans les notes citées plus haut, est parvenu à construire des transformations

(*) Cremona, *Sulle trasformazioni razionali nello spazio* (Annali di Matematica, 1871, 2e série, t. I, pp. 131-162; Opere Matematiche, 1917, t. III, pp. 298-325).

birationnelles ayant des courbes fondamentales de seconde espèce pour lesquelles λ est quelconque.

Si le système homaloïdal $|F|$ *possède une courbe-base* Γ *d'ordre* ν *en chaque point de laquelle les surfaces* F *ne possèdent que des plans tangents variables :*

1° *Aux points infiniment voisins d'un point générique* A *de* Γ *correspondent les points d'une courbe* Γ' *dont l'ordre est égal à la multiplicité de* Γ *pour les surfaces* F *et qui engendre, lorsque* A *parcourt* Γ, *une surface. Les courbes* C *s'appuient en des points variables sur la courbe* Γ *et celle-ci est une courbe fondamentale de première espèce pour la transformation* θ;

2° *Ou bien aux points infiniment voisins de* A *correspondent les points d'une courbe* Γ' *d'ordre* ν' *qui reste fixe lorsque* A *parcourt* Γ. *La courbe* Γ *est multiple d'ordre* $\lambda\nu'$ *pour les surfaces* F *et la courbe* Γ' *d'ordre* $\lambda\nu$ *pour les surfaces* F'. *Les courbes* C *ne s'appuient pas en des points variables sur la courbe* Γ *ni les courbes* C' *sur la courbe* Γ'. *Les courbes* Γ, Γ' *sont fondamentales de seconde espèce pour la transformation* θ.

On remarquera que, dans le second cas, les courbes Γ, Γ' sont rationnelles.

4. Examinons la seconde hypothèse, c'est-à-dire supposons que la courbe Γ, d'ordre ν, base du système $|F|$, étant toujours multiple d'ordre s pour les surfaces F, celles-ci n'aient plus, en un point générique de la courbe, que $s_0 (s_0 < s)$ plans tangents variables. Nous ferons en outre une hypothèse restrictive que nous allons préciser. Nous supposerons que les $s - s_0$ plans tangents fixes aux surfaces F en un point générique A de la courbe Γ sont confondus en un seul α_0. Considérons alors un plan ϖ passant par A mais non tangent à la courbe Γ en A. Dans ce plan ϖ, opérons une transformation quadratique T ayant A pour point fondamental; aux points infiniment voisins de A dans le plan ϖ correspondent les points d'une droite r et au point infiniment voisin de A situé sur la droite (α_0, ϖ)

correspondra un point R de cette droite. Les transformées des courbes (F, ϖ), sections des surfaces F par le plan ϖ, doivent avoir $s - s_0$ de leurs intersections avec la droite r réunies en R. Nous supposerons que les transformées des courbes (F, ϖ) ont, en R, la multiplicité $s_1 \leq s - s_0$ et qu'une des branches a, en ce point, un contact d'ordre $s - s_0 - s_1 = \sigma$ avec la droite r. Cela équivaut à supposer que les surfaces F possèdent une courbe Γ_0, multiple d'ordre s_1, infiniment voisine de Γ et $\sigma = s - s_0 - s_1$ courbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_\sigma$, simples, infiniment voisines successives de Γ_0 (*).

Considérons un point générique A de Γ, une droite p passant par A mais non tangente en ce point à toutes les surfaces F, et le plan α, contenant p, tangent à la courbe Γ en A. En répétant le raisonnement fait plus haut (n° 2), on voit qu'aux surfaces F tangentes à p et par suite au plan α en A correspondent dans Σ' les plans d'une gerbe dont le sommet A′ est bien déterminé. Lorsque le plan α décrit le faisceau ayant pour axe la tangente à Γ en A, le point A′ décrit une courbe Γ'. Lorsque le point A parcourt la courbe Γ, deux cas peuvent se présenter : ou bien la courbe Γ' varie et engendre une surface Δ', ou bien la courbe Γ' reste fixe.

Considérons maintenant une courbe algébrique γ passant simplement par A, tangente en ce point au plan α_0 mais non à la courbe Γ; supposons de plus que la courbe γ ne soit pas osculatrice aux nappes des surfaces F contenant les courbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_\sigma$. Dans ces conditions, la courbe γ rencontre la courbe Γ_0 en un point infiniment voisin de A et il y a $s + s_1$ des points d'intersection de γ et des surfaces F réunis au point A. Nous allons considérer les surfaces F qui ont $s + s_1 + 1$ points d'intersection avec γ confondus au point A.

(*) Cf. Enriques-Chisini, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, vol. II, pp. 605-606 (Bologne-Zanichelli, 1918).

Soit ϖ le plan osculateur à la courbe γ en A. Choisissons dans ce plan un triangle de référence $O_1O_2O_3$ tel que O_3 coïncide avec A et O_1O_3 avec la droite (α_0, ϖ). La section d'une surface F par le plan ϖ a une équation de la forme

$$\left.\begin{aligned} & x_3^{n-s} x_2^{s-s_0} \xi_{s_0}(x_1, x_2) + x_3^{n-s-1} x_2^{s_1-1} \xi_{s-s_1+2}(x_1, x_2) \\ & \quad + x_3^{n-s-2} x_2^{s_1-2} \xi_{s-s_1+4}(x_1, x_2) + \cdots \\ & \quad + x_3^{n-s-i} x_2^{s_1-i} \xi_{s-s_1+2i}(x_1, x_2) + \cdots \\ & \quad + x_3^{n-s-s_1+1} x_2 \xi_{s+s_1-2}(x_1, x_2) + \cdots \\ & \quad + x_3^{n-s_1-s} \xi_{s+s_1}(x_1, x_2) + x_3^{n-s-s_1-1} \xi_{s+s_1+1}(x_1, x_2) + \cdots \\ & \quad + \xi_n(x_1, x_2) = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

où les ξ sont des formes binaires dont le degré est indiqué par l'indice, les coefficients de ces formes dépendant linéairement de quatre paramètres homogènes $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$, chaque système de valeurs de ces paramètres correspondant à une surface du système $|F|$.

Considérons le réseau formé par les coniques passant par O_3 et touchant la droite O_1O_2 au point O_2. En rapportant projectivement les courbes de ce réseau homaloïdal aux droites du plan, on obtient une transformation quadratique T qui peut être représentée par

$$x_1 : x_2 : x_3 = y_1 y_3 : y_1 y_2 : y_3^2. \qquad (\mathrm{T})$$

Aux points du plan ϖ infiniment voisins du point $O_3 \equiv A$ correspondent les points de la droite r d'équation $y_1 = 0$. En particulier, au point infiniment voisin de $O_3 \equiv A$ sur la droite O_3O_1 ou (α_0, ϖ) correspond le point $R(y_1 = y_2 = 0)$. A la courbe (1) correspond la courbe d'équation

$$\left.\begin{aligned} & y_3^{2n-2s} y_2^{s-s_0} \xi_{s_0}(y_3, y_2) + y_3^{2n-2s-2} y_1 y_3^{s_1-1} \xi_{s-s_1+2}(y_3, y_2) \\ & \quad + y_3^{2n-2s-4} y_1^2 y_2^{s_1-2} \xi_{s-s_1+4}(y_3, y_2) + \cdots \\ & \quad + y_3^{2n-2s-2i} y_1^i y_2^{s_1-i} \xi_{s-s_1+2i}(y_3, y_2) + \cdots \\ & \quad + y_3^{2n-2s-2s_1+2} y_1^{s_1-1} y_2 \xi_{s+s_1-2}(y_3, y_2) \\ & \quad + y_2^{3n-2s-2s_1} y_1^{s_1} \xi_{s+s_1}(y_3, y_2) \\ & \quad + y_3^{2n-2s-2s_1-2} y_1^{s_1+1} \xi_{s+s_1+1}(y_3, y_2) + \cdots \\ & \quad + y_1^{n-s} \xi_n(y_3, y_2) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Cette courbe a la multiplicité s_1 en R et les tangentes en ce point sont données par le coefficient de $y_3^{2n-s-s_1}$.

A une courbe du plan ϖ passant simplement par $O_3 \equiv A$ et osculatrice en ce point à la courbe γ correspond une courbe passant simplement par R et y ayant une tangente qui, d'après les hypothèses faites sur γ, doit être distincte de la droite r. Soit

$$\eta_2 y_1 - \eta_1 y_2 = 0 \tag{3}$$

l'équation de cette tangente.

Nous distinguerons deux cas :

1° On a $s_1 = s - s_0$. Alors, les tangentes à la courbe (2) au point R sont données par

$$y_2^{s_1} \xi_{s_0}(1, 0) + y_1 y_2^{s_1-1} \xi_{s-s_1+2}(1, 0) + \cdots + y_1^{s_1} \xi_{s+s_1}(1, 0) = 0.$$

Si nous écrivons que l'une de ces tangentes est la droite (3), nous obtenons une relation linéaire

$$\eta_2^{s_1} \xi_{s_0}(1, 0) + \eta_1 \eta_2^{s_1-1} \xi_{s-s_1-2}(1, 0) + \cdots + \eta_1^{s_1} \xi_{s+s_1}(1, 0) = 0 \tag{4}$$

entre les paramètres $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$. Pour les valeurs de ces paramètres satisfaisant à l'équation (4), les courbes (1) ont $s + s_1 + 1$ points d'intersection avec la courbe γ confondus en A. Comme chacune de ces courbes détermine la surface F à laquelle elle appartient, on obtient ainsi des surfaces F ayant $s + s_1 + 1$ points d'intersection avec γ confondus en A et ces surfaces forment un réseau.

2° On a $s_1 < s - s_0$. Les tangentes à la courbe (2) au point R sont alors données par

$$y_1 [y_2^{s_1-1} \xi_{s-s_1+2}(1, 0) + \cdots + y_1^{s_1-1} \xi_{s+s_1}(1, 0)] = 0.$$

Pour que la droite (3) se trouve parmi ces tangentes, on doit avoir

$$\eta_2^{s_1-1} \xi_{s-s_1+2}(1, 0) + \cdots + \eta_1^{s_1-1} \xi_{s+s_1}(1, 0) = 0, \tag{5}$$

c'est-à-dire une relation linéaire entre $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$. On en déduit l'existence d'un réseau de surfaces F rencontrant la courbe γ en $s + s_1 + 1$ points réunis en A.

Reprenons le cas général. On peut obtenir un réseau de surfaces F rencontrant γ en $s + s_1 + 1$ points réunis en A en supposant qu'il y a non plus $s - s_0$ plans tangents en A à ces surfaces réunis en α_0, mais $s - s_0 + 1$. Cela revient à supposer que, dans l'équation (1), on a

$$\xi_{s_0}(1, 0) = 0, \tag{6}$$

ce qui donne une relation linéaire en $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$. Dans le premier cas ($s_1 = s - s_0$), la relation (6) est un cas particulier de la relation (4). Au contraire, dans le second cas ($s_1 < s - s_0$), la relation (6) n'est pas un cas particulier de la relation (5). Par conséquent, si nous considérons la famille de réseaux de surfaces F rencontrant γ en $s + s_1 + 1$ points confondus en A, obtenus pour les diverses positions possibles de la courbe γ, nous pouvons énoncer le résultat suivant :

Si $s_1 = s - s_0$, *parmi les réseaux formés par les surfaces* F *rencontrant les courbes* γ *en* $s + s_1 + 1$ *points confondus en* A, *se trouve le réseau des surfaces* F *ayant* $s - s_0 + 1$ *plans tangents confondus avec* α_0 *en* A. *Le contraire a lieu si* $s_1 < s - s_0$.

Cela étant, aux surfaces F d'un des réseaux considérés correspondent, dans Σ', les plans d'une gerbe dont le sommet A'_1 est bien déterminé. Lorsque la courbe γ donnant naissance à ce réseau varie, le point A restant fixe, le point A'_1 ne peut évidemment rester fixe; il ne peut non plus engendrer une surface, car celle-ci serait rencontrée par toute droite de Σ' et par suite les courbes C passeraient toutes par A, ce qui est absurde puisque par hypothèse A est un point générique de la courbe Γ. Par suite, le lieu de A'_1 est une courbe nécessairement algébrique Γ'_1.

Aux surfaces F ayant $s - s_0 + 1$ plans tangents en A confondus avec α_0 correspondent dans Σ' les plans d'une gerbe dont le sommet appartient à la courbe Γ' correspondant au point A. Par suite, *si* $s_1 = s - s_0$, *les courbes* Γ', Γ'_1 *corres-*

pondant au même point A *de* Γ *ont un point commun; si* $s_1 < s - s_0$, *ces courbes ne se rencontrent pas en général.*

Lorsque le point A parcourt la courbe Γ, deux cas peuvent se présenter : ou bien la courbe Γ'_1 varie et engendre une surface Δ'_1, ou bien cette courbe reste fixe.

5. Nous allons supposer $s_1 < s - s_0$ (ou $\sigma > 0$). Il existe alors au moins une courbe Γ_1 commune aux surfaces F, simples pour celles-ci, infiniment voisine de Γ_0. On sait qu'il ne peut exister une courbe algébrique plane passant simplement par A, non tangente à la courbe Γ en ce point et rencontrant successivement les courbes $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_\sigma$ (*). Nous allons considérer les courbes algébriques planes γ_1, passant par A, rencontrant successivement les courbes $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_\sigma$ dans le voisinage de ce point et ayant en A la multiplicité la plus petite possible. Reprenons le plan ϖ et les notations du paragraphe précédent. La courbe d'équation

$$\eta_0 x_3^{m-\sigma-1} x_2^{\sigma+1} + x_3^{m-\sigma-2} \eta_{\sigma+2}(x_1, x_2) + \cdots + \eta_m(x_1, x_2) = 0, \quad (7)$$

où les η sont des formes binaires dont le degré est indiqué par l'indice, satisfait à la question. La transformation quadrique T lui fait correspondre la courbe

$$\left.\begin{array}{r} \eta_0 y_3^{2m-2\sigma-2} y_2^{\sigma+1} + y_3^{2m-2\sigma-4} y_1 \eta_{\sigma+2}(y_3, y_2) + \cdots \\ + y_1^{m-\sigma-1} \eta_m(y_3, y_2) = 0. \end{array}\right\} \quad (8)$$

Cette courbe possède un point simple en R, la tangente $y_1 = 0$ en ce point rencontrant la courbe en $\sigma + 1$ points confondus en R. La courbe (7) a un point multiple d'ordre $\sigma + 1$ en $A \equiv O_3$. Par suite, toutes les surfaces du système $|F|$ rencontrent la courbe γ_1 considérée en $s(\sigma + 1) + s_1 + \sigma$ points confondus en A. Les surfaces F rencontrant la courbe γ_1

(*) Cfr. C. Segre, *Un' osservazione relativa alla riducibilità delle trasformazioni cremoniane e dei sistemi lineari di curve piane per mezzo di trasformazioni quadratiche* (Atti. R. Accad. Torino, 1901, t. XXXVI).

en $s(\sigma+1)+s_1+\sigma+1$ points réunis en A forment un réseau. Nous allons rechercher l'équation des sections de ces surfaces F par le plan ϖ. Observons tout d'abord que nous pouvons remplacer la courbe (7) par celle que l'on obtient en supposant $m=\sigma+2$, c'est-à-dire par la courbe

$$\eta_0 x_3 x_2^{\sigma+1}+\eta_{\sigma+2}(x_1, x_2)=0. \tag{7'}$$

La courbe (8) est alors remplacée par

$$\eta_0 y_3^2 y_2^{\sigma+1}+y_1\eta_{\sigma+2}(y_3, y_2)=0. \tag{8'}$$

Pour obtenir les intersections des courbes (2) et (8′), éliminons y_1 entre leurs équations. D'après les hypothèses faites, on doit pouvoir mettre $y_2^{s-s_0}$ en facteur dans la résultante. On constate qu'il en est bien ainsi et que, de plus, on peut mettre y_3^{2n-2s} en facteur, ce qui est sans intérêt pour nous. Débarrassée de ces facteurs, la résultante s'écrit

$$\left.\begin{aligned}&[\eta_{\sigma+2}(y_3, y_2)]^{n-s}\xi_{s_0}(y_3, y_2)\\ &\quad-\eta_0[\eta_{\sigma+2}(y_3, y_2)]^{n-s-1}\xi_{s-s_1+2}(y_3, y_2)+y_2[\cdots]=0.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Pour que les courbes (1) et (7′) aient $s(\sigma+1)+s_1+\sigma+1$ points d'intersection réunis en $A\equiv O_3$ (au moins), les courbes (2) et (8′) doivent avoir $s-s_0+1$ points d'intersection réunis en R. Pour qu'il en soit ainsi, il faut que l'on puisse mettre y_2 en évidence dans (9), c'est-à-dire que l'on ait

$$\eta_{\sigma+2}(1, 0)\xi_{s_0}(1, 0)-\eta_0\xi_{s-s_1+2}(1, 0)=0. \tag{10}$$

On obtient bien ainsi une relation linéaire en μ_1, μ_2, μ_3, μ_4.

Lorsque la courbe γ_1 se déforme, c'est-à-dire lorsque les coefficients de la courbe (7′) varient, on obtient une famille de réseaux de surfaces F satisfaisant à la propriété indiquée. Observons que l'on obtiendra des réseaux particuliers de la famille en supposant soit

$$\xi_{s_0}(1, 0)=0, \qquad \eta_0=0, \tag{11}$$

soit

$$\xi_{s-s_1+2}(1, 0)=0, \qquad \eta_{\sigma+2}(1, 0)=0. \tag{12}$$

Le premier correspondra au cas où la courbe γ_1 possède la multiplicité $\sigma + 2$ en A et sera constitué par les surfaces F ayant en A $s - s_0 + 1$ plans tangents confondus avec α_0. Le second correspondra au cas où la courbe γ_1 possède un point double infiniment voisin de A sur la droite (α_0, ϖ) et sera constitué par les surfaces F ayant un point double sur la courbe Γ_1, dans le domaine du second ordre de A. Dans ce cas, la courbe (2) aura deux de ses tangentes en R confondues avec la droite $y_1 = 0$.

A un réseau formé de surfaces F rencontrant une courbe γ_1 en $s(\sigma + 1) + s_1 + \sigma + 1$ points confondus en A correspond dans Σ_1' une gerbe de plans dont le sommet A_2' est bien déterminé. Lorsque la courbe γ_1 se déforme, le point A restant fixe, le point A_2' ne peut rester fixe, ni engendrer une surface; son lieu est donc une courbe. Observons que l'on satisfait à l'équation (10), quelle que soit la courbe γ_1, en supposant

$$\xi_{s_0}(1, 0) = 0, \qquad \xi_{s-s_1+2}(1, 0) = 0.$$

Ces courbes sont découpées sur le plan ϖ par les surfaces F d'un faisceau qui appartient à tous les réseaux considérés. Il en résulte que le lieu du point A_2' est une droite Γ_2'. Donc :

Aux points du domaine d'ordre $\sigma + 1$ d'un point générique A *de la courbe* Γ, *infiniment voisin de la courbe* Γ_σ, *correspondent les points d'une droite* Γ_2'.

Le réseau de surfaces F donné par la première des relations (11) a pour homologue dans Σ' une gerbe de plans dont le sommet appartient à la courbe Γ' homologue du point A. D'autre part, le réseau de surfaces F donné par la première des relations (12) a pour correspondant, dans Σ', une gerbe de plans dont le sommet appartient à la courbe Γ_1' homologue du point A. La relation envisagée est en effet un cas particulier de la relation (5). Par suite :

La droite Γ_2' *rencontre en un point chacune des courbes* Γ', Γ_1' *correspondant au même point* A *de* Γ.

Lorsque le point A parcourt la courbe Γ, la droite Γ'_2 peut varier en engendrant une surface Δ'_2, ou bien elle peut rester fixe.

Nous voyons donc que dans l'étude de la seconde hypothèse faite sur la courbe Γ et sous les conditions restrictives introduites, nous aurons tout d'abord à distinguer deux cas : $s_1 = s - s_0$ et $s_1 < s - s_0$. Dans le premier cas, les courbes Γ' et Γ'_1 peuvent varier ou rester fixes; nous aurons donc quatre hypothèses à examiner. Dans le second cas, les courbes Γ', Γ'_1 et la droite Γ'_2 peuvent varier ou rester fixes; il y aura donc huit hypothèses à examiner. C'est ce que nous allons faire dans ce qui suit.

6. Nous allons supposer que l'on a $s_1 = s - s_0 (\sigma = 0)$ et qu'à un point A de la courbe Γ correspondent des courbes Γ', Γ'_1 qui, lorsque A parcourt Γ, engendrent des surfaces Δ', Δ'_1 respectivement. Les courbes Γ', Γ'_1 correspondant à un même point A de Γ ont en commun un point que nous désignerons par A'_0. Entre les points A de Γ, d'une part, et les courbes Γ', Γ'_1, d'autre part, existent des correspondances birationnelles.

Aux plans de Σ passant par un point A de Γ correspondent dans Σ' des surfaces F' formant un réseau et contenant les courbes Γ', Γ'_1 homologues de A. Le réseau ainsi obtenu coïncide nécessairement avec celui des surfaces F' passant par un point (n'appartenant pas à la base de $|F'|$) de l'une des courbes Γ', Γ'_1 considérées. Par suite, les surfaces F' passant par un point d'une courbe Γ' (ou Γ'_1) contiennent cette courbe et la courbe Γ'_1 (ou Γ') homologue. On en conclut que par un point de la surface Δ' (ou Δ'_1) n'appartenant pas à la base de $|F'|$ ne peut passer qu'une courbe Γ' (ou Γ'_1). En effet, s'il en était autrement, les surfaces F' passant par ce point, surfaces formant donc un réseau, auraient pour homologues, dans Σ, des plans passant par deux ou plusieurs points de la courbe Γ, ce qui est absurde. Les courbes Γ', Γ'_1 forment des faisceaux sur les surfaces Δ', Δ'_1 respectivement.

La courbe Γ étant d'ordre ν, les surfaces F' rencontrent, en dehors de la base du système $|F'|$, la surface Δ' suivant ν courbes Γ' et la surface Δ'_1 suivant ν courbes Γ'_1.

A une droite p passant par un point A de Γ correspond une courbe C' dégénérée en une courbe C'_1, d'ordre $n-s$, variable lorsque p varie dans la gerbe de sommet A, et en les deux courbes Γ', Γ'_1 homologues de A. Si la droite p n'appartient pas au plan α_0 tangent à toutes les surfaces F en A, la courbe C'_1 rencontre la courbe Γ' au point A' sommet de la gerbe des plans correspondant aux surfaces F tangentes en A à la droite p, mais la courbe C'_1 ne rencontre pas en général la courbe Γ'_1.

Supposons qu'aux plans passant par un point A' de Γ' correspondent, dans Σ, des surfaces F ayant au point A de Γ homologue de Γ', λ plans tangents communs, distincts de α_0. Considérons un plan β passant par A et les sections des surfaces F par ce plan. Le point A absorbe $s^2+(s-s_0)^2$ intersections des sections par β de deux surfaces F quelconques, mais il absorbe au moins $s^2+(s-s_0)^2+\lambda$ intersections des sections par β de deux surfaces F homologues de plans passant par A'. Par suite, une droite p' passant par A' rencontre la surface F' homologue de β en λ points au moins réunis en A'; la courbe Γ' passant par A' est donc multiple d'ordre λ au moins pour les surfaces F' correspondant aux plans passant par A. Mais alors, les surfaces F' ont ν courbes Γ' multiples d'ordre λ au moins, variables sur la surface Δ'. Cela est impossible d'après le théorème de M. Bertini rappelé plus haut, et l'on a donc $\lambda=1$. Il en résulte que les courbes Γ' sont d'ordre s_0.

Si l'on suppose qu'aux plans passant par un point A'_1 de Γ'_1 correspondent les surfaces F ayant, au point A de Γ homologue de la courbe Γ'_1 considérée, un certain nombre $\lambda\,(\geq 1)$ de points du domaine du second ordre de A, infiniment voisin de Γ_0, en commun, le même raisonnement montre que l'on a nécessairement $\lambda=1$. Il en résulte que les courbes Γ'_1 sont d'ordre $s-s_0$.

Si δ', δ'_1 sont respectivement les ordres des surfaces Δ', Δ'_1, les courbes C s'appuient en $\delta' + \delta'_1$ points variables sur la courbe Γ et, en δ'_1 de ces points d'appui, les courbes C touchent $s - s_0$ nappes des surfaces F. En d'autres termes, en δ'_1 de ces points, les courbes C rencontrent la courbe Γ_0, multiple d'ordre $s_1 = s - s_0$, infiniment voisine de la courbe Γ.

Nous avons vu qu'aux surfaces F ayant en un point de A de Γ, $s - s_0 + 1$ plans tangents confondus avec α_0 correspondaient dans Σ' les plans passant par le point A'_0 commun aux courbes Γ', Γ'_1 homologues de A. Nous devons distinguer deux cas :

a) Les surfaces F ayant la propriété indiquée en un point A de Γ possèdent la même propriété en tout point de cette courbe, c'est-à-dire qu'il existe un réseau de surfaces F ayant $s - s_0 + 1$ plans tangents confondus en tout point de la courbe Γ.

b) Les surfaces F ayant la propriété indiquée en un point A de Γ ont en général $s_0 + 1$ plans tangents distincts aux autres points de cette courbe.

Dans le premier cas, le point A'_0 est fixe, c'est-à-dire commun à toutes les courbes Γ' et Γ'_1. Si l'on se reporte aux équations (1) et (2), sous la condition (6), on voit que les surfaces F du réseau envisagé ont en commun la courbe Γ multiple d'ordre s, la courbe infiniment voisine Γ_0 multiple d'ordre $s - s_0$ et une courbe simple, infiniment voisine de Γ_0. Il en résulte qu'à une droite p' passant par A'_0 correspond une courbe C_1 d'ordre $n' - \nu$, variable avec p' dans la gerbe de sommet A'_0. Par suite, la droite p' ne rencontre plus les surfaces F' qu'en $n' - \nu$ points en dehors de A'_0 et ce point est donc multiple d'ordre ν pour les surfaces F'. Il est fondamental pour la transformation θ.

Dans le second cas, le point A'_0 est variable avec A et engendre une courbe Γ'_0 commune aux surfaces Δ', Δ'_1. Supposons que la courbe Γ'_0 ne soit pas une courbe-base du système $|F'|$. Alors, les surfaces F' qui correspondent aux plans passant par un point A de Γ doivent passer simplement par le point A'_0

correspondant, car, d'après le théorème de M. Bertini utilisé plus haut, si les surfaces d'un système linéaire ont un point multiple variable, le lieu de ce point est une courbe-base du système. Considérons alors une droite p' passant par le point A'_0 mais ne rencontrant plus les courbes Γ', Γ'_1 homologues du point A. A cette droite correspond une courbe C d'ordre n' dont deux des $\delta' + \delta'_1$ points d'appui variables sur Γ sont réunis en A. En ce point, cette courbe C doit avoir $3s - s_0$ de ses points d'intersection avec les surfaces F réunis; cela n'est possible que si C a un point de rebroussement en A, la tangente de rebroussement étant dans le plan α_0 relatif à ce point. Mais dans ces conditions, un plan passant par A ne rencontre plus C qu'en $n' - 2$ points en dehors de A et par suite la surface F′ correspondante a la multiplicité deux en A'_0. Nous parvenons donc à une absurdité qui provient de ce que nous avons supposé que la courbe Γ'_0 n'était pas une courbe-base de $|F'|$. Il en résulte que la courbe Γ'_0 est fondamentale pour la transformation θ. Il faut nécessairement qu'aux plans passant par un point A'_0 correspondent des surfaces F ayant en commun une courbe d'ordre inférieur à n', cette courbe étant variable lorsque le point A'_0 décrit la courbe Γ'_0.

Envisageons enfin un point commun aux surfaces Δ', Δ'_1, non situé sur des courbes Γ', Γ'_1 homologues d'un même point A de Γ et supposons qu'il ne soit pas fondamental pour θ. Alors, les ∞^2 surfaces F′ passant par ce point contiennent aux moins deux couples de courbes Γ', Γ'_1 et les plans qui leur correspondent dans Σ passent au moins par deux points distincts de Γ, ce qui est absurde. Par suite :

L'intersection des surfaces Δ', Δ'_1 se compose de courbes fondamentales de la correspondance θ.

7. Supposons toujours $s_1 = s - s_0$ et la courbe Γ' variable, mais que la courbe Γ'_1 soit fixe.

On démontre que dans ce cas comme dans le précédent, et par les mêmes raisonnements, que les courbes Γ' forment un faisceau sur la surface Δ' et qu'aux plans passant par un point A' d'une courbe Γ' correspondent des surfaces F ayant en un point A de Γ, un seul plan tangent fixe en dehors du plan α_0 relatif à ce point. Les courbes Γ' de Δ' et les points A de Γ sont liés par une correspondance birationnelle.

A une droite p passant par un point A de Γ et non tangente en ce point à toutes les surfaces F, correspond une courbe C' formée de la courbe Γ' homologue du point A, de la courbe Γ'_1 et d'une courbe C'_1 d'ordre $n - s$ variable lorsque la droite p varie dans la gerbe de sommet A. La courbe C'_1 et la courbe Γ' envisagée ont en commun le point A' sommet de la gerbe des plans qui correspondent aux surfaces F tangentes à la droite p en A, mais la courbe C'_1 ne rencontre pas en général la courbe Γ'_1. Les courbes Γ' sont d'ordre s_0.

Si δ' est l'ordre de la surface Δ', les courbes C s'appuient en δ' points variables sur la courbe Γ sans être tangentes, en général, aux plans α_0 relatifs aux points d'appui, c'est-à-dire sans rencontrer la courbe Γ_0 infiniment voisine de Γ.

Enfin, les surfaces F' passant par un point d'une courbe Γ'_1 contiennent cette courbe et la surface Δ' est rencontrée par une surface F', en dehors des points-base du système $|F'|$, suivant ν courbes Γ'. D'autre part, toutes les surfaces F' contiennent la courbe Γ'_1 qui est donc fondamentale pour la correspondance θ.

Soit A'_1 un point de la courbe Γ'_1. Aux plans passant par A' correspondent des surfaces F ayant en commun au moins une courbe simple, infiniment voisine de Γ_0. Supposons que ces surfaces F aient exactement en commun $\lambda (\lambda \geqq 1)$ courbes simples, infiniment voisines de Γ_0 et d'ailleurs variables lorsque le point A'_1 varie sur Γ'_1. Alors, à une droite p'_1 passant par A'_1 correspond une courbe C, d'ordre n', formée de ces λ courbes et d'une courbe C_1, d'ordre $n' - \lambda\nu$, variable lorsque p'_1 varie dans la gerbe de sommet A'_1. Il en résulte que la courbe Γ'_1 est multiple d'ordre $\lambda\nu$ pour les surfaces F'. D'autre part, si ν'_1

est l'ordre de la courbe Γ_1', les surfaces F ont $\lambda\nu_1'$ nappes tangentes en chaque point A de Γ au plan α_0 relatif à ce point et l'on a $s - s_0 = \lambda\nu_1'$.

Les surfaces F qui correspondent à des plans ne passant pas par A_1' rencontrent la courbe C_1 en un point variable en dehors des points-base du système $|F|$. Par contre, les surfaces F qui correspondent à des plans passant par A_1' ne rencontrent plus C_1 en dehors de la base de $|F|$. Il faut donc qu'en un des points d'appui A de la courbe C_1 sur la courbe Γ, la courbe C_1 soit tangente au plan α_0 relatif à ce point et qu'aux plans passant par A_1' correspondent des surfaces F ayant $s + s - s_0 + 1$ de leurs points de rencontre avec C_1 réunis en A. Dans la correspondance birationnelle existant entre la courbe C_1 et la droite p_1', les points A et A_1' sont homologues. On en conclut qu'à une droite de Σ ne rencontrant pas Γ correspond dans Σ' une courbe C ne rencontrant pas la courbe Γ_1' en des points variables; cette courbe est donc fondamentale de seconde espèce pour la transformation θ.

En un point de la courbe Γ_1', les surfaces F' peuvent avoir des plans tangents variables ou des plans tangents fixes. Dans le cas le plus général, les surfaces F' auront en commun un certain nombre de courbes infiniment voisines de Γ_1', avec certaines multiplicités. Cela étant, supposons qu'aux plans passant par un point générique A de Γ correspondent des surfaces F' ayant en commun un certain nombre λ' de courbes simples infiniment voisines de Γ_1' (ou des courbes infiniment voisines de Γ_1' communes à toutes les surfaces F'). Ces λ' courbes seront d'ailleurs variables lorsque A variera sur la courbe Γ. Alors, puisque la courbe Γ a l'ordre ν, les surfaces F' auront la multiplicité $\lambda'\nu$ en chaque point de Γ_1' et l'on aura $\lambda' = \lambda$. A une droite p passant par A mais non tangente en ce point à toutes les surfaces F correspondra une courbe C' d'ordre n formée d'une courbe C', d'ordre $n - s$, de la courbe Γ' d'ordre s_0 homologue de A et de λ courbes infiniment voisines de Γ_1'.

Une courbe Γ' rencontre la courbe Γ'_1 en un point A'_0, les plans passant par A'_0 ayant pour homologues les surfaces F ayant au point A de Γ, homologue de Γ', $s - s_0 + 1$ plans tangents coïncidants avec le plan α_0 correspondant. Deux cas peuvent se présenter :

a) Il existe un réseau de surfaces F ayant $s - s_0 + 1$ plans tangents confondus avec le plan α_0 en chaque point A de Γ. Alors le point A'_0 est fixe et commun à toutes les courbes Γ'. La courbe Γ'_1 n'appartient pas à la surface Δ'.

b) Les surfaces F ayant, en un point A de Γ, $s - s_0 + 1$ plans tangents confondus avec α_0 n'ont pas cette propriété en tout point de Γ. Alors, le point A'_0 est variable avec le point A et a évidemment pour lieu la courbe Γ'_1 qui est dans ce cas tracée sur la surface Δ'.

8. Supposons maintenant que la courbe Γ' soit fixe, la courbe Γ'_1 étant variable et l'égalité $s_1 = s - s_0$ étant toujours vérifiée.

Les courbes Γ'_1 engendrent une surface Δ'_1 et correspondent birationnellement aux points A de la courbe Γ. On démontre par les mêmes raisonnements que plus haut que sur la surface Δ'_1, les courbes Γ'_1 forment un faisceau et que, aux plans passant par un point A'_1 d'une courbe Γ'_1, correspondent des surfaces F ayant, au point A homologue de la courbe Γ'_1, un contact suivant une seule des $s - s_0$ nappes contenant Γ_0. Les surfaces F' contiennent toutes la courbe Γ' et celles de ces surfaces qui passent par un point d'une courbe Γ'_1 contiennent entièrement cette courbe.

A une droite p s'appuyant sur Γ en un point A, mais non tangente en ce point à toutes les surfaces F, correspond une courbe C' formée d'une courbe C'_1 d'ordre $n - s$ variable avec p, de la courbe Γ' et de la courbe Γ'_1 homologue de A. Les courbes Γ'_1 sont d'ordre $s - s_0$ et les surfaces F' coupent la surface Δ', en dehors des points-base de $|F'|$, suivant ν courbes Γ'_1.

Si δ'_1 est l'ordre de la surface Δ'_1, les courbes C s'appuient en δ'_1 points variables sur la courbe Γ et, en chaque point d'appui, les courbes C rencontrent la courbe Γ_0, c'est-à-dire sont tangentes au plan α_0 relatif à ce point.

Considérons un point A' de la courbe Γ'. Aux plans passant par A' correspondent des surfaces F ayant, en chaque point A de Γ, $\lambda\,(\lambda \geq 1)$ plans tangents fixes distincts de α_0. A une droite passant par A' correspond alors une courbe C formée d'une courbe C_1 d'ordre $n' - \lambda\nu$ et de λ courbes infiniment voisines de Γ. Il en résulte que la courbe Γ' est multiple d'ordre $\lambda\nu$ pour les surfaces F'. D'autre part, si ν' est l'ordre de la courbe Γ', les surfaces F ont $\lambda\nu'$ plans tangents distincts de α_0 en tout point A de Γ et l'on a $s_0 = \lambda\nu'$.

Les surfaces F correspondant aux plans de Σ' ne passant pas par A' coupent C_1 en un point en dehors des points-base de $|F|$; les autres ne rencontrent plus C_1 en dehors de ces points-base. Par suite C_1 doit s'appuyer en un certain point A sur Γ et y toucher les surfaces F qui correspondent aux plans passant par A', sans toucher cependant toutes les surfaces F. Les points A, A' se correspondent dans la liaison birationnelle entre C_1 et p'. Cela étant, à la droite p, tangente à C_1 en A, correspond une courbe C'_1 passant par A' et y touchant p'.

Nous pouvons supposer qu'aux plans passant par A correspondent des surfaces F' ayant λ' courbes infiniment voisines de Γ' en commun. On trouve alors que Γ' est multiple d'ordre $\lambda'\nu$ pour les surfaces F' et que par suite $\lambda' = \lambda$. Cela étant, à une droite p s'appuyant sur Γ en un point A correspond une courbe C' formée de la courbe Γ'_1 homologue de A et d'ordre $s - s_0$, de λ courbes infiniment voisines de Γ' comptant pour une courbe d'ordre $s_0 = \lambda\nu'$, enfin d'une courbe C'_1, d'ordre $n - s$, variable avec p, s'appuyant en un point sur Γ'. De plus, à une droite de Σ ne rencontrant pas Γ correspond une courbe C' ne rencontrant pas Γ' et cette dernière courbe est fondamentale de seconde espèce pour la transformation θ.

Observons enfin que si les surfaces F ayant $s - s_0 + 1$ plans tangents réunis avec α_0 en un point A de Γ possèdent cette propriété en tout point de Γ, les courbes Γ'_1 rencontrent la courbe Γ' en un même point A'_0 et la courbe Γ' n'appartient pas à la surface Δ'_1. Dans le cas opposé, la courbe Γ' est tracée sur la surface Δ'_1.

9. Envisageons enfin le cas où l'on a toujours $s_1 = s - s_0$, mais où les courbes Γ', Γ'_1 sont toutes deux fixes. Les surfaces F' passent alors par les courbes Γ', Γ'_1, qui sont fondamentales pour la transformation θ.

Supposons qu'aux plans passant par un point A' de Γ' correspondent des surfaces F ayant, en chaque point A de Γ, un certain nombre $\lambda\,(\lambda \geq 1)$ de plans tangents fixes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\lambda$, en général distincts du plan α_0 relatif au point A. Lorsque le point A parcourt la courbe Γ, il peut se faire que pour certaines positions de ce point, l'un des plans $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\lambda$ coïncide avec le plan α_0 correspondant, ou bien que cette éventualité ne se présente jamais. Nous commencerons par examiner le second cas. Alors les surfaces F ayant $s - s_0 + 1$ plans tangents confondus avec α_0 en un point A de Γ présentent la même particularité en tout point de cette courbe; ces surfaces forment un réseau et il leur correspond dans Σ' des plans passant par un point A'_0 commun aux courbes Γ', Γ'_1.

Les surfaces F qui correspondent aux plans passant par le point A' de Γ' ont en commun λ courbes simples, infiniment voisines de Γ, outre Γ_0. Par suite, à une droite p' passant par A' correspond une courbe C_1 d'ordre $n' - \lambda\nu$ et la courbe C' est multiple d'ordre $\lambda\nu$ pour les surfaces F'. Si de plus ν' est l'ordre de la courbe Γ', la courbe Γ est multiple d'ordre $s - s_0 + \lambda\nu'$ pour les surfaces F et l'on a $s_0 = \lambda\nu'$. La courbe C_1 étant rencontrée en un point variable par les surfaces F qui correspondent aux plans de Σ' ne passant pas par A' et n'étant rencontrée qu'en des points fixes par les autres, cette courbe doit s'appuyer sur Γ en un certain point A. Dans la correspondance birationnelle existant entre p' et C_1, les points A', A sont homologues.

Les surfaces F qui correspondent aux plans passant par un point A'_1 de Γ'_1 ont en commun un certain nombre λ_1 $(\lambda_1 \geq 1)$ de courbes simples infiniment voisines de Γ_0; par suite, à une droite p'_1 passant par A'_1 correspond une courbe C_2 d'ordre $n' - \lambda_1\nu$ et la courbe Γ'_1 est multiple d'ordre $\lambda_1\nu$ pour les surfaces F'. Si ν'_1 est l'ordre de la courbe Γ'_1, on a $s - s_0 = \lambda\nu'_1$. La courbe C_2 s'appuie sur Γ en un point où elle touche le plan α_0.

Aux plans passant par un point A de Γ correspondent des surfaces F' ayant en commun un certain nombre λ' de courbes infiniment voisines de Γ' et un certain nombre λ'_1 de courbes infiniment voisines de Γ'_1. Il en résulte que les courbes Γ', Γ'_1 sont respectivement multiples d'ordre $\lambda'\nu$, $\lambda'_1\nu$ pour les surfaces F' et que l'on a $\lambda' = \lambda$, $\lambda'_1 = \lambda_1$. A une droite passant par A correspond une courbe C' formée de λ courbes infiniment voisines de Γ', de λ_1 courbes infiniment voisines de Γ'_1 et d'une courbe C'_1 d'ordre $n-s$, s'appuyant en un point sur la courbe Γ'.

Aux droites p de Σ ne s'appuyant pas sur Γ correspondent des courbes C' ne rencontrant ni Γ', ni Γ'_1. Aux droites de Σ' ne rencontrant ni Γ', ni Γ'_1 correspondent des courbes C ne s'appuyant pas sur Γ. Les courbes Γ, Γ', Γ'_1 sont fondamentales de seconde espèce pour la transformation θ.

Envisageons maintenant le premier cas. Les courbes Γ', Γ'_1 coïncident. Aux plans passant par un point A' de Γ' correspondent les surfaces F ayant un certain nombre λ de courbes simples infiniment voisines de Γ et distinctes de Γ_0, et un certain nombre λ_1 de courbes simples infiniment voisines de Γ_0 en commun. A une droite p' passant par A' correspond donc une courbe C formée de ces $\lambda + \lambda_1$ courbes et d'une courbe C_1 d'ordre $n' - (\lambda + \lambda_1)\nu$, variable avec p'. La courbe Γ' est donc d'ordre $(\lambda + \lambda_1)\nu$ pour les surfaces F'. Si ν' est l'ordre de la courbe Γ', la courbe Γ est multiple d'ordre $s = (\lambda + \lambda_1)\nu'$ pour les surfaces F et la courbe Γ_0 multiple d'ordre $\lambda_1\nu'$. La courbe C_1, étant rencontrée en un point variable par les surfaces F qui correspondent aux plans ne passant pas par A', n'est plus rencontrée en dehors des points-base de $|F|$ par les autres surfaces F. Il faut donc que C_1 s'appuie en un certain point A sur Γ, en y touchant les surfaces F transformées des plans passant par A'.

On établit de même qu'à une droite passant par un point de Γ correspond dans Σ' une courbe C' formée de $\lambda + \lambda_1$ courbes infiniment voisines de Γ' (comptant pour une courbe d'ordre s) et d'une courbe C'_1 d'ordre $n - s$ s'appuyant en un point sur Γ'.

Les courbes C ne s'appuient pas en des points variables sur Γ ni les courbes C' en des points variables sur Γ', et par suite les courbes Γ, Γ' sont fondamentales de seconde espèce pour la transformation θ.

Nous pouvons résumer ce qui précède dans l'énoncé suivant :

Si le système homaloïdal $|F|$ *possède une courbe-base* Γ, *d'ordre* ν, *multiple d'ordre* s *pour les surfaces* F *et à laquelle est infiniment voisine une courbe* Γ_0 *multiple d'ordre* $s - s_0$ $(s_0 > s)$, *aux points infiniment voisins d'un point générique* A *de* Γ, *non situé sur* Γ_0, *correspondent les points d'une courbe* Γ' *et aux points du domaine du second ordre de* A, *infiniment voisins de* Γ_0, *correspondent les points d'une courbe* Γ'_1. *Lorsque le point* A *parcourt la courbe* Γ, *il peut se faire que :*

1° *Les courbes* Γ', Γ'_1 *soient variables et engendrent des surfaces* Δ', Δ'_1. *Les courbes* Γ' *sont d'ordre* s_0 *et les courbes* Γ'_1 *d'ordre* $s - s_0$. *Les points communs aux surfaces* Δ', Δ'_1 *sont fondamentaux pour la transformation* θ. *Les courbes* C *rencontrent les courbes* Γ *et* Γ_0 *en des points variables.*

2° *La courbe* Γ' *soit variable sur une surface* Δ', *la courbe* Γ'_1 *étant fixe. Les courbes* Γ' *sont d'ordre* s_0, *la courbe* Γ'_1, *d'ordre* ν'_1, *est multiple d'ordre* $\lambda\nu$ *pour les surfaces* F' *et l'on a* $s - s_0 = \lambda\nu'_1$. *La courbe* Γ'_1 *est fondamentale de seconde espèce* *pour la transformation* θ *et peut être tracée sur la surface* Δ'. *Les courbes* C *s'appuient en des points variables sur* Γ, *mais ne rencontrent pas en général la courbe infiniment voisine* Γ_0 *aux points d'appui.*

3° *La courbe* Γ' *soit fixe, la courbe* Γ'_1 *étant variable sur une surface* Δ'_1. *La courbe* Γ', *d'ordre* ν', *est multiple d'ordre* $\lambda\nu$ *pour les surfaces* F' *et l'on a* $s_0 = \lambda\nu'$. *Les courbes* Γ'_1 *sont d'ordre* $s - s_0$. *La courbe* Γ' *est fondamentale de seconde espèce pour la transformation* θ *et peut être tracée sur la surface* Δ'_1. *Des courbes* C *s'appuient en des points variables sur la courbe* Γ *et, en chaque point d'appui, rencontrent la courbe infiniment voisine* Γ_0.

4° *Les courbes* Γ', Γ'_1 *soient toutes deux fixes. Les courbes* Γ' *et* Γ'_1 *peuvent être distinctes et dans ce cas elles se rencontrent en un point. La courbe* Γ' *est multiple d'ordre* $\lambda\nu$ *et la courbe* Γ'_1 *d'ordre* $\lambda_1\nu$ *pour les surfaces* F'. *Si* ν', ν'_1 *sont les ordres respectifs des courbes* Γ', Γ'_1, *on a* $s = \lambda\nu' + \lambda_1\nu'_1$ *et* $s_0 = \lambda\nu'$. *Les courbes* Γ, Γ', Γ'_1 *sont fondamentales de seconde espèce pour la transformation* θ. *Les courbes* Γ', Γ'_1 *peuvent coïncider. Dans ce cas, si* ν' *est l'ordre de la courbe* Γ', *on a* $s = (\lambda + \lambda_1)\nu'$ *et* $s_0 = \lambda\nu'$. *La courbe* Γ' *est multiple d'ordre* $(\lambda + \lambda_1)\nu$ *pour les surfaces* F'. *Les courbes* Γ, Γ' *sont fondamentales de seconde espèce pour la transformation* θ.

10. Nous allons maintenant nous occuper du cas où l'on a $s_1 < s - s_0$. Les surfaces F ont alors en commun la courbe Γ d'ordre ν, multiple d'ordre s, la courbe Γ_0, infiniment voisine de Γ, multiple d'ordre s_1, et σ courbes simples $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_\sigma$, infiniment voisines successives de Γ_0 $(\sigma = s - s_1 - s_0)$. Dans l'étude de ce cas, on est conduit à utiliser les mêmes raisonnements que dans le cas où l'on a $s_1 = s - s_0$ $(\sigma = 0)$; lorsque cela pourra se faire, nous nous contenterons d'énoncer les résultats.

Si la courbe Γ' est variable et engendre une surface Δ' d'un certain ordre δ', il y a une correspondance birationnelle entre les courbes Γ' et les points A de la courbe Γ. Les courbes Γ' forment un faisceau sur la surface Δ'. Une courbe Γ' représente les points infiniment voisins du point A de Γ homologue, distincts des points de Γ_0, et les courbes Γ' sont d'ordre s_0. Les surfaces F' rencontrent la surface Δ', en dehors des courbes fondamentales du système $|F'|$, suivant ν courbes Γ'. Les courbes C s'appuient en δ' points variables sur la courbe Γ, sans rencontrer la courbe Γ_0 aux points d'appui.

Si la courbe Γ' est fixe et distincte de Γ'_1, Γ'_2, aux plans passant par un point de Γ' correspondent des surfaces F ayant en commun λ ($\lambda \geq 1$) courbes simples, distinctes de Γ_0, infiniment voisines de Γ. La courbe Γ' est multiple d'ordre $\lambda\nu$ pour les surfaces F' et si ν' est l'ordre de Γ', on a $s_0 = \lambda\nu'$. Si les courbes C s'appuient en des points variables sur Γ, elles doivent rencontrer la courbe Γ_0 aux points d'appui.

La courbe Γ'_1 n'existe que si l'on a $s_1 > 1$. Dans ce cas, si elle est variable et engendre une surface Δ'_1 d'ordre δ'_1, il y a une correspondance birationnelle entre les courbes Γ'_1 et les points A de la courbe Γ. Les courbes Γ'_1 forment un faisceau sur la surface Δ'_1. Une courbe Γ'_1 représente les points du domaine du second ordre du point A de Γ homologue, infiniment voisins de Γ_0, mais n'appartenant pas à Γ_1; les courbes Γ'_1 sont d'ordre $s_1 - 1$. Les surfaces F' rencontrent la surface Δ'_1, en dehors des points-base de $|F'|$, suivant ν courbes Γ'_1. Les courbes C s'appuient en δ'_1 points variables sur la courbe Γ en rencontrant Γ_0 aux points d'appui, mais non Γ_1.

Si la courbe Γ'_1 est fixe et distincte de Γ', Γ'_2, aux plans passant par un point de Γ'_1 correspondent des surfaces F ayant en commun λ_1 ($\lambda_1 \geq 1$) courbes simples, distinctes de Γ_1, infiniment voisines de Γ_0. La courbe Γ'_1 est multiple d'ordre $\lambda_1\nu$ pour les surfaces F' et, si ν'_1 est l'ordre de Γ'_1, on a $s_1 = \lambda_1\nu'_1 + 1$. Si les courbes C s'appuient en des points variables sur Γ en y rencontrant Γ_0, ces courbes rencontrent Γ_1 en ces points d'appui.

Avant de commencer l'étude de la droite Γ'_2, il convient de faire les observations suivantes. Reprenons le plan ϖ dont il a été question plus haut (n° 4) et considérons, dans ce plan, la courbe d'équation

$$\eta_0 x_3 x_2^{r+1} + \eta_{r+2}(x_1, x_2) = 0, \tag{13}$$

où nous supposerons $1 \leq r < \sigma$ si $s_1 > 1$ et $0 \leq r < \sigma$ si $s_1 = 1$. La transformation T fait correspondre à la courbe (13) la courbe

$$\eta_0 y_3^2 y_2^{r+1} + y_1 \eta_{r+2}(y_3, y_2) = 0. \tag{14}$$

La courbe (13) possède donc la multiplicité $r+1$ au point $A \equiv O_3$ et à ce point sont infiniment voisins $r+1$ points simples successifs situés sur les courbes $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_2$. Cette courbe rencontre donc une surface F en $s(r+1)+s_1+r$ points confondus en A. Pour obtenir les courbes (1) découpées sur ϖ par les surfaces F ayant $s(r+1)+s_1+r+1$ points d'intersection avec la courbe (13) confondus en A, il suffit d'éliminer y_1 entre les équations (2) et (14) et d'exprimer que la résultante peut être divisée par $y_2^{s_1+r+1}$. Cette résultante, débarrassée des facteurs $y_2^{s_1+r}$ et y_3^{2n-2s}, est

$$\left.\begin{aligned} & y_2^{\sigma-2}[\eta_{r+2}(y_3, y_2)]^{n-s}\xi_{s_0}(y_3, y_2) \\ & \quad - \eta_0[\eta_{r-2}(y_3, y_2)]^{n-s-1}\xi_{s-s_1+2}(y_3, y_2) + y_2[\cdots] = 0. \end{aligned}\right\}$$

Les courbes découpées sur le plan ϖ par les surfaces F considérées seront donc données par

$$\xi_{s-s_1+2}(1, 0) = 0.$$

Donc à ces surfaces F, qui forment un réseau, correspondent les plans d'une gerbe dont le sommet A'_{12} appartient à la droite Γ'_2 homologue du point A considéré. Le point A'_{12} appartient également à la courbe Γ'_1 si celle-ci existe, c'est-à-dire si s_1 est supérieur à l'unité.

Cela étant, supposons la droite Γ'_2 variable avec le point A; cette droite engendre une surface Δ'_2, d'un certain ordre δ_2. Les droites Γ'_2 et les points A de Γ sont liés par une correspondance birationnelle et les droites Γ'_2 forment un faisceau sur la surface Δ'_2 (c'est-à-dire que ces droites ne peuvent envelopper une courbe plane, Δ'_2 se réduisant alors à son plan). Les surfaces F' qui correspondent aux plans passant par un point A de Γ contiennent la droite homologue Γ'_2 et une surface F' coupe Δ'_2, en dehors des courbes-base du système $|F'|$, suivant ν droites Γ'_2. Considérons une droite p s'appuyant sur Γ en un point A. Il lui correspond dans Σ' une courbe C' formée de quatre parties : une courbe C'_1 d'ordre $n - s$ variable lorsque p varie dans la gerbe de sommet A; la courbe Γ', d'ordre s_0, homologue du point A, sur laquelle la courbe C'_1 s'appuie en un point; la courbe Γ'_1, d'ordre $s_1 - 1$, homologue du point A; enfin la droite Γ'_2 homologue du point A. Celle-ci doit compter pour une courbe d'ordre $\sigma + 1$; d'après le théorème de M. Bertini plusieurs fois invoqué, cette droite Γ'_2 ne peut être multiple pour les surfaces F' qui correspondent aux plans passant par A. Il faut donc que ces surfaces aient entre elles un contact d'ordre σ le long de cette droite Γ'_2.

Les courbes C, transformées des droites de Σ', s'appuient en δ'_2 points variables sur Γ en rencontrant, en ces points d'appui, les courbes $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots \Gamma_\sigma$.

Supposons maintenant la droite Γ'_2 fixe, mais distincte des courbes Γ', Γ'_1 si celles-ci sont également fixes. Alors, aux plans passant par un point A'_2 de Γ'_2 correspondent des surfaces F ayant en commun une courbe simple, infiniment voisine de Γ_0, et l'on en déduit que la droite Γ'_2 est multiple d'ordre ν pour les surfaces F'. En considérant la transformée d'une droite de Σ passant par un point A de Γ, on est conduit à supposer que les surfaces F' qui correspondent aux plans passant par ce point ont en commun $\sigma + 1$ droites infiniment voisines de Γ'_2. Mais alors, Γ'_2 est multiple d'ordre $\nu(\sigma + 1)$ pour les surfaces F' et l'on a $\sigma = 1$. Si la courbe Γ'_1 existe, la droite Γ'_2 ne peut donc rester fixe lorsque le point A varie sur Γ.

Pour terminer ce paragraphe, nous allons considérer le cas où les trois courbes Γ', Γ'_1, Γ'_2 sont fixes et coïncident lorsque A varie sur Γ. Cela revient à supposer qu'il existe une droite Γ' telle que les surfaces F qui correspondent aux plans passant par un point A′ de Γ' ont en commun λ courbes simples, distinctes de Γ_0, infiniment voisines de Γ, λ_1 courbes simples, distinctes de Γ_1, infiniment voisines de Γ_0, et une courbe simple, infiniment voisine de Γ_σ. On en déduit, puisque Γ' est une droite, que l'on a $\lambda = s_0$, $\lambda_1 = s_1 - 1$. De plus, la droite Γ' sera multiple d'ordre $s_0 + s_1$ pour les surfaces F′. Puisqu'une droite s'appuyant sur Γ a pour homologue une courbe C′ dont la partie variable a l'ordre $n - s$, il faut que les surfaces F′ qui correspondent aux plans passant par un point A de Γ aient en commun s droites infiniment voisines de Γ'. Mais alors Γ' a la multiplicité $\nu s = s_0 + s_1$ pour les surfaces F′ et l'on aura $\nu = 1$, $\sigma = 0$. On retrouve un cas étudié plus haut.

11. Nous allons maintenant envisager l'hypothèse où en un point générique de la courbe Γ, d'ordre ν, multiple d'ordre s pour les surfaces F, celles-ci ont s plans tangents fixes.

Soit A un point générique de la courbe Γ. Considérons une droite p passant par A, mais ne touchant pas toutes les surfaces F en ce point. A un point P de p correspond un point P′ de Σ', sommet de la gerbe des plans homologues des surfaces F passant par P. Lorsque P tend vers A sur la droite p, le réseau formé par ces surfaces a pour limite le réseau formé par les surfaces F ayant au point A la multiplicité $s + 1$. Aux surfaces de ce réseau correspondent dans Σ' les plans d'une gerbe de sommet A′, limite du point P′. Ce point A′ reste fixe lorsque la droite p varie dans la gerbe de sommet A.

Lorsque le point A parcourt la courbe Γ, deux cas peuvent se présenter : ou bien le point A′ varie et engendre une courbe algébrique Γ', ou bien le point A′ reste fixe. Dans ce dernier cas, aux plans passant par A' correspondent des surfaces F ayant la multiplicité $s+1$ en tout point de Γ.

Pour étudier de plus près la courbe fondamentale Γ, nous introduirons une hypothèse restrictive : nous supposerons que les s plans tangents aux surfaces F en un point A de Γ sont confondus en un seul α_0. Choisissons alors un plan ϖ passant par A, non tangent à la courbe Γ en ce point, et dans le plan ϖ le triangle de référence que nous avons déjà considéré plus haut (n° 4). La section d'une surface F par le plan ϖ a alors une équation de la forme

$$\left.\begin{aligned}&\mu_1 x_3^{n-s} x_2^s + x_3^{n-s-1} x_2^{s_1-1} \xi_{s-s_1+2}(x_1, x_2) + \cdots\\ &\quad + x_3^{n-s-i} x_2^{s_1-i} \xi_{s-s_1+2i}(x_1, x_2) + \cdots\\ &\quad + x_3^{n-s-s_1} \xi_{s+s_1}(x_1, x_2) + \cdots + \xi_n(x_1, x_2) = 0,\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

où les ξ sont des formes binaires dont le degré est égal à l'indice et qui dépendent linéairement des quatre paramètres homogènes μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 fixant la position de la surface F dans le système $|F|$.

La transformation quadratique T fait correspondre à la courbe (15) la courbe

$$\left.\begin{aligned}&\mu_1 y_3^{2n-2s} y_2^s + y_3^{2n-2s-2} y_1 y_2^{s_1-1} \xi_{s-s_1+2}(y_3, y_2) + \cdots\\ &\quad + y_3^{2n-2s-2i} y_1^i y_2^{s_1-i} \xi_{s-s_1+2i}(y_3, y_2) + \cdots\\ &\quad + y_3^{2n-2s-2s_1} y_1^{s_1} \xi_{s+s_1}(y_3, y_2) + \cdots\\ &\quad + y_1^{n-s} \xi_n(y_3, y_2) = 0.\end{aligned}\right\} \quad (16)$$

On voit donc que les surfaces F ont en commun la courbe Γ, multiple d'ordre s, une courbe Γ_0, multiple d'ordre s_1, infiniment voisine de Γ, et $s - s_1$ courbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{s-s_1}$, infiniment voisines successives de Γ_0.

Le réseau des surfaces F ayant la multiplicité $s+1$ en A est donné par $\mu_1 = 0$. Le cône tangent à ces surfaces en A découpe sur ϖ les droites

$$x_2^{s_1-1} \xi_{s-s_1+2}(x_1, x_2) = 0.$$

Ce cône tangent comprend donc une partie fixe; le plan α_0

compté $s_1 - 1$ fois, et une partie qui peut être mobile et qui est un cône d'ordre $s - s_1 + 2$, non nécessairement formé de plans tangents en A à la courbe Γ.

Il convient d'examiner séparément les hypothèses $s_1 = s$ et $s_1 < s$:

1° Supposons $s_1 = s$ et considérons la conique

$$\eta_0 x_3 x_2 + \eta_2(x_1, x_2) = 0 \tag{17}$$

située dans le plan ϖ et tangente en A au plan α_0. Cette conique est rencontrée par les surfaces F en $2s$ points confondus en A. Pour que les surfaces F rencontrent la conique (17) en $2s+1$ points confondus en A, il faut que la courbe (16) ait, en $R(y_1 = y_2 = 0)$, une de ses s tangentes confondue avec la tangente

$$\eta_0 y_2 + \eta_2(1, 0)\, y_1 = 0$$

en ce point à la transformée par T de la conique (17), soit

$$\eta_0 y_3^2 y_2 + y_1 \eta_2(y_3, y_2) = 0.$$

Pour cela il faut que l'on ait

$$\left.\begin{array}{l} \mu_1 [\eta_2(1, 0)]^s - \eta_0 [\eta_2(1, 0)]^{s-1} \xi_2(1, 0) + \cdots \\ \quad + (-1)^i \eta_0^i [\eta_2(1, 0)]^{s-i} \xi_{2i}(1, 0) + \cdots \\ \quad + (-1)^s \eta_0^s \xi_{2s}(1, 0) = 0. \end{array}\right\} \tag{18}$$

Les surfaces F possédant cette propriété forment donc un réseau et il leur correspond, dans Σ', les plans d'une gerbe de sommet A_1'. Lorsque la conique (17) varie en touchant toujours α_0 en A, le point A_1' décrit une courbe nécessairement algébrique Γ_1'. La condition

$$\xi_{s-s_1+2}(1, 0) \equiv \xi_2(1, 0) = 0$$

étant un cas particulier de la relation (18), la courbe Γ_1' passe par le point A' correspondant au point A.

2° Supposons $s_1 < s$. Considérons la courbe $(r \leq s - s_1)$

$$\eta_0 x_3 x_2^{r+1} + \eta_{r+2}(x_1, x_2) = 0, \tag{19}$$

qui possède la multiplicité $r + 1$ au point $A \equiv O_3$ et qui rencontre les courbes $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_r$ dans le voisinage de ce point. A la courbe (19), la transformation quadratique T fait correspondre la courbe

$$\eta_0 y_3^2 y_2^{r+1} + y_1 \eta_{r+2}(y_3, y_2) = 0. \tag{20}$$

Les surfaces F rencontrent la courbe (19) en $s + s_1 + r$ points réunis en A. Éliminons y_1 entre les équations (16) et (20). La résultante, débarrassée des facteurs $y_2^{s_1+r}$, y_3^{2n-2s}, s'écrit

$$\left.\begin{aligned} &\mu_1 y_2^{s-s_1-r}\left[\eta_{r+2}(y_3, y_2)\right]^{n-s} - \eta_0\left[\eta_{r+2}(y_3, y_2)\right]^{n-s-1}\xi_{s-s_1+2}(y_3, y_2) + \cdots \\ &+ (-1)^i y_2^{(i-1)r}\,\eta_0^i\left[\eta_{r+2}(y_3, y_2)\right]^{n-s-i}\xi_{s-s_1+2i}(y_3, y_2) + \cdots \\ &+ (-1)^{s_1} y_2^{(s_1-1)r}\,\eta_0^{s_1}\left[\eta_{r+2}(y_3, y_2)\right]^{n-s-s_1}\xi_{s+s_1}(y_3, y_2) + y_2[\cdots] = 0. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Supposons $r = s - s_1$. Les surfaces F rencontrant la courbe (19) en $s + s_1 + r + 1 = 2s + 1$ points réunis en A sont données par

$$\mu_1 \eta_{r+2}(1, 0) - \eta_0 \xi_{s-s_1+2}(1, 0) = 0. \tag{22}$$

Elles forment donc un réseau et il leur correspond dans Σ' les plans d'une gerbe de sommet A'_2. Lorsque la courbe (19) varie, le point A'_2 engendre une courbe Γ'_2. Observons que les différents réseaux de surfaces F envisagés ont en commun un faisceau donné par

$$\mu_1 = 0, \qquad \xi_{s-s_1+2}(1, 0) = 0.$$

Par suite, la courbe Γ'_2 est une droite. Comme la relation $\mu_1 = 0$ est un cas particulier de la relation (22), la droite Γ'_2 passe par le point A'.

Supposons $1 \leq r < s - s_1$. Les surfaces F rencontrant la courbe (19) en $s + s_1 + r + 1$ points confondus en A sont données par la relation

$$\xi_{s-s_1+2}(1, 0) = 0; \tag{23}$$

elles forment donc un réseau et il leur correspond une gerbe de sommet A'_{12}. La relation (23) est un cas particulier de la relation (22); par suite le point A'_{12} appartient à la droite Γ'_2.

Supposons enfin $r = 0$. Si l'on a $s_1 = 1$, la condition pour que les surfaces F coupent la courbe (19) en $s + 2$ points confondus en A s'exprime par la relation (23); mais si $s_1 > 1$, cette condition s'exprime par

$$[\eta_{12}(1,0)]^{s_1-1}\xi_{s-s_1+2}(1,0) + \cdots + (-1)^{s_1-1}\eta_{10}^{s_1-1}\xi_{s+s_1}(1,0) = 0. \quad (24)$$

Ces surfaces F forment donc un réseau auquel correspond dans Σ' une gerbe de plans de sommet A'_1. Lorsque la courbe (19) varie, le point A'_1 décrit une courbe algébrique Γ'_1. La relation (23) étant un cas particulier de la relation (24), la courbe Γ'_1 passe par le point A'_{12}.

Si le système homaloïdal $|F|$ *possède une courbe* Γ *multiple d'ordre* s *à laquelle sont infiniment voisines successives une courbe* Γ_0 *multiple d'ordre* s_1 *et* $s - s_1$ *courbes simples* $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{s-s_1}$; *si de plus les surfaces* F *ont, en un point générique de* Γ, *tous leurs plans tangents confondus en un seul, à chaque point* A *de* Γ *sont associés :*

1° *un point* A';

2° *si* $s_1 = s$, *une courbe* Γ'_1 *passant par* A';

3° *si* $s_1 < s$, *une droite* Γ'_2 *passant par* A' *et si* $s_1 > 1$, *une courbe* Γ'_1 *rencontrant la droite* Γ'_2 *en un point* A'_{12}; *si* $s_1 = 1$, *un point* A'_{12} *de la droite* Γ'_2.

Lorsque le point A décrit la courbe Γ, le point A', la courbe Γ'_1, la droite Γ'_2 et le point A'_{12} peuvent varier ou rester fixes.

Soit p une droite passant par A, non située dans le plan α_0. Puisque les surfaces F ont la multiplicité s en A, à la droite p correspond une courbe C' ayant une partie C'_1, d'ordre $n - s$, variable en même temps que p. Aux plans passant par A' correspondent des surfaces F ayant la multiplicité $s + 1$ en A; donc ces plans ne rencontrent plus la courbe C'_1 qu'en $n - s - 1$ points en dehors de A' et la courbe C'_1 passe donc par ce point. Aux plans tangents en A' à la courbe C'_1 correspondent des surfaces F ayant la multiplicité $s+1$ en A et tangentes en ce point à la droite p. Par suite, à la tangente p' en A' à la courbe C'_1 correspond une courbe C tangente en A à la droite p.

Observons que si ϖ est un plan passant par A, non tangent à Γ en ce point, les sections de deux surfaces F génériques par le plan ϖ ont $s^2+s_1^2+s-s_1$ intersections absorbées en A. Par contre, les sections par ce plan de deux surfaces F homologues de deux plans passant par le point A' homologue de A ont $s^2+s_1^2+2(s-s_1)+2$ intersections absorbées en A. Il en résulte que le point A' est au moins multiple d'ordre $s-s_1+2$ pour les surfaces F' homologues des plans passant par A. Par suite, si le point A' varie sur une courbe Γ' lorsque le point A parcourt la courbe Γ, la courbe Γ' est, d'après le théorème de M. Bertini plusieurs fois invoqué, une courbe-base du système $|F'|$; c'est donc une courbe fondamentale de la transformation θ.

Considérons maintenant une droite p_0 passant par A, située dans le plan α_0 mais distincte de la tangente à Γ en A. Les surfaces F rencontrent cette courbe en $s+s_1$ points confondus en A; par suite à p_0 correspond une courbe C' comprenant une partie variable C'_0 d'ordre $n-s-s_1$. Les surfaces F ayant la multiplicité $s+1$ en A rencontrent également p_0 en $s+1+s_1-1=s+s_1$ points confondus en A; donc la courbe C'_0 ne passe pas par A'. Les surfaces F ayant $s+s_1+1$ points d'intersection avec p_0 confondus en A découpent, sur un plan ϖ passant par cette droite, un système de courbes caractérisé par la relation

$$\xi_{s+s_1}(1, 0)=0,$$

en reprenant les notations du début de ce paragraphe. Ces surfaces forment donc un réseau et il leur correspond des plans passant par un point A'_0, appartenant à la courbe C'_0.

Si $s=s_1$, la relation précédente est un cas particulier de la relation (18) et le point A'_0 appartient à la courbe Γ'_1. Si s_1 est inférieure à s, la relation précédente est un cas particulier de la relation (24) si $s_1 > 1$ et le point A'_0 appartient à la courbe Γ'_1; si $s_1 = 1$, cette relation coïncide avec la relation (23) et le point A'_0 appartient à la droite Γ'_2.

12. Nous terminerons ce travail par l'examen d'un cas particulier : celui où l'on a $s_1 = s$ et où le point A' reste fixe lorsque le point A parcourt la courbe Γ. Dans ces conditions, à un plan passant par A' correspond une surface F ayant la multiplicité $s + 1$ en tout point de la courbe Γ et la multiplicité $s - 1$ en tout point de la courbe infiniment voisine Γ_0. En un point de Γ, $s - 1$ des plans tangents à cette surface F sont confondus avec α_0. On pourrait supposer qu'il y en ait plus de $s - 1$ et même que les $s + 1$ plans sont confondus avec α_0; nous ferons l'hypothèse opposée.

Nous préciserons l'hypothèse précédente en supposant que les surfaces F qui correspondent aux plans passant par A', surfaces que nous désignerons par F_a, ont deux plans tangents variables en tout point de la courbe Γ. Cela revient à supposer que le polynôme $\xi_2(x_1, x_2)$ dépend effectivement de μ_2, μ_3, μ_4.

La courbe Γ compte pour $2s^2\nu$ unités dans l'intersection de deux surfaces F génériques; par contre, elle compte pour $(2s^2 + 2)\nu$ unités dans l'intersection de deux surfaces F_a; par suite le point A' est multiple d'ordre 2ν pour les surfaces F'.

Soit p une droite passant par un point A de Γ, non située dans le plan α_0 correspondant à A. Il lui correspond une courbe C'_1 d'ordre $n - s$, passant par A'. Soient p' la tangente à C'_1 en A', C_1 la courbe d'ordre $n' - 2\nu$ qui lui correspond dans Σ; cette courbe est tangente en A à p. Aux plans passant par A, et qui ne rencontrent plus C_1 qu'en $n' - 2\nu - 1$ points variables, correspondent ∞^2 surfaces F' tangentes à p' en A'. Par suite, les cônes tangents aux surfaces F' en A' sont variables (en ayant éventuellement une partie fixe).

Il y a ∞^1 surfaces F_a tangentes à la droite p en A; elles correspondent aux plans passant par p'. Ces surfaces F_a sont tangentes au plan α tangent à Γ en A et passant par p; aux droites du faisceau de sommet A et de plan α correspondent donc des courbes C_1' tangentes à p' en A'. Lorsque le plan α varie dans le faisceau ayant pour axe la tangente à Γ en A, la droite p' engendre un cône φ' et aux plans passant par A correspondent ∞^2 surfaces F' ayant le cône φ' comme cône tangent (ou partie de cône tangent) en A'. Lorsque A décrit la courbe Γ, le cône φ' varie et engendre un faisceau $|\varphi'|$. La courbe Γ est donc rationnelle. De plus, comme elle est d'ordre ν, le cône tangent à une surface F' en A' contient ν cônes du faisceau $|\varphi'|$ (et éventuellement une partie fixe).

Si le point A' *est fixe et s'il existe un réseau de surfaces* F *ayant deux plans tangents variables en tout point de la courbe* Γ, *le système des cônes tangents aux surfaces* F' *au point* A' *est composé au moyen d'un faisceau.*

On voit aisément que si la courbe Γ_1' est variable, elle engendre un faisceau sur une surface Δ_1' d'ordre δ_1'. Les courbes Γ_1' sont d'ordre s et à une droite de Σ' correspond une courbe C s'appuyant en δ_1' points sur Γ, en rencontrant Γ_0 aux points d'appui. Si au contraire la courbe Γ_1' est fixe et d'ordre ν_1', elle est fondamentale et multiple d'ordre $\lambda\nu$ pour les surfaces F'. On a $s = \lambda\nu_1'$.

Marcel HAYEZ, imprimeur, rue de Louvain, 112, Bruxelles.