ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE.
Extrait des *Bulletins de la Classe des Sciences*. Séance du 4 décembre 1926,
nos 11-12, pp. 892-904.

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE. — **Recherches sur les surfaces algébriques de genres zéro et de bigenre un,**

par LUCIEN GODEAUX, professeur à l'Université de Liége (*).

(Seconde communication.)

La transformation birationnelle T, obtenue en rapportant projectivement les plans de l'espace aux surfaces cubiques circonscrites à un tétraèdre fondamental, est involutive. Les droites joignant les couples de points homologues de la transformation forment un complexe cubique. Toute surface invariante pour la transformation, c'est-à-dire, suivant une expression due à Moutard, toute surface anallagmatique, contient ∞^2 couples de points homologues de T et ces couples forment une involution d'ordre deux. Les droites déterminées par les points de ces ∞^2 couples forment une congruence, image de l'involution.

Dans cette note, nous appliquons ces considérations générales au cas particulier où la surface anallagmatique est du sixième ordre et passe doublement par les arêtes du tétraèdre fondamental. Cette surface est alors de genres zéro et de bigenre un; l'involution engendrée par T sur cette surface possède quatre points unis et est, par suite, également de genres zéro et de bigenre un. La congruence image de cette involution est d'ordre sept et de classe trois; elle est formée par les droites appartenant à ∞^1 quadriques d'un système linéaire ∞^3 que nous déterminons. Nous obtenons ainsi un nouvel exemple de correspondance (1, 2) entre deux surfaces de genres $p_a = P_3 = 0$,

(*) Présenté par M. Cl. Servais.

$P_2=1$. Dans cet exemple, qui présente d'ailleurs par lui-même un certain intérêt, de même que dans les deux exemples que nous avions obtenus précédemment (*), tous les résultats que nous avons établis autrefois dans le cas général des correspondances (1, 2), entre deux surfaces de genres $p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$, se trouvent vérifiés.

1. — La surface F, du sixième ordre, d'équation

$$f(x_2x_3x_4,\ x_3x_4x_1,\ x_4x_1x_2,\ x_1x_2x_3) + x_1x_2x_3x_4\,\varphi(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = 0,$$

où $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4)$ sont des formes du second degré à quatre variables, a les genres $p_a=p_g=P_3=P_5=\cdots=0$, $P_2 = P_4 = P_6 = \cdots = 1$. Les surfaces

$$\lambda_1x_2x_3x_4 + \lambda_2x_3x_4x_1 + \lambda_3x_4x_1x_2 + \lambda_4x_1x_2x_3 = 0$$

découpent, sur F, le système linéaire $|C'|$, de dimension 3, genre 4 et degré 6, adjoint au système $|C|$ des sections planes.

Si l'on rapporte projectivement les courbes de $|C'|$ aux plans d'un espace ordinaire, la surface F se transforme birationnellement en une surface d'équation

$$\varphi(x_2x_3x_4,\ x_3x_4x_1,\ x_4x_1x_2,\ x_1x_2x_3) + x_1x_2x_3x_4\,f(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = 0.$$

Par conséquent, si nous supposons les formes f, φ identiques, la surface F sera anallagmatique pour la transformation T d'équations

$$x_1' : x_2' : x_3' : x_4' = x_2x_3x_4 : x_3x_4x_1 : x_4x_1x_2 : x_1x_2x_3. \tag{T}$$

Posons

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4 \equiv) \sum_{i,k}^{1,2,3,4} a_{ik}\, x_ix_k; \qquad (a_{ik} = a_{ki})$$

(*) *Sur un plan double de genres zéro et de bigenre un.* (Bull. Acad. roy. de Belgique, 1926, pp. 527-534.) — *Recherches sur les surfaces algébriques de genres zéro et de bigenre un.* (Idem, 1926, pp. 726-741.) Nous avons donné, dans cette dernière note, la bibliographie des surfaces de genres zéro et de bigenre un.

l'équation de la surface F s'écrit

$$
\begin{aligned}
& a_{11}x_2x_3x_4\,(x_1^3 + x_2x_3x_4) + a_{22}x_3x_4x_1\,(x_2^8 + x_3x_4x_1) \\
& + a_{33}x_4x_1x_2\,(x_3^3 + x_4x_1x_2) + a_{44}x_1x_2x_3\,(x_4^3 + x_1x_2x_3) \\
& + 2\,(a_{12} + a_{31})\,x_1x_2x_3x_4\,(x_1x_2 + x_3x_4) \\
& + 2\,(a_{13} + a_{24})\,x_1x_2x_3x_4\,(x_1x_3 + x_2x_4) \\
& + 2\,(a_{14} + a_{23})\,x_1x_2x_3x_4\,(x_1x_4 + x_2x_3) = 0.
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

Dans la suite, nous réserverons la notation F à cette surface particulière (1).

La transformation T est involutive et engendre sur F une involution I_2 d'ordre deux, présentant quatre points unis

$A_1(-1, 1, 1, 1)$, $A_2(1, -1, 1, 1)$, $A_3(1, 1, -1, 1)$ et $A_4(1, 1, 1 -1)$.

Par conséquent, l'involution I_2 est de genres zéro et de bigenre un ($p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$), comme la surface F.

2. La transformation T fait correspondre aux courbes de $|C|$ les courbes de son adjoint $|C'|$; par conséquent, T transforme en lui-même le système linéaire

$$|C_1| = |C + C'|.$$

Les courbes C, C' se rencontrant en six points, les courbes C_1 sont de genre 13, de degré 24 et le système $|C_2|$ à la dimension 12.

Le système $|C_1|$ est découpé, sur la surface F, par le système linéaire de surfaces

$$\sum \lambda_{ik} x_i x_{k+1} x_{k+2} x_{k+3} = 0, \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

où $k+1$, $k+2$, $k+3$ doivent être remplacés par les plus petits nombres positifs qui leur sont respectivement congrus par rapport au module 4.

Il existe, dans le système $|C_1|$, deux systèmes linéaires partiels $|C_{11}|$, $|C_{12}|$, composés au moyen de l'involution I_2.

Le système $|C_{11}|$, de dimension 6, est découpé sur F par le système linéaire de surfaces

$$\begin{aligned}&\lambda_{12}x_3x_4(x_1^2+x_2^2)+\lambda_{13}x_2x_4(x_1^2+x_3^2)\\&+\lambda_{14}x_2x_3(x_1^2+x_4^2)+\lambda_{23}x_1x_4(x_2^2+x_3^2)\\&+\lambda_{24}x_1x_3(x_2^2+x_4^2)+\lambda_{34}x_1x_2(x_3^2+x_4^2)+\lambda x_1x_2x_3x_4=0;\end{aligned}$$

ce système $|C_{11}|$ est dépourvu de points-base.

Le système $|C_{12}|$, de dimension 5, est découpé sur F par les surfaces

$$\left.\begin{aligned}&\mu_{12}x_3x_4(x_1^2-x_2^2)+\mu_{31}x_2x_4(x_3^2-x_1^2)+\mu_{23}x_1x_4(x_2^2-x_3^2)\\&+\mu_{14}x_2x_3(x_1^2-x_4^2)+\mu_{24}x_1x_3(x_2^2-x_4^2)+\mu_{34}x_1x_2(x_3^2-x_4^2)=0.\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

Ce système possède les quatre points-base simples A_1, A_2, A_3, A_4.

Nous obtiendrons une surface image de l'involution I_2 en rapportant projectivement les surfaces (2) (c'est-à-dire les courbes C_{12}) aux hyperplans d'un espace linéaire à cinq dimensions; nous désignerons par Φ la surface ainsi obtenue.

3. Désignons par

$$p_{ik}=x_iy_k-x_ky_i$$

les coordonnées radiales d'une droite de l'espace. Les coordonnées de la droite joignant un point $X(x_1, x_2, x_3, x_4)$ au point $Y(y_1, y_2, y_3, y_4)$, que T fait correspondre à X, sont données par

$$\left.\begin{aligned}&\frac{p_{12}}{x_3x_4(x_1^2-x_2^2)}=\frac{p_{31}}{x_2x_4(x_3^2-x_1^2)}=\frac{p_{23}}{x_1x_4(x_2^2-x_3^2)}\\&=\frac{p_{14}}{x_2x_3(x_1^2-x_4^2)}=\frac{p_{24}}{x_1x_3(x_2^2-x_4^2)}=\frac{p_{34}}{x_1x_2(x_3^2-x_4^2)}.\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

L'équation (2) peut donc s'écrire

$$\lambda_{12}p_{12}+\lambda_{31}p_{31}+\lambda_{23}p_{23}+\lambda_{14}p_{14}+\lambda_{24}p_{24}+\lambda_{34}p_{34}=0.$$

Par conséquent, si l'on interprète les nombres p_{ik} comme coordonnées homogènes d'un espace linéaire S_5 à cinq dimensions, la surface Φ appartient à l'hyperquadrique de Klein

$$p_{12}p_{34} + p_{31}p_{24} + p_{23}p_{14} = 0.$$

En d'autres termes, on peut prendre, pour modèle projectif de la surface Φ, une congruence de droites. Nous déterminerons les équations de cette congruence et montrerons qu'elle est formée par les droites appartenant à ∞^1 quadriques d'un système linéaire ∞^3. On sait d'ailleurs que M. Fano (*) a montré qu'une telle congruence était en général de genres zéro et de bigenre un.

4. Il existe deux réseaux de quadriques anallagmatiques (**), circonscrites au tétraèdre fondamental. L'un de ces réseaux est représenté par

$$\lambda_1(x_1x_2 - x_3x_4) + \lambda_2(x_1x_3 - x_2x_4) + \lambda_3(x_1x_4 - x_2x_3) = 0, \qquad (4)$$

le second par

$$\mu_1(x_1x_2 + x_3x_4) + \mu_2(x_1x_3 + x_2x_4) + \mu_3(x_1x_4 + x_2x_3) = 0. \qquad (5)$$

Les quadriques du premier réseau passent par les points $B(1, 1, 1, 1)$, $B_1(1, 1, -1, -1)$, $B_2(1, -1, 1, -1)$, $B_3(-1, 1, 1, -1)$, invariants pour T, et par les sommets du tétraèdre fondamental. Les quadriques du réseau (5) passent par les points A_1, A_2. A_3, A_4 et par les sommets du tétraèdre fondamental.

Soient X, Y deux points homologues pour T, g la droite XY. Par les points X, Y passent ∞^1 quadriques anallagmatiques du

(*) G. Fano, *Memorie Acad. Torino,* 1901. (Voir § 14.)

(**) J. Neuberg, dans son *Mémoire sur le Tétraèdre.* (Mém. in-8° de l'Acad. roy. de Belgique, 1884, t. XXXVII), considère la transformation T dans le cas où le point unitaire B (1, 1, 1, 1) est le centre de la sphère inscrite ou le centre de gravité du tétraèdre fondamental. Il considère également le réseau (5).

réseau (4); par suite, il existe une de ces quadriques contenant g. Inversement, si g est une droite appartenant à une quadrique anallagmatique, T lui fait correspondre une cubique gauche tracée sur cette quadrique et cette cubique gauche rencontre nécessairement g en deux points, homologues dans la transformation T. Les droites joignant les points homologues de T engendrent donc le complexe Σ des génératrices des quadriques du réseau (4). Pour la même raison, Σ est aussi le complexe des génératrices des quadriques du réseau (5).

Le complexe des droites appartenant aux quadriques d'un réseau a été étudié par Reye, R. Sturm, M. D. Montesano et J. Neuberg (*). Ce dernier a particulièrement considéré, sous le nom de complexe de Grassmann, le lien des génératrices des quadriques d'un réseau déterminé par trois couples de plans. Le complexe Σ est un cas particulier des complexes étudiés par les géomètres qui viennent d'être cités, car chacun des réseaux (4), (5) contient 6 quadriques dégénérées en des couples de plans.

Si nous désignons par $Y(y_1, y_2, y_3, y_4)$, $Z(z_1, z_2, z_3, z_4)$ deux points d'une droite du complexe Σ, l'équation de celui-ci peut s'écrire (**), en partant du réseau (4),

$$\begin{vmatrix} y_1y_2 - y_3y_4 & y_1z_2 + y_2z_1 - y_3z_4 - y_4z_3 & z_1z_2 - z_3z_4 \\ y_3y_1 - y_2y_4 & y_3z_1 + y_1z_3 - y_2z_4 - y_4z_2 & z_3z_1 - z_2z_4 \\ y_2y_3 - y_1y_4 & y_2z_3 + y_3z_2 - y_1z_4 - y_4z_1 & z_2z_3 - z_1z_4 \end{vmatrix} = 0, \quad (6)$$

ou, en introduisant les coordonnées de droites,

$$p_{12}p_{23}p_{31} + p_{12}p_{14}p_{24} + p_{31}p_{14}p_{34} + p_{23}p_{34}p_{24} = 0. \quad (1)$$

(*) Reye, *Geometrie der Lage*, Bd III. — Sturm, *Journal de Crelle*, t. LXX; Mathem. Annalen, t. VI. — Montesano, *Su di un complesso di rette del terzo grado.* (Mem. R. Accad. di Bologna, 1893.) — J. Neuberg, *Sur le complexe de Grassmann.* (Mathesis, 1902.)

(**) J. Neuberg, *Sur le complexe*... (loc. cit.).

En partant du réseau (5), on obtient l'équation du complexe Σ sous la forme

$$\begin{vmatrix} y_1y_2 + y_3y_4 & y_1z_2 + y_2z_1 + y_3z_4 + y_4z_3 & z_1z_2 + z_3z_4 \\ y_3y_1 + y_2y_4 & y_1z_3 + y_3z_2 + y_2z_4 + y_4z_2 & z_3z_1 + z_2z_4 \\ y_2y_3 + y_1y_4 & y_2z_3 + y_3z_2 + y_1z_4 + y_4z_1 & z_2z_3 + z_1z_4 \end{vmatrix} = 0, \quad (7)$$

Cette équation, développée, reproduit l'équation (I).

Le complexe Σ possède les douze points principaux A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B et les sommets du tétraèdre fondamental. On le vérifie immédiatement en remplaçant, dans l'une des équations (6) ou (7), les coordonnées y_1, y_2, y_3, y_4 par celles des douze points en question (*).

5. Soient Y, Z deux points de la surface F formant un couple de l'involution I_2. La droite YZ appartient au complexe Σ et est transformée, par T, en une cubique gauche passant par les sommets du tétraèdre fondamental et par Y, Z. La droite YZ ne peut, par suite, contenir deux autres points homologues dans la transformation T. Il en résulte que la droite YZ engendre une congruence G telle qu'à tout couple de I_2 correspond une droite de g et, inversement, à toute droite de G correspond un seul couple de I_2. La congruence G est donc une image de l'involution I_2.

La congruence G appartient au complexe Σ. En partant des formules (3), on doit pouvoir déduire de l'équation (1) l'équation d'un second complexe contenant la congruence G. Multiplions les deux membres de l'équation (1), par exemple, par

$$(x_1^2 - x_2^2)(x_3^2 - x_4^2)(x_1x_2 - x_3x_4).$$

(*) On pourrait également vérifier que les douze plans $x_i \pm x_k = 0$ $(i \neq k)$ sont principaux pour le complexe Σ; chacun de ces plans fait partie d'une quadrique dégénérée de l'un des réseaux (4) ou (5).

En tenant compte des formules (3), on obtient l'équation

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}p_{12}(p_{31}^2 + p_{12}p_{34} - p_{14}^2) + a_{22}p_{12}(p_{23}^2 - p_{12}p_{34} - p_{24}^2) \\ + a_{33}p_{34}(p_{23}^2 - p_{12}p_{14} - p_{31}^2) + a_{44}p_{34}(p_{24}^2 + p_{12}p_{34} - p_{14}^2) \\ - 2(a_{12} + a_{34})p_{12}(p_{23}p_{31} + p_{14}p_{24}) - 2(a_{13} + a_{24})p_{12}p_{34}(p_{14} + p_{23}) \\ - 2(a_{14} + a_{23})p_{12}p_{14}(p_{24} + p_{43}) = 0. \end{array}\right\} \quad \text{(II)}$$

Considérons, d'autre part, le réseau de quadriques

$$\lambda\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) + \lambda_2(x_1x_3 - x_2x_4) + \lambda_3(x_2x_3 - x_1x_4) = 0.$$

Le complexe, lieu des droites appartenant aux quadriques de ce réseau, a pour équation

$$\begin{vmatrix} \varphi(y) & \varphi(y, z) & \varphi(z) \\ y_1y_3 - y_2y_4 & y_3z_1 + y_1z_3 - y_2z_4 - y_4z_2 & z_1z_3 - z_2z_4 \\ y_2y_3 - y_1y_4 & y_2z_3 + y_3z_2 - y_1z_4 - y_4z_1 & z_2z_3 - z_1z_4 \end{vmatrix} = 0, \quad (8)$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$\varphi(y) = \varphi(y_1, y_2, y_3, y_4),$$

$$\varphi(y, z) = y_1\frac{\partial\varphi}{\partial z_1} + y_2\frac{\partial\varphi}{\partial z_2} + y_3\frac{\partial\varphi}{\partial z_3} + y_4\frac{\partial\varphi}{\partial z_4}.$$

Si l'on développe le premier membre de l'équation (8) et si l'on introduit les coordonnées de droites, on trouve précisément le premier membre de l'équation (II).

La comparaison des équations (6) et (8) montre que les complexes cubiques (I) et (II) ont en commun les droites appartenant aux quadriques du faisceau

$$\lambda_2(x_1x_3 - x_2x_4) + \lambda_3(x_2x_3 - x_1x_4) = 0.$$

Ces droites forment une congruence d'ordre deux et de classe six, composée des quatre plans réglés

$$x_1 + x_2 = 0, \quad x_1 - x_2 = 0, \quad x_3 + x_4 = 0, \quad x_3 - x_4 = 0$$

et de deux congruences bilinéaires dont les directrices sont respectivement, pour la première,

$$x_1 = x_2 = 0; \quad x_3 = x_4 = 0,$$

et pour la seconde,

$$x_1 + x_2 = 0, \quad x_3 + x_4 = 0; \qquad x_1 - x_2 = 0, \quad x_3 - x_4 = 0.$$

Le restant de l'intersection des complexes (I) et (II) est la congruence G, d'ordre sept et de classe trois, lieu des droites appartenant à ∞^1 quadriques du système linéaire sans points-base, ∞^3,

$$\left.\begin{aligned} &\lambda\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) + \lambda_1(x_1x_2 - x_3x_4) + \lambda_2(x_1x_3 - x_2x_4) \\ &\quad + \lambda_3(x_1x_4 - x_2x_3) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

La congruence G peut être représentée par les équations (*)

$$\left\| \begin{matrix} \varphi(y) & \varphi(y, z) & \varphi(z) \\ y_1y_2 - y_3y_4 & y_1z_2 + y_2z_1 - y_3z_4 - y_4z_3 & z_1z_2 - z_3z_4 \\ y_3y_1 - y_2y_4 & y_1z_3 + y_3z_1 - y_2z_4 - y_4z_2 & z_3z_1 - z_2z_4 \\ y_2y_3 - y_1y_4 & y_2z_3 + y_3z_2 - y_1z_4 - y_4z_1 & z_2z_3 - z_1z_4 \end{matrix} \right\| = 0. \qquad (10)$$

On observera que dans l'équation (1), de même que dans l'équation (II), les coefficients a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{23}, a_{24}, a_{34} n'interviennent que par les sommes $a_{12} + a_{34}$, $a_{13} + a_{24}$, $a_{14} + a_{23}$; nous avons cependant maintenu ces six coefficients pour la symétrie des écritures.

6. La surface Φ, dans l'espace S_5, est d'ordre dix et appartient à l'hyperquadrique de Klein ainsi qu'à ∞^3 hypersurfaces cubiques; chacune de ces hypersurfaces correspond à un complexe cubique lieu des droites appartenant à un réseau de quadriques pris dans le système linéaire (9).

Les sections hyperplanes de Φ correspondent aux courbes C_{12} de F et le système $|C_{12}|$ possède les quatre points-base simples A_1, A_2, A_3, A_4; par suite, à chacun de ces points correspond une droite de Φ, c'est-à-dire un faisceau de rayons de la congruence G.

(*) Voir L. Godeaux, *Sur une classe de congruences de droites.* (L'Enseignement Mathématique, 1909.)

Les droites de la congruence G sont déterminées par les couples de points formant les groupes de I_2 sur F; par suite, les ∞^1 droites de G qui correspondent au point A_1, par exemple, sont les tangentes à F en ce point. Le faisceau de droites de la congruence G, ayant pour sommet A_1 et qui correspond à ce point, a donc pour plan le plan

$$\left.\begin{aligned} & a_{11}(3x_1+x_2+x_3+x_4)+a_{22}(-x_1-3x_2+x_3+x_4) \\ & +a_{33}(-x_1+x_2-3x_3+x_4)+a_{44}(-x_1+x_2+x_3-3x_4) \\ & -2(a_{12}+a_{14})(x_1-x_2+x_3+x_4) \\ & -2(a_{13}+a_{24})(x_1+x_2-x_3+x_4) \\ & -2(a_{23}+a_{14})(x_1+x_2+x_3-x_4)=0. \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Nous allons d'ailleurs retrouver ce résultat d'une autre manière, en partant des équations (10) de la congruence G. Pour obtenir les droites de G passant par le point A_1, nous poserons, dans les équations (10), $y_1=-1$, $y_2=y_3=y_4=1$ et nous remplacerons les z par les coordonnées courantes. Nous obtenons ainsi

$$\left\| \begin{matrix} \varphi(-1,1,1,1) & -\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_3}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_4} & \varphi(x_1,x_2,x_3,x_4) \\ -2 & x_1-x_2-x_3-x_4 & x_1x_2-x_3x_4 \\ -2 & x_1-x_2-x_3-x_4 & x_1x_3-x_2x_4 \\ -2 & x_1-x_2-x_3-x_4 & x_2x_3-x_1x_4 \end{matrix} \right\| = 0.$$

On satisfait à ces équations en posant

$$\left| \begin{matrix} \varphi(-1,1,1,1) & -\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_3}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_4} \\ -2 & x_1-x_2-x_3-x_4 \end{matrix} \right| = 0,$$

et l'on retrouve ainsi l'équation (11).

On sait que les droites de la congruence G passant par un point P sont celles qui joignent ce point aux sept autres points-base du réseau de quadriques formé par les quadriques du système (9) passant par P. Par suite, par le point A_1 passent les droites de G joignant A_1 aux points-base du réseau obtenu en posant, dans (9),

$$\lambda\varphi(-1,1,1,1) - 2(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = 0.$$

L'équation d'une quadrique de ce réseau est donc

$$\left.\begin{array}{l} 2(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\,\varphi(x_1,x_2,x_3,x_4) \\ +\,\varphi(-1,1,1,1)\left[\begin{array}{l}\lambda_1(x_1x_2-x_3x_4)+\lambda_2(x_1x_3-x_2x_4) \\ \qquad +\,\lambda_3(x_1x_4-x_2x_3)\end{array}\right]\end{array}\right\} \quad (12)$$

Pour $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, on obtient les quadriques du réseau appartenant également au réseau (4); ce sont des cônes de sommet A_1 (*), dont l'équation peut s'écrire

$$\lambda_2(x_1 - x_3)(x_2 - x_4) + \lambda_3(x_1 + x_4)(x_2 - x_3) = 0.$$

Les droites communes à ces cônes sont celles qui joignent A_1 aux sommets du tétraèdre fondamental; ces droites appartiennent par suite à la congruence G.

Les quadriques du réseau (12) ont, en A_1, même plan tangent que l'on vérifie être précisément le plan (11).

Ainsi donc, par chacun des points A_1, A_2, A_3, A_4 passent des droites de la congruence G se répartissant en un faisceau de droites et quatre droites isolées.

7. Considérons la congruence G′, lieu des droites appartenant à ∞^1 quadriques du système linéaire ∞^3 :

$$\mu\varphi(x_1,x_2,x_3,x_4) + \mu_1(x_1x_2 + x_3x_4) + \mu_2(x_1x_3 + x_2x_4) + \mu_3(x_1x_4 + x_2x_3) = 0.$$

(*) Si l'on considère un système linéaire formé de surfaces anallagmatiques et n'ayant pas comme point-base un des points A_1, A_2, A_3, A_4, B, B_1, B_2, B_3, par exemple A_1, celles de ces surfaces qui passent par A_1 y acquièrent en général un point double. Dans le cas où il s'agit du réseau (4), cette propriété se vérifie immédiatement.

Les équations de cette congruence peuvent s'écrire

$$\left\| \begin{matrix} \varphi(y) & \varphi(y, z) & \varphi(z) \\ y_1y_2 + y_3y_4 & y_1z_2 + y_2z_1 + y_3z_4 + y_4z_1 & z_1z_2 + z_3z_4 \\ y_1y_3 + y_2y_4 & y_1z_3 + y_3z_1 + y_2z_4 + y_4z_2 & z_1z_3 + z_2z_4 \\ y_1y_4 + y_2y_3 & y_1z_4 + y_4z_1 + y_2z_3 + y_3z_2 & z_1z_4 + z_2z_3 \end{matrix} \right\| = 0.$$

La congruence G′ appartient au complexe Σ et il est aisé de vérifier qu'elle est le lieu des droites joignant les points des groupes de l'involution I_2' d'ordre deux, engendrée par T sur la surface anallagmatique du sixième ordre, F′, d'équation

$$\begin{aligned} & a_{11}x_2x_3x_4(x_1^3 - x_2x_3x_4) + a_{22}x_3x_4x_1(x_2^3 - x_3x_4x_1) \\ & + a_{33}x_4x_1x_2(x_3^3 - x_4x_1x_2) + a_{44}x_1x_2x_3(x_4^3 - x_1x_2x_3) \\ & - 2x_1x_2x_3x_4\left[\begin{aligned}(a_{12} + a_{34})(x_1x_2 - x_3x_4) + (a_{13} + a_{24})(x_1x_3 - x_2x_4) \\ + (a_{23} + a_{14})(x_2x_3 - x_1x_4)\end{aligned}\right] = 0. \end{aligned}$$

La surface F′ passe doublement par les arêtes du tétraèdre fondamental et est par suite de genres zéro et de bigenre un ($p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$). Les congruences G, G′, comme les surfaces F, F′, sont distinctes (*).

L'involution I_2', sur la surface F′, possède les quatre points unis B, B_1, B_2, B_3. Par suite, la congruence G′ est de genres zéro et de bigenre un, car à une droite de G′ correspond un seul couple de points de I_2'.

On peut obtenir, pour la congruence G′, les mêmes propriétés

(*) Les surfaces anallagmatiques du sixième ordre forment deux systèmes linéaires de même dimension six. Les surfaces de l'un des systèmes, auquel appartient F, passent par les points A_1, A_2, A_3, A_4; celles de l'autre système, auquel F′ appartient, passent par B, B_1, B_2, B_3. En général, les surfaces anallagmatiques d'un ordre donné se répartissent en deux systèmes linéaires; les surfaces de l'un des systèmes passent par 0 ou par 4 points unis de T; les surfaces du second système passent par les points unis restants. Ainsi, les surfaces anallagmatiques du quatrième ordre forment deux systèmes : l'un, de dimension six, l'autre de dimension cinq. Les surfaces de ce dernier système, représentées par l'équation (2), passent par les huit points unis de T; les surfaces du premier système ne passent par aucun point uni.

que pour la congruence G. On trouve en particulier que les droites de G′ passant par un des points B, B_1, B_2, B_3 sont les droites d'un faisceau de rayons dont le plan est tangent à F′ au point considéré, et les quatre droites joignant le point considéré aux sommets du tétraèdre fondamental.

8. En résumé : *Si une surface du sixième ordre, de genres* $p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$, *passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre, est anallagmatique, elle contient une involution d'ordre deux et de genres* $p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$, *dont les groupes sont formés par des couples de points homologues. Une image de cette involution s'obtient en considérant la congruence d'ordre sept et de classe trois, lieu des droites joignant les couples de points de l'involution; cette congruence est aussi le lieu des droites appartenant à* ∞^1 *quadriques d'un système linéaire* ∞^3; *elle contient quatre faisceaux de rayons ayant pour sommets les points unis de l'involution et pour plans, les plans tangents en ces points à la surface considérée.*

Comme nous l'avons fait remarquer au début de ce travail, ces résultats pourraient s'étendre au cas de surfaces anallagmatiques d'ordre quelconque. Sur une telle surface, on a une involution d'ordre deux présentant 0, 4 ou 8 points unis, et une image de cette involution s'obtient en considérant la congruence, appartenant au complexe Σ, lieu des droites passant par les points des groupes de l'involution.

Marcel HAYEZ, imprimeur, rue de Louvain, 112, Bruxelles.