# Hommage à Federigo Enriques à l'occasion du centenaire de sa naissance

Lucien Godeaux

## Hommage à Federigo Enriques à l'occasion du centenaire de sa naissance

Federigo ENRIQUES naquit à Livourne le 5 janvier 1871 (1) et fut reçu Dottore in Matematica par l'Université de Pise en 1891. Il fut ensuite envoyé à Rome pour y suivre les cours de Cremona, mais ce n'est pas sous la direction de l'éminent géomètre qu'il travailla, mais sous celle d'un jeune professeur: Guido Castelnuovo. Celui-ci avait été l'élève de Veronese à l'Université de Padoue, puis l'assistant d'Enrico d'Ovidio à l'Université de Turin. Il y connut Corrado Segre (2) et de la collaboration de ces deux géomètres devait naître un exposé de la *Géométrie sur une courbe algébrique* connu sous le nom de méthode hyperspatiale. On doit également à Castelnuovo une théorie des systèmes linéaires de courbes planes envisagée à l'époque sous un jour nouveau (3). Ces travaux furent le point de départ d'Enriques qui se proposa d'étudier la *Géométrie sur une surface algébrique*. Bien que Noether ait publié un important mémoire sur cette question, on peut dire que tout était à faire et qu'il importait de donner à la théorie une assiette rigoureuse.

Dans la notice qu'il a consacrée à Enriques en 1947 (4), Castelnuovo écrit: « Je me suis vite aperçu qu'Enriques était un médiocre lecteur. Dans les pages qu'il avait sous les yeux, il ne voyait pas ce qui était écrit, mais ce que son esprit y projetait ». Et Castelnuovo ajoute qu'alors commencèrent les interminables promenades par les rues de Roma où la géométrie algébrique était l'objet des entretiens. Enriques exposait ce qu'il venait de

(1) Le même jour naissait à Mantoue Gino Fano, auquel on doit de belles recherches de Géométrie algébrique, notamment sur les conditions de rationnalité des variétés algébriques à trois dimensions.

(2) Corrado Segre (1863-1924) fut Associé de notre Académie (1903). Il a eu une très grande influence sur le développement de l'École géométrique italienne, en appelant notamment l'attention des jeunes géomètres sur les liens entre la géométrie et l'analyse.

(3) Lors de la commémoration du centenaire de la naissance de Castelnuovo, nous avons rendu compte de ses travaux dans une note sur *La Géométrie algébrique italienne* (Atti del Simposio internazionale di Geometria algebrica, Rome, 1965, pp. XVII-XXXVI). Castelnuovo fut également Associé de notre Académie (1946).

(4) *Federigo Enriques* (Rendiconti della Accademia Naz. dei Lincei, 11 janvier 1947). Notice biographique reproduite dans le tome I des *Memorie scelte di Geometria* d'Enriques (Bologna, Zanichelli, 1956, pp. IX-XXII).

trouver et Castelnuovo soumettait ces questions à une critique sévère. Et c'est ainsi que fut construite la théorie des surfaces algébriques suivant les méthodes italiennes.

Dès 1893 Enriques publiait le résultat de ses recherches dans les Mémoires de l'Académie de Turin, ville où il avait fait un court séjour près de Corrado Segre. Mais cet exposé de la théorie ne satisfaisait pas l'auteur et en 1896, alors qu'il venait de commencer son enseignement à l'Université de Bologne, il publiait son *Introduzione alla Geometria sopra le superficie algebriche* (1), qui devint immédiatement classique et est restée classique. Lorsque l'on étudie ce mémoire, on est frappé par la clarté et l'harmonie des questions traitées; on se rend difficilement compte qu'il est l'œuvre d'un jeune homme de 25 ans.

Dans la Géométrie sur une courbe algébrique C, l'outil utilisé est la série linéaire de groupes de points, c'est-à-dire un ensemble infini de groupes de $n$ points de la courbe tel que $r$ points de celle-ci appartiennent à un seul groupe (cette définition est suffisante pour $r > 1$). La série est dite d'ordre $n$ et de dimension $r$. On définit alors une opération fonctionnelle: l'opération d'adjonction, qui fait correspondre à une série linéaire A une série linéaire A′, l'adjointe à A. Eh bien, si la courbe C n'est pas rationnelle, il existe une série linéaire K telle qu'un de ses groupes, joint à un groupe de la série A, donne un groupe de la série A′. La série K est appelée *série canonique* de la courbe C, elle est d'ordre $2p-2$ et de dimension $p-1$, $p$ étant le genre de la courbe. Elle ne dépend pas du choix de la série A et si deux courbes sont liées par une correspondance birationnelle, leurs séries canoniques se correspondent (2).

Sur une surface algébrique F, l'outil de recherches fut d'abord le système linéaire de courbes algébriques, c'est-à-dire un ensemble infini de courbes algébriques tracées sur la surface tel que par $r$ points de celle-ci passe en général une seule courbe de l'ensemble (Cette définition suffit pour $r > 1$). Un système linéaire de courbes C est représenté par $|\,C\,|$ et $r$ est sa dimension. L'opération d'adjonction sur une surface fait correspondre à un système linéaire $|\,C\,|$ les courbes C′ qui découpent sur toute courbe C la série canonique de celle-ci. On démontre que les courbes C′ forment un système linéaire $|\,C'\,|$, l'adjoint à $|\,C\,|$, et qu'il existe un système linéaire $|\,K\,|$

(1) Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL), 1896, pp. 1-81; *Memorie Scelte*, tome I, pp. 212-312).

(2) Nous nous excusons près des géomètres qui liront cette note de l'exposé sommaire que nous avons fait du théorème fondamental, mais cette lecture fut faite devant la Classe des Sciences de l'Académie qui comprend fatalement peu de mathématiciens et nous essayions d'être compris par le plus grand nombre.

tel qu'une courbe K jointe à une courbe C donne une courbe de | C′ |. Le système | K | est le *système canonique* de la surface et est indépendant du choix du système | C |. On représente par $p_g - 1$ la dimension du système canonique, $p_g$ étant le genre géométrique de la surface F. Le genre d'une courbe K est le genre linéaire $p^{(1)}$ de la surface et deux courbes K se rencontrent en $p^{(1)} - 1$ points. Les nombres $p_g$, $p^{(1)}$ sont invariants dans les transformations birationnelles.

On peut calculer le genre d'une courbe algébrique de deux manières: l'une, géométrique, qui a été esquissée plus haut, l'autre arithmétique, qui revient au calcul de la dimension de certains systèmes de courbes planes. Ces méthodes peuvent s'étendre à la théorie des surfaces, mais la seconde donne pour la dimension du système canonique un nombre qui peut être inférieur à $p_g - 1$. Cette dimension, $p_a - 1$, obtenue par le calcul est aussi invariante vis-à-vis des transformations birationnelles, comme Enriques l'a démontré par une analyse très fine. Le nombre $p_a$ est appelé genre arithmétique de la surface.

Enriques est revenu plus tard (1901) sur la définition du système adjoint, dans un mémoire qui est le résumé d'un cours fait à Bologne (1). Dans un système linéaire de courbes de dimension deux (réseau), il y a une infinité de courbes ayant un point double variable; le lieu de ce point est la jacobienne du réseau. Si l'on considère les jacobiennes J des différents réseaux tirés d'un système linéaire | C |, on obtient le jacobien | J | de | C |. Une courbe adjointe C′ à | C |, jointe à deux courbes C, donne une courbe de | J |.

Il faut ajouter que la collaboration d'Enriques avec Castelnuovo ne s'est pas arrêtée aux promenades de Rome. Plusieurs mémoires importants sur la théorie des surfaces algébriques portent leurs deux signatures. D'ailleurs cette théorie des surfaces est redevable à Castelnuovo de recherches fondamentales (2).

La théorie une fois établie, il s'agissait d'en montrer la fécondité. Ce fut le début d'une série de recherches des deux géomètres consacrées à la détermination de surfaces soit par l'existence de certains systèmes de courbes,

---

(1) *Intorno ai fondamenti della Geometria sopra le superficie algebriche* (Atti della Accademia di Torino, 1901, pp. 9-40). Reproduit dans les *Memorie Scelte,* tome II pp. 65-84 (Bologne, Zanichelli, 1959).

Qu'il nous soit permis de dire que c'est l'étude de ce mémoire qui suscita en 1909 notre admiration et notre enthousiasme pour la Géométrie italienne. Je connaissais à cette époque un élève du Collegio dei Fiaminghi, le regretté Dr. Sluys, qui me mit en rapport avec Enriques. Dès mes études finies en Belgique, je partis pour Bologne.

(2) Voir pour un exposé des travaux de Castelnuovo notre note sur *La Géométrie algébrique italienne* citée plus haut.

soit par des valeurs des genres définis plus haut. Mentionnons qu'Enriques réussit à démontrer qu'une surface contenant un faisceau de courbes rationnelles est référable à une réglée.

Un exemple typique d'application de la théorie est la belle étude des surfaces hyperelliptiques due à Enriques et Severi, couronnée par l'Académie des Sciences de Paris (1).

Dans ses premières recherches, Enriques avait constaté que les adjointes $C'$ à une courbe C ne découpent sur celle-ci la série canonique complète que si $p_g = p_a$. Peu après, Castelnuovo démontra que si $p_g > p_a$, cette série a le défaut $q = p_g - p_a$. Les surfaces pour lesquelles $p_g = p_a$ sont appelées surfaces régulières, toute courbe algébrique tracée sur une telle surface appartenant nécessairement à un système linéaire. Au contraire, sur les surfaces appelées irrégulières, où $q > 0$, une courbe algébrique C tracée sur la surface appartient à un système continu non linéaire $\{ C \}$ et ce système est formé par une série continue dépendant de $q$ paramètres de systèmes linéaires $| C |$. Sur une courbe C, les courbes du système continu $\{ C \}$ infiniment voisines de C, découpent sur celle-ci une série linéaire complète. C'est là un théorème dû à Enriques; il a permis à Castelnuovo, à Enriques et à Severi de démontrer l'identité des surfaces irrégulières avec les surfaces possédant des intégrales de Picard, théorème démontré plus tard par voie transcendante par Poincaré (2).

La Géométrie algébrique n'a pas constitué les seules contributions d'Enriques à la Mathématique; il s'est aussi occupé des fondements de cette Science et l'article sur les *Principes de la Géométrie* dans l'Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften lui fut confié (3).

Il s'est également occupé de l'enseignement des mathématiques. Il a publié, en collaboration avec U. Amaldi, des cours de géométrie à l'usage de l'enseignement moyen et surtout, avec plusieurs collaborateurs choisis avec soin, un ouvrage sur les *Questioni riguardanti le matematiche elementari*, guide précieux pour les professeurs de mathématiques, qui fut traduit en plusieurs langues.

(1) *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques* (Acta Mathematica, 1909, pp. 283-392, 1910, pp. 321-403). Reproduit dans le tome II des *Memorie scelte*.

Francesco Severi (1879-1961), élève de Corrado Segre à Turin, fut en 1903 assistant d'Enriques à Bologne. Il s'était occupé jusqu'à cette époque de Géométrie énumérative. On lui doit à partir de 1903 de nombreux travaux de grande importance sur la Géométrie algébrique. Severi fut Associé de notre Académie (1952).

(2) Pour l'historique de ce théorème voir notre discours sur *La Géométrie algébrique* (Bulletin de l'Académie royale de Belgique, 1947, pp. 901-918).

(3) Tome III, première partie, 1907, pp. 1-129. La traduction française est parue en 1911.

Les cours de Géométrie projective et de Géométrie descriptive qu'il professa à l'Université de Bologne furent également publiés et eurent plusieurs éditions en italien, en français et en allemand. En collaboration avec O. Chisini, il a écrit un très important ouvrage en quatre volumes, les *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche* ([1]).

Enfin, parmi les travaux qui parurent après sa mort, se trouve un exposé sur les *Superficie algebriche* qui est en quelque sorte son testament mathématique ([2]).

Les travaux mathématiques d'Enriques eussent suffi à lui donner une place de premier plan dans le monde scientifique, mais ce n'est là qu'une partie de son œuvre. En 1906 paraissait un volume sur les *Problemi della Scienza* qui suscita un grand intérêt parmi les philosophes et qui fut traduit dans plusieurs langues ([3]). Cela lui valut de présider le IV[e] Congrès international de Philosophie qui se tint à Bologne en 1911.

Dans l'exposé qu'il fit des principes de la géométrie, Enriques associe au point de vue logique le point de vue psychologique et c'est dans cet esprit que furent écrits les problemi della scienza. Dans une première partie, il examine les procédés psychologiques et logiques au moyen desquels les impressions des sens sont coordonnées et transformées pour donner naissance à des théories scientifiques. Dans la seconde partie, il soumet à une critique aiguë les fondements des sciences mathématiques, physiques et biologiques. Pour rendre compte de l'intérêt que suscita ce volume, disons que la première édition fut épuisée en trois ans, malgré la publication de traductions en français, en anglais et en allemand. Comme Enriques l'écrit dans la préface, ce volume et quelques articles qui l'ont précédé, résume ses réflexions faites de 1890 à 1900, car déjà sur les bancs de l'Université, il s'était intéressé à ces questions et aussi à l'histoire des Sciences.

Il y a deux manières de faire l'histoire des Sciences; l'une, que nous serions tenté d'appeler anecdotique, consiste à retracer la vie de savants; nous ne nierons pas sa valeur. L'autre consiste à étudier la filiation des idées et c'est cette méthode qui fut adoptée par Enriques. C'est cette forme que revêt l'histoire de la pensée scientifique qu'il écrivit en collaboration avec M. G. de Santillana ([4]) et bien d'autres travaux.

---

([1]) Bologna, Zanichelli, 1915, 1918, 1924, 1934. Une traduction en français du tome III a paru en 1926 (Lib. Gauthier-Villars).

([2]) Bologna, Zanichelli, 1949.

([3]) Bologna, Zanichelli, 1906. Une partie de ce volume, *Les concepts fondamentaux de la Science,* traduite par L. Rougier, est parue en 1912 chez Flammarion. Nous l'avons trouvée en 1916 dans une librairie du Front belge, à La Panne.

([4]) *Storia del Penserio Scientifico* (Bologna, Zanichelli, 1932). Des extraits en français et d'autres travaux ont été publiés par la librairie Hermann.

Lorsque l'on parcourt la liste des travaux d'Enriques, reproduite dans le tome III de ses *Memorie Scelte* (1), on est frappé par la diversité des objets traités, qui vont de la mathématique à l'histoire des sciences en passant par la logique et la philosophie. Cela montre le génie de l'homme.

Nous avons été l'élève d'Enriques en 1912 et en 1913-14. Son enseignement avait la forme péripatétique (2). Le matin, avec son assistant, le regretté Chisini (3), nous allions le chercher soit à la fin de sa leçon soit chez lui. Et il nous entraînait à travers les portiques de Bologne, soit parfois à San Michele in Bosco, sur les derniers contreforts de l'Apennin. Nous lui exposions l'état de nos recherches, il nous donnait de judicieux conseils et nous ouvrait des voies nouvelles. C'est de cette époque que datent nos recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique.

De 1893 à 1922, Enriques fit les cours de Géométrie projective et descriptive à l'Université de Bologne. A cette date, il fut appelé à Rome pour y enseigner la Géométrie supérieure. Il y eut notamment comme élèves notre Confrère M. Pol Burniat et M. Paul Libois.

Enriques s'est éteint dans les premières heures du 14 juin 1946. Comme l'écrit Castelnuovo, une grande lumière s'éteignait. Enriques était membre de l'Académie Nationale des Lincei et de nombreuses Académies italiennes, Correspondant de l'Institut, Associé de notre Académie et Correspondant de la Société royale des Sciences de Liège. Il était entre autres Docteur Honoris Causa de l'Université de cette ville.

Nous avons essayé de faire comprendre le génie d'Enriques. A l'occasion du centenaire de sa naissance, nous saluons avec un affectueux respect sa mémoire. Grâce à lui, il nous a été donné de goûter la merveilleuse beauté de la Géométrie algébrique italienne.

L. GODEAUX

(1) L'Académie Nationale des Lincei a publié trois volumes comprenant les principaux mémoires de géométrie d'Enriques. *Memorie Scelte di Geometria* (Bologne, Zanichelli, 1956, 1959, 1966).

(2) Ce genre d'enseignement semble avoir été courant en Italie. Comme on l'a vu, c'est la forme adoptée par Castelnuovo en 1892 à Rome. C'était aussi la forme adoptée par Corrado Segre et Castelnuovo à Turin vers 1889-90. On disait: « La geometria sopra una curva algebrica è nata via Po », faisant allusion aux discussions des deux géomètres se promenant dans cette rue.

(3) Oscar Chisini (1889-1967) fut professeur aux Universités de Cagliari, de Modène puis de Milan. Ses élèves ont publié une sélection de ses *Note e Memorie di Geometria* (Bologna, Zanichelli, 1961). Le *Periodico di Matematiche* dont il avait longtemps assuré la direction, lui a consacré un volume en 1968. C'est à l'initiative de Chisini que l'Institut Mathématique de l'Université de Milan porte le nom de Federigo Enriques.