ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE
Extrait des *Bulletins de la Classe des Sciences*. Séance du 9 octobre 1926, n° 10, pp. 726-741.

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE.

Recherches sur les surfaces algébriques de genres zéro et de bigenre un.

par LUCIEN GODEAUX, professeur à l'Université de Liége (*).

(Première communication.)

Nous nous proposons, dans cette note et dans celles qui lui feront suite, d'établir quelques propriétés des surfaces de genres zéro et de bigenre un ($p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$), particulièrement en ce qui concerne les correspondances rationnelles entre ces surfaces.

L'existence d'une surface de genres zéro et de bigenre un a été prouvée par M. Enriques (**), qui, plus tard (***), fit une étude approfondie de cette surface. Cette surface est caractérisée soit par $p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$, soit par $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$. Tout système de courbes de genre π tracé sur la surface a le degré $2\pi - 2$ et la dimension $\pi - 1$. L'adjoint de ce système présente les mêmes caractères et les doubles d'un système et de son adjoint sont équivalents. On peut toujours ramener une surface de genres zéro et de bigenre un, par une transformation birationnelle, à une surface du sixième ordre passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre.

M. Fano (IV), en déterminant les congruences de droites du

(*) Présenté par M. C. Servais.

(**) F. ENRIQUES, *Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche* (n° 39). (MEMORIA SOC. ITAL. SCIENZE, 1896.)

(***) IDEM, *Sopra le superficie algebriche uno.* (IDEM, 1906.)

(IV) FANO, *Nuove ricerche sulle congruenze di rette del 3° ordine prive di linea singolare.* (MEM. R. ACAD. TORINO, 1901.)

troisième ordre privées de lignes singulières, a démontré que la congruence d'ordre sept et de classe trois, lieu des droites appartenant à ∞^1 quadriques d'un système linéaire ∞^3 sans points-base, était de genres zéro et de bigenre un. Précisément, la surface d'ordre dix, image, au sens de Klein, dans un espace linéaire à cinq dimensions S_5, de la congruence envisagée, a les genres $p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$. Toute surface de genres zéro et de bigenre un peut d'ailleurs se ramener birationnellement à ce type.

Une surface de genres zéro et de bigenre un possède un groupe infini discontinu de transformations birationnelles en elle-même, groupe dont l'existence a été signalée par M. Enriques et dont l'étude fut faite par M. Fano (*). Celui-ci a également considéré quelques cas particuliers intéressants de la surface.

MM. Enriques et Severi (**) ont remarqué incidemment qu'une involution d'ordre deux, appartenant à une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$), privée de points unis, avait pour image une surface de genres $p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$. M. Enriques (***) est parvenu à démontrer que, réciproquement, toute surface de genres $p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$ est l'image d'une involution d'ordre deux, sans points unis, appartenant à une surface de genres un. Nous avons ajouté (IV) que cette surface de genres un possède trois transformations birationnelles involutives en elle-même, deux à deux permutables, engendrant trois involutions, l'une rationnelle, l'autre de genres un, la troisième de genres zéro et de bigenre un.

(*) Fano, *Superficie algebriche di genere zero e bigenere uno, e loro casi particolari.* (Rend. Circ Matem. Palermo, 1910, t. XXIX.)

(**) E. Enriques et F. Severi, *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques* (première partie). (Acta Mathematica, 1909, t. XXXII et XXXIII.)

(***) F. Enriques, *Un osservazione relativa alle superficie di bigenere uno.* (Rend. R. Accad. Bologna, 1908.)

(IV) L. Godeaux, *Sur les surfaces de genres zéro et de bigenre un.* (Rend. R. Accad. Lincei, 1er semestre 1914.)

Nous avons étudié les involutions de genres zéro et de bigenre un appartenant à une surface de mêmes genres (*). Ces involutions ne possèdent qu'un nombre fini de points unis et sont d'ordre 2, 3, 4, 6 ou 8. En particulier, nous avons indiqué deux plans doubles à l'un desquels peut toujours se ramener une surface de genres $p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$, image d'une involution d'ordre deux appartenant à une surface de mêmes genres (**). Récemment (***), nous avons effectivement construit un de ces plans doubles. Dans cette première note, nous construirons un plan double du second type.

1. Soient $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4)$ deux polynômes entiers, rationnels et homogènes du second degré. La surface de genres zéro et de bigenre un ($p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$) peut toujours être ramenée, par une transformation birationnelle, à la surface Φ, d'équation

$$f(x_2x_3x_4, x_3x_4x_1, x_4x_1x_2, x_1x_2x_3) + x_1x_2x_3x_4\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0. \quad (1)$$

Les sections planes Γ de Φ sont de genre quatre et forment un système complet. La surface du sixième ordre Φ passe doublement par les arêtes du tétraèdre de référence et les sommets de ce tétraèdre sont des points triples de la surface. La surface Φ est le modèle projectif des surfaces de genres $p_a = p_g = P_3 = 0$, $P_2 = 1$ considéré par M. Enriques.

Considérons les quadriques

$$\lambda_1x_1x_4 + \lambda_2x_2x_3 + \lambda_3x_2x_4 = 0, \quad (2)$$

(*) L. Godeaux, *Sur les involutions appartenant à une surface de genres* $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$. (Bull. Soc. Math. de France, 1913.) *Détermination des correspondances rationnelles existant entre deux surfaces de genres* $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$. (Bull. Acad. roumaine, 1913.) *Mémoire sur les surfaces algébriques de genres zéro et de bigenre un.* (Bull. Soc. Math. France, 1915.) *Recherche des involutions de genres zéro, bigenre un, appartenant à une surface de genres un.* (Annaes Accad. Porto, 1916.)

(**) Idem, *Mémoire sur les surfaces algébriques doubles ayant un nombre fini de points de diramation.* (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1914.)

(***) Idem, *Sur un plan double de genres zéro et de bigenre un.* (Bull. Acad. roy. de Belgique, 1926.)

passant par trois arêtes du tétraèdre de référence. Ces quadriques découpent sur la surface Φ des courbes Γ_1 de genre trois, formant un réseau $|\Gamma_1|$ de degré virtuel 4, ayant deux points-base (voir Enriques, second mémoire cité)

$$x_1 = x_3 = x_4 = 0, \qquad x_1 = x_2 = x_3 = 0.$$

En rapportant projectivement les quadriques (2) aux droites d'un plan, on obtient un plan double Φ', birationnellement identique à Φ. Si z_1, z_2, z_3 sont les coordonnées projectives des points de ce plan, posons

$$\frac{z_1}{x_1 x_4} = \frac{z_2}{x_2 x_3} = \frac{z_3}{x_2 x_4}. \tag{3}$$

Deux des quadriques (2) ont en commun une droite variable avec ces quadriques, s'appuyant sur les arêtes $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = x_4 = 0$ du tétraèdre de réference. Cette droite rencontre Φ, en dehors de ces arêtes, en deux points qui, par la projectivité (3), correspondent à un même point du plan (z_1, z_2, z_3). Le lieu des points de ce plan qui correspondent à deux points confondus de Φ est la courbe de diramation du plan double.

Des formules (3), on déduit

$$\frac{x_1}{z_1} = \frac{x_2}{z_3} = \lambda, \qquad \frac{x_3}{z_2} = \frac{x_4}{z_3} = \mu. \tag{4}$$

En portant dans l'équation (1) de Φ les valeurs de x_1, x_2, x_3, x_4 tirées des formules (4), on obtient, après réductions,

$$f(\mu z_2 z_3, \mu z_1 z_2, \lambda z_1 z_3, \lambda z_1 z_2) + z_1 z_2 \varphi(\lambda z_1, \lambda z_3, \mu z_2, \mu z_3) = 0. \tag{5}$$

Les coordonnées des points de Φ qui correspondent à un point (z_1, z_2, z_3) du plan seront données par (4), λ et μ satisfaisant à l'équation (5). On obtiendra donc la courbe de diramation du plan double en écrivant que les racines de l'équation (5) sont égales.

Posons

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv f_{12}(x_1, x_2) + f_{34}(x_3, x_4) + f_0(x_1, x_2, x_3, x_4),$$

où

$$f_{12}(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2,$$
$$f_{34}(x_1, x_2) = a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 + 2a_{34}x_3x_4,$$
$$f_0(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2(a_{13}x_1x_3 + a_{14}x_1x_4 + a_{23}x_2x_3 + a_{24}x_2x_4),$$

et

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = \varphi_{12}(x_1, x_2) + \varphi_{34}(x_3, x_4) + \varphi_0(x_1, x_2, x_3, x_4),$$
$$\varphi_{12}(x_1, x_2) = b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + 2b_{12}x_1x_2,$$
$$\varphi_{34}(x_3, x_4) = b_{33}x_3^3 + b_{44}x_4^2 + 2b_{34}x_3x_4,$$
$$\varphi_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2(b_{13}x_1x_3 + b_{14}x_1x_4 + b_{23}x_2x_3 + b_{24}x_2x_4).$$

Moyennant ces notations, l'équation (5) s'écrit

$$\left.\begin{aligned}&\lambda^2[z_1^2 f_{34}(z_3, z_2) + z_1z_2\varphi_{12}(z_1, z_3)]\\ &\quad + 2\lambda\mu z_1z_2\begin{bmatrix}(a_{13}+b_{24})z_3^2 + (a_{23}+b_{14})z_1z_3\\ \quad + (a_{14}+b_{23})z_2z_3 + (a_{24}+b_{13})z_1z_2\end{bmatrix}\\ &\quad + \mu^2[z_2^2 f_{12}(z_3, z_1) + z_1z_2\varphi_{34}(z_2, z_3)] = 0.\end{aligned}\right\} \quad (5')$$

La courbe de diramation du plan double Φ' aura donc pour équation

$$\left.\begin{aligned}&z_1^2z_2^2\begin{bmatrix}(a_{13}+b_{24})z_3^2 + (a_{23}+b_{14})z_1z_3\\ \quad + (a_{14}+b_{23})z_2z_3 + (a_{24}+b_{13})z_1z_2\end{bmatrix}^2\\ &- z_1z_2[z_1f_{34}(z_3, z_2) + z_2\varphi_{12}(z_1, z_3)]\\ &\qquad [z_2f_{12}(z_3, z_1) + z_1\varphi_{34}(z_2, z_3)] = 0.\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Cette courbe est formée des deux droites $z_1 = 0$, $z_2 = 0$ et d'une courbe de sixième ordre ayant deux tacnodes en $z_1 = z_3 = 0$, $z_2 = z_3 = 0$ et un point double au point d'intersection $z_1 = z_2 = 0$ des tangentes tacnodales. Ce résultat est conforme à celui qui avait été obtenu par M. Enriques (second mémoire cité) et en est une vérification par le calcul.

2. Envisageons le cas particulier où l'on a

$$a_{13} + b_{24} = 0, \quad a_{23} + b_{14} = 0, \quad a_{14} + b_{23} = 0, \quad a_{24} + b_{13} = 0.$$

La surface Φ a alors pour équation

$$\left.\begin{aligned}x_3^2x_4^2f_{12}(x_2, x_1) + x_1^2x_2^2f_{34}(x_4, x_3) + x_1x_2x_3x_4[\varphi_{12}(x_1, x_2)\\ + \varphi_{34}(x_3, x_4)] = 0.\end{aligned}\right\} \quad (1')$$

La courbe de diramation du plan double Φ' se compose des droites

$$z_1 = 0, \qquad z_2 = 0$$

et de deux cubiques

$$z_1 f_{34}(z_3, z_2) + z_2 \varphi_{12}(z_1, z_3) = 0, \tag{7}$$

$$z_2 f_{12}(z_3, z_1) + z_1 \varphi_{34}(z_2, z_3) = 0, \tag{8}$$

passant par les sommets du triangle de référence et tangentes en $z_1 = z_3 = 0$ à la droite $z_2 = 0$, en $z_2 = z_3 = 0$ à la droite $z_1 = 0$. Il en résulte que le plan double Φ' doit représenter une involution d'ordre deux, appartenant à une surface de genres $p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$, les quatre points de diramation étant les points communs aux cubiques (7) et (8), en dehors des sommets du triangle de référence (*). Nous allons construire la surface support de cette involution.

Commençons par observer qu'à une courbe Γ, section de Φ par le plan

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0,$$

correspond, sur le plan double Φ', la courbe

$$\left.\begin{aligned} &(u_3 z_2 + u_4 z_3)^2 \left[z_1^2 f_{34}(z_3, z_2) + z_1 z_2 \varphi_{12}(z_1, z_3)\right] \\ &\quad + (u_1 z_1 + u_2 z_3)^2 \left[z_2^2 f_{12}(z_3, z_1) + z_1 z_2 \varphi_{34}(z_2, z_3)\right] = 0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Cette courbe, du sixième ordre, possède deux tacnodes en $x_1 = x_3 = 0$, $x_2 = x_3 = 0$, les tangentes tacnodales étant respectivement $x_2 = 0$ et $x_1 = 0$; un point double en $x_1 = x_2 = 0$ et un point double variable à l'intersection des droites

$$u_3 z_2 + u_4 z_3 = 0, \qquad u_1 z_1 + u_2 z_3 = 0.$$

De plus, la courbe (9) passe simplement par les quatre points de diramation, communs aux courbes (7) et (8).

Continuons à désigner par Γ les courbes (9) du plan double Φ' obtenues en faisant varier u_1, u_2, u_3, u_4. Désignons par γ_1, γ_2, γ_3, γ_4 les courbes rationnelles de degré -2 équivalentes,

(*) *Mémoire sur les surfaces doubles* ... (loc. cit.).

au point de vue des transformations birationnelles, aux quatre points de diramation. D'après la théorie des surfaces doubles, il doit exister, sur la surface Φ', un système linéaire $|\Gamma_0|$, de degré 8, de genre 5 et de dimension 4, tel que l'on ait

$$2\Gamma_0 = 2\Gamma + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4.$$

Les courbes Γ_0 ne peuvent passer par les points de diramation.

Considérons le système de cubiques

$$\lambda_1 z_1^2 z_2 + \lambda_2 z_2^2 z_1 + \lambda_3 z_1 z_3^2 + \lambda_4 z_2 z_3^2 + \lambda_5 z_1 z_2 z_3 = 0.$$

Ces courbes passent par les sommets du triangle de référence et sont tangentes à $x_1 = 0$ en $x_2 = x_3 = 0$, à $x_2 = 0$ en $x_1 = x_3 = 0$. Considérées comme des courbes doubles du plan double Φ', elles sont de genre 5 et leur système est de degré 8 et de dimension 4. De plus, elles rencontrent les courbes Γ en huit points variables. Ces courbes possèdent donc tous les caractères des courbes Γ_0. Nous verrons qu'elles coïncident effectivement avec ces courbes.

3. Aux courbes (7) et (8) correspondent, sur la surface Φ, des courbes découpées par les surfaces, respectivement

$$x_1 x_2 f_{34}(x_4, x_3) + x_3 x_4 \varphi_{12}(x_1, x_2) = 0, \qquad (10)$$

$$x_3 x_4 f_{12}(x_2, x_1) + x_1 x_2 \varphi_{34}(x_3, x_4) = 0. \qquad (11)$$

Ce sont des surfaces de quatrième ordre, passant doublement par les arêtes $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = x_4 = 0$ du tétraèdre de référence et simplement par les autres arêtes de ce tétraèdre. Elles ont encore en commun quatre droites s'appuyant sur $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = x_4 = 0$.

Observons que si l'on ajoute membre à membre les équations (10) et (11) après avoir multiplié les deux membres de la première par $x_1 x_2$, ceux de la seconde par $x_3 x_4$, on retrouve l'équation (1′) de la surface Φ. Par suite, celle-ci contient les quatre droites communes aux surfaces (10), (11), en dehors des arêtes du tétraèdre de référence. Ces droites correspondent évidemment aux points de diramation; nous les désignerons encore par $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$.

Aux cubiques planes du système linéaire ∞^4 considéré plus haut correspondent, sur la surface Φ, des courbes du huitième ordre découpées sur la surface par les surfaces

$$\lambda_1 x_1^2 x_3 x_4 + \lambda_2 x_1 x_2 x_3^2 + \lambda_3 x_1 x_2 x_4^2 + \lambda_4 x_2^2 x_3 x_4 + \lambda_5 x_1 x_2 x_3 x_4 = 0. \quad (12)$$

Ce sont des surfaces du quatrième ordre passant doublement par les droites $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = x_4 = 0$ et simplement par les autres arêtes du tétraèdre de référence. Les surfaces (10) et (11) appartiennent au système (12).

Les surfaces (10) et (11) déterminent, dans le système (12), un faisceau dont les surfaces découpent, sur Φ, des courbes variables du quatrième ordre, s'appuyant en deux points (en dehors des arêtes du tétraèdre) sur chacune des droites $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$.

4. Désignons par F la surface de genres zéro et de bigenre un contenant une involution I_2 d'ordre deux dont Φ soit l'image. Il doit exister, sur la surface F, un système linéaire complet $|C|$, de genre 9, de degré 16 et de dimension 8, transformé en lui-même par la transformation birationnelle T qui engendre I_2. De plus, $|C|$ doit contenir deux systèmes linéaires partiels composés au moyen de I_2; l'un, ∞^3, correspond au système $|\Gamma|$ de Φ, l'autre, ∞^4, correspond au système $|\Gamma_0|$.

Prenons, pour modèle projectif de F, la surface de l'espace linéaire S_8 à huit dimensions, dont les sections hyperplanes soient les courbes $|C|$, et désignons par $X_1, X_2, \ldots, X_9$ les coordonnées ponctuelles projectives de cet espace S_8.

Admettons que le système $|\Gamma_0|$ sur Φ soit le système de courbes du huitième ordre découpées par les surfaces (12) et posons

$$\frac{X_1}{x_1} = \frac{X_2}{x_2} = \frac{X_3}{x_3} = \frac{X_4}{x_4} = \rho, \quad (13)$$

$$\frac{X_5}{x_1^2 x_3 x_4} = \frac{X_6}{x_2^2 x_3 x_4} = \frac{X_7}{x_3^2 x_1 x_2} = \frac{X_8}{x_4^2 x_1 x_2} = \frac{X_9}{x_1 x_2 x_3 x_4} = \sigma. \quad (14)$$

La surface F est représentée dans S_8 par six équations et, en posant les relations (**13**), nous devons pouvoir déduire, de ces équations, les relations (**14**) et l'équation (**1'**) de la surface Φ.

Des formules (**13**) et (**14**), on déduit

$$X_1 X_6 = X_2 X_9, \qquad X_2 X_5 = X_1 X_9, \tag{15}$$

$$X_3 X_8 = X_4 X_9, \qquad X_4 X_7 = X_3 X_9, \tag{16}$$

Posons, pour abréger,

$$\Psi_1 = a_{11} X_6 + a_{22} X_5 + b_{33} X_7 + b_{44} X_8 + 2(a_{12} + b_{34}) X_9,$$

$$-\Psi_2 = b_{11} X_5 + b_{22} X_6 + a_{33} X_8 + a_{44} X_7 + 2(b_{12} + a_{34}) X_9.$$

Nous avons alors

$$\sigma[x_3 x_4 f_{12}(x_2, x_1) + x_1 x_2 \varphi_{34}(x_3, x_4)] = \Psi_1,$$

$$\sigma[x_1 x_2 f_{34}(r_4, x_3) + x_3 x_4 \varphi_{12}(x_1, x_2)] = -\Psi_2.$$

Considérons ensuite les équations

$$X_9 \Psi_1 = X_1 X_2, \qquad X_9 \Psi_2 = X_3 X_4. \tag{17}$$

Il est facile de voir qu'en partant des équations (**13**), (**15**), (**16**) et (**17**), on obtient, par élimination des X, l'équation (**1'**) de la surface Φ. De plus, des relations (**13**), (**15**) et (**16**), on déduit les formules (**14**). Il en résulte que les points de la surface F satisfont aux équations (**15**), (**16**), (**17**).

Observons que des équations (**15**) et de la première des équations (**17**) on déduit

$$X_9^2 = X_5 X_6, \qquad X_1^2 = X_5 \Psi_1, \qquad X_2^2 = X\ \Psi_1.$$

Ces équations et les trois équations dont elles ont été déduites représentent, dans l'espace à cinq dimensions,

$$X_3 = X_4 = X_7 = 0,$$

une surface de Véronèse (*), ou, mieux, elles représentent une surface de Véronèse dans l'espace de cinq dimensions déterminé

(*) BERTINI, *Geometria proiettiva degli iperspazi*. Pise, 1907 (voir chapitre XV).

par les six points pour lesquels $X_3 = X_4 = \Psi_2 = 0$, les autres coordonnées annulant cinq des quantités

$$X_1,\ X_2,\ X_5,\ X_6,\ X_9,\ \Psi_1.$$

Dans l'espace S_8, les équations considérées représentent donc un cône projetant une surface de Véronèse à partir du plan

$$X_1 = X_2 = X_5 = X_6 = X_9 = \Psi_1 = 0.$$

De même, les équations (16) et la seconde des équations (17) représentent un cône projetant une surface de Véronèse à partir du plan

$$X_3 = X_4 = X_7 = X_8 = X_9 = \Psi_2 = 0.$$

Ces cônes sont du quatrième ordre et ont cinq dimensions; ils ont donc en commun uniquement la surface F, d'ordre seize.

5. Les équations de F, dans S_8, sont donc

$$\left.\begin{array}{c} X_1X_6 = X_2X_9,\quad X_2X_5 = X_1X_9,\quad X_9\Psi_1 = X_1X_2,\quad X_9^2 = X_5X_6, \\ X_1^2 = X_5\Psi_1,\quad X_2^2 = X_6\Psi_1, \end{array}\right\} \quad (18)$$

$$\left.\begin{array}{c} X_3X_8 = X_4X_9,\quad X_4X_7 = X_3X_9,\quad X_9\Psi_2 = X_3X_4,\quad X_9^2 = X_7X_8, \\ X_3^2 = X_7\Psi_2,\quad X_4^2 = X_8\Psi_2. \end{array}\right\} \quad (19)$$

Il en résulte que cette surface F est transformée en elle-même par l'homographie involutive T, d'équations

$$\frac{X_1'}{X_1} = \frac{X_2'}{X_2} = \frac{X_3'}{X_3} = \frac{X_4'}{X_4} = \frac{X_5'}{-X_5} = \frac{X_6'}{-X_6} = \frac{X_7'}{-X_7} = \frac{X_8'}{-X_8} = \frac{X_9'}{-X_9}. \quad (T)$$

Les hyperplans

$$\lambda_1X_1 + \lambda_2X_2 + \lambda_3X_3 + \lambda_4X_4 = 0 \quad (20)$$

découpent, sur F, un système linéaire ∞^3 composé au moyen de l'involution I_2 engendrée par T sur cette surface. Par les formules (13), aux courbes de ce système correspondent, sur Φ, les sections planes Γ de cette surface.

Les hyperplans

$$\mu_1X_5 + \mu_2X_6 + \mu_3X_7 + \mu_4X_8 + \mu_5X_9 = 0$$

découpent également, sur F, un système linéaire ∞^4 composé au moyen de l'involution I_2. Aux courbes de ce système correspondent, par les formules (14), les courbes découpées, sur Φ, par les surfaces (12). Ces courbes sont donc bien les courbes Γ_0 telles que

$$2\Gamma_0 \equiv 2\Gamma + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4. \tag{21}$$

Les droites $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ doivent correspondre à des points de F communs à tous les hyperplans (20). On voit facilement que ces quatre points sont précisément donnés par

$$X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = 0, \qquad \Psi_1 = 0, \qquad \Psi_2 = 0,$$
$$X_9^2 = X_5 X_6 = X_7 X_8.$$

Ce sont les quatre points unis de l'involution I_2, et il est facile de voir que ce sont les seuls, car le second espace uni de l'homographie T,

$$X_5 = X_6 = X_7 = X_8 = X_9 = 0,$$

ne rencontre pas F.

En résumé : *La surface du sixième ordre, de genres* $p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$,

$$x_3^2 x_4^2 f_{12}(x_2, x_1) + x_1^2 x_2^2 f_{34}(x_4, x_3) + x_1 x_2 x_3 x_4 [\varphi_{12}(x_1, x_2) + \varphi_{34}(x_3, x_4)] = 0,$$

et le plan double birationnellement équivalent dont la courbe de diramation se compose de deux droites et de deux cubiques passant par le point commun à ces droites et touchant de plus chacune d'elles en un même point, sont images d'une involution d'ordre deux, ayant quatre points de coïncidence, appartenant à une surface de genres $p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$, *intersection, dans un espace à huit dimensions, de deux cônes* (18), (19) *projetant des surfaces de Véronèse à partir de deux plans.*

6. Le système adjoint $|\Gamma'|$ au système $|\Gamma|$ est découpé, sur la surface Φ, par les surfaces cubiques

$$\lambda_1 x_2 x_3 x_4 + \lambda_2 x_3 x_4 x_1 + \lambda_3 x_4 x_1 x_2 + \lambda_4 x_1 x_2 x_3 = 0$$

circonscrites au tétraèdre de référence. On sait que l'on a

$$|2\Gamma| = |2\Gamma'|. \tag{22}$$

Le système $|2\Gamma|$ est d'ailleurs découpé, sur Φ, par les surfaces du sixième ordre passant doublement par les arêtes du tétraèdre de référence.

En comparant les égalités fonctionnelles (21), (23), on obtient

$$2\Gamma_0 \equiv 2\Gamma' + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4.$$

Il en résulte que la surface Φ est l'image d'une involution du second ordre, appartenant à une surface F' de genres zéro et de bigenre un. Les surfaces F et F' ne sont pas nécessairement distinctes à priori, mais nous constaterons qu'ici elles le sont effectivement.

Pour obtenir les équations de la surface F' dans un espace linéaire S_8 à huit dimensions, de coordonnées ponctuelles projectives $Y_1, Y_2, \ldots Y_9$, nous suivrons la même marche que pour obtenir celles de F. Posons

$$\frac{Y_1}{x_2x_3x_4} = \frac{Y_2}{x_3x_4x_1} = \frac{Y_3}{x_4x_1x_2} = \frac{Y_4}{x_1x_2x_3},$$

$$\frac{Y_5}{x_1^2x_3x_4} = \frac{Y_6}{x_2^2x_3x_4} = \frac{Y_7}{x_3^2x_1x_2} = \frac{Y_8}{x_4^2x_1x_2} = \frac{Y_9}{x_1x_2x_3x_4}.$$

On obtient

$$\begin{aligned} Y_1Y_5 &= Y_2Y_9, & Y_2Y_6 &= Y_1Y_9, \\ Y_3Y_7 &= Y_4Y_9, & Y_4Y_8 &= Y_3Y_9, \\ Y_9\Psi_1' &= Y_3Y_4, & Y_9\Psi_2' &= Y_1Y_2, \end{aligned}$$

en désignant par Ψ_1', Ψ_2' ce que deviennent les expressions Ψ_1, Ψ_2 quand on remplace les X par des Y de même indice.

La surface F' est donc l'intersection de deux cônes

$$\left.\begin{aligned} Y_1Y_5 = Y_2Y_9, \quad Y_2Y_6 = Y_1Y_9, \quad Y_1Y_2 = Y_9\Psi_2', \\ Y_9^2 = Y_5Y_6, \quad Y_1^2 = Y_6\Psi_2', \quad Y_2^2 = Y_5\Psi_2', \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

$$\left.\begin{aligned} Y_3Y_7 = Y_4Y_9, \quad Y_4Y_8 = Y_3Y_9, \quad Y_3Y_4 = Y_9\Psi_1', \\ Y_9^2 = Y_7Y_8, \quad Y_3^2 = Y_8\Psi_1', \quad Y_4^2 = Y_7\Psi_2', \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

projetant des surfaces de Véronèse à partir des plans

$$Y_1 = Y_2 = Y_5 = Y_6 = Y_9 = \Psi_2' = 0, \quad Y_3 = Y_4 = Y_7 = Y_8 = Y_9 = \Psi_1' = 0.$$

L'involution I_2, dont Φ est l'image, est déterminée sur la surface F' par l'homographie

$$\frac{Y_1'}{Y_1} = \frac{Y_2'}{Y_2} = \frac{Y_3'}{Y_3} = \frac{Y_4'}{Y_4} = \frac{Y_5'}{-Y_5} = \frac{Y_6'}{-Y_6} = \frac{Y_7'}{-Y_7} = \frac{Y_8'}{-Y_8} = \frac{Y_9'}{-Y_9}.$$

Cette involution présente exactement les mêmes particularités que celle qui appartient à la surface F.

A un point de F correspond un point de Φ et à ce point correspondent deux points de F', et réciproquement. Il y a donc, entre les surfaces F et F', une correspondance (2, 2) dont nous chercherons l'expression analytique.

L'examen des équations (18) et (23), (19) et (24) nous conduit à poser

$$\frac{X_5}{Y_5} = \frac{X_6}{Y_6} = \frac{X_7}{Y_7} = \frac{X_8}{Y_8} = \frac{X_9}{Y_9} = \rho,$$

$$\frac{X_1}{Y_2} = \frac{X_2}{Y_1} = \rho', \qquad \frac{X_3}{Y_4} = \frac{X_4}{Y_3} = \rho''.$$

En portant les valeurs des X tirées de ces relations dans les troisièmes des équations (18), (19), nous obtenons

$$\rho^2 Y_9 \Psi_1' = \rho'^2 Y_1 Y_2, \qquad \rho^2 Y_9 \Psi_2' = \rho''^2 Y_3 Y_4.$$

En comparant aux équations correspondantes (23), (24), on est conduit à poser

$$\rho' = Y_3 Y_4, \qquad \rho'' = Y_1 Y_2, \qquad \rho^2 = Y_1 Y_2 Y_3 Y_4.$$

La correspondance (2, 2) entre F et F' a donc pour expression

$$\frac{X_1}{Y_2 Y_3 Y_4'} = \frac{X_2}{Y_3 Y_4 Y_1} = \frac{X_3}{Y_4 Y_1 Y_2} = \frac{X_4}{Y_1 Y_2 Y_3}$$

$$= \frac{X_5}{Y_5 \rho} = \frac{X_6}{Y_6 \rho} = \frac{X_7}{Y_7 \rho} = \frac{X_8}{Y_8 \rho} = \frac{X_9}{Y_9 \rho},$$

$$\rho = \sqrt{Y_1 Y_2 Y_3 Y_4}.$$

Il est facile de vérifier que dans ces conditions, les équations (18) donnent les équations (24) et les équations (19), les équations (23).

7. Soit $|\Gamma_0'|$ le système adjoint de $|\Gamma_0|$ sur Φ. Nous avons

$$2\Gamma_0 \equiv 2\Gamma_0'$$

et, par suite, en vertu des égalités fonctionnelles (21) et (22),

$$2\Gamma_0' \equiv 2\Gamma + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4,$$
$$2\Gamma_0' \equiv 2\Gamma' + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4.$$

On est conduit à se demander si ces égalités fonctionnelles impliquent que la surface Φ soit l'image d'involutions d'ordre deux appartenant à des surfaces de genres $p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$, distinctes des surfaces F, F'; il n'en est rien, comme nous allons le faire voir.

Considérons, sur Φ, un système linéaire $|\Delta_0|$, de genre π, degré $2\pi - 2$ et dimension $\pi - 1$ ($\pi > 2$) dont la courbe générique ne rencontre pas les courbes de diramation $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$. Aux courbes Δ_0 correspondent, sur F, des courbes D_0 de genre $2\pi - 1$, de degré $4\pi - 4$, appartenant à un système complet $|D|$ de dimension $2\pi - 2$. Dans ce système $|D|$, il existe un second système linéaire $|D_1|$, de dimension $\pi - 2$, composé au moyen de l'involution I_2. Aux courbes D_1 correspondent, sur Φ, des courbes Δ_1 rencontrant en un point chacune des droites $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$. Le système $|\Delta_1|$ a le genre $\pi - 1$, le degré $2\pi - 4$ et la dimension $\pi - 2$.

Soit $|D'|$ l'adjoint de $|D|$ sur F. Puisque la transformation T change en lui-même le système $|D|$, elle laisse également invariable l'adjoint $|D'|$. De plus, les courbes D' ne passent pas, en général, par les points unis de I_2. Il en résulte qu'il existe, dans $|D'|$, deux systèmes linéaires partiels composés au moyen de I_2; l'un de ceux-ci, $|D_0'|$, n'a pas comme points-base les points unis de I_2; l'autre, $|D_1'|$ a ces points comme points base simples.

Désignons par $|\Delta'_0|$, $|\Delta'_1|$ les systèmes qui correspondent, sur Φ, aux systèmes $|D'_0|$, $|D'_1|$ respectivement.

Entre une courbe Δ_0 et son homologue D_0, nous avons une correspondance (1, 2) privée de points unis; par suite, à un groupe canonique de D_0 correspond un groupe canonique de Δ_0. Par conséquent, les courbes Δ'_0 sont les adjointes de $|\Delta_0|$.

Entre une courbe Δ_1 et son homologue D_1 existe une correspondance (1, 2) présentant quatre points unis sur D_1. Par suite, à un groupe canonique de D_1 contenant ces quatre points unis correspond un groupe canonique de Δ_1; il en résulte que $|\Delta'_1|$ est l'adjoint de Δ_1.

Il résulte de tout ceci que les égalités fonctionnelles

$$2\Delta_0 \equiv 2\Delta_1 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4,$$
$$2\Delta'_0 \equiv 2\Delta'_1 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$$

correspondent à l'involution donnée sur la surface F.

Comme $|\Delta_0|$ est l'adjoint de $|\Delta'_0|$ et $|\Delta_1|$ celui de $|\Delta'_1|$ (puisque Φ est de genres zéro et de bigenre un), les égalités fonctionnelles

$$2\Delta_0 \equiv 2\Delta'_1 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4,$$
$$2\Delta'_0 \equiv 2\Delta_1 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$$

proviennent toutes deux de l'involution existant sur la surface F'.

8. Nous allons faire voir en outre que les surfaces F et F' sont birationnellement distinctes.

Supposons en effet qu'elles puissent être birationnellement identiques. Il existe alors deux correspondances (1, 2) entre la surface Φ et la surface F, car les systèmes $|\Gamma_0|$, $|\Gamma|$, $|\Gamma'|$ ne peuvent avoir pour homologues, sur F, des systèmes linéaires partiels appartenant à un même système linéaire. D'autre part, d'après la théorie des involutions, les homologues sur F des systèmes $|\Gamma_0|$, $|\Gamma|$ appartiennent à un même système linéaire $|C|$; de même, les homologues de $|\Gamma_0|$, $|\Gamma'|$ appartiennent à un même système $|\overline{C}|$. Les systèmes $|C|$, $|\overline{C}|$, qui sont formés de courbes du même ordre, ont un système linéaire commun et, par suite, appartiennent à un même système linéaire; d'où contradiction.

Il doit donc exister, sur F, deux involutions I_2, I'_2 d'ordre deux, ayant toutes deux pour image la surface Φ. Soient T, T′ les transformations birationnelles génératrices de ces involutions.

Formons un système linéaire complet $|D|$ sur F, invariant pour T et T′, contenant deux systèmes partiels : $|D_0|$, composé au moyen de I_2, $|\overline{D}_0|$, composé au moyen de I'_2, n'ayant pas pour points-base les points unis de I_2, I'_2. Il existera en outre, dans $|D|$, deux systèmes partiels $|D_1|$ ayant comme points-base les points unis de I_2, $|\overline{D}_1|$, ayant comme points-base les points unis de I'_2, composé le premier au moyen de I_2, le second au moyen de I'_2. Soient $|\Delta_0|$, $|\overline{\Delta}_0|$, $|\Delta_1|$, $|\overline{\Delta}_1|$ les systèmes linéaires correspondants sur Φ aux systèmes $|D_0|$, $|\overline{D}|$, $|D_1|$, $|\overline{D}_1|$ et $|\Delta'_1|$ l'adjoint de $|\Delta_1|$.

Nous devons avoir pour I_2,

$$2\Delta_0 \equiv 2\Delta_1 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_2 + \gamma_4,$$

et pour I'_2, d'une part

$$2\overline{\Delta}_0 = 2\overline{\Delta}_1 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4,$$

et, d'autre part,

$$2\Delta_0 \equiv 2\Delta'_1 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4.$$

Il en résulte que $|\overline{\Delta}_0|$ et $|\Delta_0|$ coïncident. Il en est de même de $|\overline{\Delta}_1|$, $|\Delta'_1|$. Mais on a observé plus haut que les courbes Δ'_1 ont pour homologues, sur F, des courbes de l'adjoint $|D'|$ de $|D|$. On arrive ainsi à une absurdité, puisque $|D'|$ et $|D|$ sont nécessairement distincts. Il en résulte que F et F′ ne peuvent être birationnellement identiques.

Si une surface de genres $p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$ *est l'image d'une involution d'ordre deux appartenant à une surface* F *de mêmes genres, elle est l'image d'une seconde involution d'ordre deux, appartenant à une surface de mêmes genres, birationnellement distincte de* F, *les points de diramation étant les mêmes.*

Marcel Hayez, imprimeur, rue de Louvain, 112, Bruxelles.