ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

Extrait des *Bulletins de la Classe des Sciences*. Séance du 4 août 1923, nos 7-9, pp. 360-379.

SUR

LES INVOLUTIONS CYCLIQUES D'ORDRE QUATRE APPARTENANT A UNE SURFACE DE GENRES UN

par

L. GODEAUX

Professeur à l'École militaire

GÉOMÉTRIE. — **Sur les involutions cycliques d'ordre quatre, appartenant à une surface de genres un,**

(*Seconde communication*),

par L. GODEAUX, professeur à l'École militaire.

Dans cette note, nous construisons une surface du quatrième ordre, représentant une involution cyclique d'ordre quatre appartenant à une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$). Cette surface du quatrième ordre doit posséder six points doubles dont quatre sont biplanaires singuliers et deux coniques, et trois faisceaux de biquadratiques (elliptiques). En rapportant projectivement les quadriques passant par les six points doubles aux plans de l'espace, la surface en question se transforme en une quadrique double. Cette quadrique fait partie d'un faisceau déterminé par une quadrique inscrite à une surface de Kümmer et par le plan polaire d'un point singulier de la surface de Kümmer par rapport à cette quadrique, ce plan étant compté deux fois.

Dans une troisième note, nous construirons deux plans doubles de genres un représentant des involutions cycliques appartenant à des surfaces de genres un.

1. Soit Φ une surface du quatrième ordre, simple, de l'espace ordinaire, image d'une involution cyclique d'ordre quatre, appartenant à une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$) et telle que ses sections planes Γ ne passent, en général, par aucun point de diramation.

Dans notre première communication (*), nous avons démontré que la surface Φ jouit des propriétés suivantes :

I. La surface possède quatre points doubles biplanaires A_1, A_2, A_3, A_4 à chacun desquels est infiniment voisin un point double conique.

Nous désignerons par A'_i le point double conique infiniment voisin de A_i. La droite $A_iA'_i$ est une tangente quarti-ponctuelle.

L'ensemble (A_i, A'_i) équivaut, au point de vue des transformations birationnelles, à l'ensemble de trois courbes rationnelles $\Gamma_{i1}, \Gamma_{i2}, \Gamma_{i0}$, de degré -2. Les courbes Γ_{i1}, Γ_{i2} ne se rencontrent pas, mais rencontrent toutes deux Γ_{i0} en un point.

II. La surface Φ possède deux points doubles coniques A_5, A_6. Chacun de ces points est équivalent à une courbe rationnelle de degré -2. Nous désignerons par Γ_5 la courbe équivalente à A_5, par Γ_6 la courbe équivalente à A_6.

III. Il existe, sur la surface Φ, un faisceau $|\Gamma_1|$ de biquadratiques gauches (elliptiques) tel que

$$2\Gamma_1 + \sum_i^{1,\dots,4} (\Gamma_{i1} + \Gamma_{i2} + 2\Gamma_{i0}) \equiv 2\Gamma.$$

Le long de chaque courbe Γ_1, il existe une quadrique passant par A_1, A_2, A_3, A_4, inscrite à la surface Φ. Cette quadrique est tangente aux droites $A_1A'_1, A_2A'_2, A_3A'_3, A_4A'_4$.

IV. Il existe, sur la surface Φ, deux faisceaux $|\Gamma_2|, |\Gamma_3|$, formés de biquadratiques gauches (elliptiques), tels que

$$4\Gamma_2 + \sum_i^{1,\dots,4} (\Gamma_{i1} + 3\Gamma_{i2} + 2\Gamma_{i0}) + 2(\Gamma_5 + \Gamma_6) \equiv 4\Gamma,$$

$$4\Gamma_3 + \sum_i^{1,\dots,4} (3\Gamma_{i1} + \Gamma_{i2} + 2\Gamma_{i0}) + 2(\Gamma_5 + \Gamma_6) \equiv 4\Gamma.$$

Le long de chacune des courbes Γ_2, Γ_3, il y a une surface du

(*) *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique,* 1923, pp. 75-88.

quatrième ordre ayant un contact du troisième ordre (quartiponctuel) avec la surface Φ. Ces surfaces du quatrième ordre passent par les points A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6.

De plus, le système

$$|\Gamma_0| = |\Gamma_2 + \Gamma_3|$$

est découpé, sur Φ, par les quadriques passant par A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6.

Observons que des égalités fonctionnelles qui les définissent, on conclut que deux courbes Γ_2, Γ_3 se rencontrent en deux points variables avec les courbes (et simples pour la surface Φ).

Dans la suite de ce travail, nous supposerons que la surface Φ est la surface du quatrième ordre la plus générale possible, satisfaisant aux quatre conditions énumérées ci-dessus. Dans ces conditions, la surface Φ étant dépourvue de courbes multiples, sera de genres un (*).

2. Supposons que la surface Φ existe effectivement et désignons par $|Q|$ le système des quadriques tangentes aux droites A_1A_1', A_2A_2', A_3A_3', A_4A_4' respectivement aux points A_1, A_2, A_3, A_4. Le système $|Q|$ est un faisceau ou un réseau; nous allons démontrer que c'est précisément un réseau.

Considérons deux courbes quelconques Γ_1', Γ_1'' du faisceau $|\Gamma_1|$. Les quadriques passant par Γ_1' découpent encore sur Φ des biquadratiques gauches formant un faisceau $|\Gamma'|$. Ce faisceau $|\Gamma'|$ contient la courbe Γ_1', car il y a une quadrique inscrite à la surface Φ le long de Γ_1'. Les faisceaux $|\Gamma_1|$, $|\Gamma'|$ ont donc une

(*) Les quatre propriétés de la surface Φ qui viennent d'être énumérées ne sont d'ailleurs pas toutes indépendantes. Dans la seconde partie de notre *Mémoire sur les involutions appartenant à une surface de genres un* (Annales de l'École normale supérieure, 1919, pp. 51-70), nous avons démontré que pour que la surface Φ représente une involution cyclique d'ordre quatre appartenant à une surface de genres un, il faut et il suffit qu'elle satisfasse aux conditions I, II et qu'il existe soit une courbe Γ_2, soit une courbe Γ_3.

courbe commune; s'ils ne coïncident pas, ils appartiennent à un même réseau de courbes elliptiques. La surface Φ, étant de genres un, ne peut posséder de réseau de courbes elliptiques, donc $|\Gamma_1|$ et $|\Gamma'|$ coïncident.

De même, les quadriques passant par Γ_1'' découpent, sur Φ, le faisceau $|\Gamma_1|$.

Les faisceaux de quadriques ayant respectivement pour base Γ_1', Γ_1'' ne peuvent coïncider si ces courbes sont distinctes. Ils ont d'ailleurs une quadrique commune, précisément la quadrique qui découpe, sur Φ, la courbe $\Gamma_1' + \Gamma_1''$. Ces faisceaux appartiennent donc à un réseau.

D'autre part, une quadrique passant par une courbe Γ_1 appartient nécessairement à $|Q|$, donc ce système est un réseau.

Observons de plus que dans le réseau $|Q|$, il y a ∞^1 faisceaux dont les bases sont les courbes de $|\Gamma_1|$; par suite, toute quadrique Q contient une courbe Γ_1 et, par conséquent, une seconde (éventuellement coïncidente avec la première).

3. Considérons les quadriques de $|Q|$ passant par le point A_5. Elles forment un faisceau dont la base appartient à Φ et est précisément la courbe de $|\Gamma_1|$ passant par A_5. Cette courbe possède un point double en A_5 et dégénère en une courbe gauche rationnelle d'ordre quatre, Γ_{15} et la courbe infiniment petite Γ_5. La courbe Γ_{15} est projetée de A_5 suivant un cône du second ordre qui appartient à $|Q|$, donc, dans le réseau $|Q|$, il y a un cône du second ordre ayant son sommet en A_5.

De même, dans le réseau $|Q|$, il y a un cône ayant son sommet en A_6. Ce cône rencontre Φ suivant une biquadratique rationnelle Γ_{16} ayant un point double en A_6 et suivant la courbe infiniment petite Γ_6. On a

$$\Gamma_1 \equiv \Gamma_{16} + \Gamma_6.$$

La quadrique du réseau $|Q|$ passant par A_5, A_6 rencontre la surface Φ suivant une courbe composée $\Gamma_{15} + \Gamma_{16} + \Gamma_5 + \Gamma_6$.

Nous désignerons par Q_1, Q_2 respectivement les cônes de sommets A_5, A_6, par Q_0 la quadrique passant par A_5, A_6.

Observons que la surface du quatrième ordre formée des cônes Q_1, Q_2 satisfait aux conditions I, II et III. Il en est de même de la surface du quatrième ordre formée par la quadrique Q_0 comptée deux fois. Par suite, toute surface du quatrième ordre appartenant au faisceau déterminé par les surfaces $2Q_0$, $Q_1 + Q_2$, satisfait aux conditions I, II et III.

4. Considérons les quadriques R passant par les six points A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6. Elles forment un système linéaire ∞^3, $|R|$.

Trois quadriques de $|R|$, n'appartenant pas à un même faisceau, ont en commun deux points, en dehors des six points-base. Les couples de points ainsi obtenus sont en nombre ∞^3 et forment une involution spatiale J_2. Cette involution détermine une transformation birationnelle involutive de l'espace, transformation dans laquelle deux points homologues forment un groupe de J_2 et que nous désignerons par T.

Nous allons montrer que la surface Φ est transformée en elle-même par T.

Soient Γ_2', Γ_3' deux courbes arbitraires respectivement des faisceaux $|\Gamma_2|$, $|\Gamma_3|$. Ces deux courbes ont deux points communs (simples pour Φ). Nous allons faire voir que par ces points passent ∞^2 quadriques R, formant un réseau, et que par suite ces points forment un groupe de J_2.

Les quadriques R découpent, sur Φ, les courbes

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_2 + \Gamma_3.$$

Par suite, les quadriques R passant par Γ_2' découpent, sur Φ, le faisceau

$$|\Gamma_0 - \Gamma_2'| = |\Gamma_3|,$$

et de même, les quadriques R passant par Γ_3' découpent, sur Φ, le faisceau $|\Gamma_2|$. Les faisceaux de quadriques ayant respectivement pour base Γ'_2, Γ'_3, qui sont des faisceaux appartenant à $|R|$, ne peuvent coïncider, car les faisceaux de courbes $|\Gamma_2|$, $|\Gamma_3|$ sont distincts. Ces deux faisceaux ont en commun la quadrique R découpant, sur Φ, la courbe $\Gamma'_2 + \Gamma'_3$; ils appartiennent donc à un réseau appartenant à $|R|$ et par suite, les points communs à Γ'_2, Γ'_3, qui appartiennent à toutes les quadriques de ce réseau, forment un groupe de J_2. La surface Φ est donc formée de ∞^2 groupes de J_2 et est, en d'autres termes, transformée en elle-même par T. De plus, les courbes de $|\Gamma_2|$, $|\Gamma_3|$ sont transformées en elles-mêmes par T.

Observons maintenant que, de la relation fonctionnelle

$$|\Gamma_0| = |\Gamma_2 + \Gamma_3|,$$

résulte que toute courbe Γ_0 est rencontrée par une courbe Γ_2 en deux points appartenant à une courbe Γ_3; par suite, les courbes de $|\Gamma_0|$ sont transformées en elles-mêmes par T.

Une quadrique quelconque rencontre la surface Φ suivant une courbe d'ordre huit et de genre neuf; les courbes découpées par les quadriques de $|R|$ possèdent six points doubles en $A_1, A_2, \ldots, A_6$ et sont donc de genre trois, comme cela résulte d'ailleurs de la relation fonctionnelle

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_2 + \Gamma_3.$$

Considérons les quadriques R tangentes à la droite $A_1A'_1$. Ces quadriques forment un réseau et découpent, sur Φ, des courbes d'ordre huit présentant deux points doubles infiniment voisins A_1, A'_1 et cinq points doubles $A_2, A_3, \ldots, A_6$. Ces courbes sont donc de genre deux et forment un système complet (réseau) de degré deux, puisque Φ est de genres un. Chacune de ces courbes est transformée en elle-même par T. Il en résulte que la courbe infiniment petite Γ_{10}, ou encore le point A'_1, est transformé en lui-même par T, sans quoi les courbes Γ_0 envisagée actuellement auraient un huitième point double.

De même, T laisse invariants les points A'_2, A'_3, A'_4.

5. Désignons par Σ l'espace ordinaire contenant Φ et rapportons projectivement les quadriques du système $|R|$ aux plans d'un espace linéaire à trois dimensions Σ^*. On obtient ainsi, entre les espaces Σ^* et Σ une correspondance (1, 2). A un point de Σ^* correspondent deux points de Σ formant un groupe de J_2. Inversement, à un point de Σ correspond un seul point de Σ^*.

Cette correspondance est bien connue, nous nous bornerons à rappeler ici les propriétés qui nous seront nécessaires (*).

Les points de Σ^* auxquels correspondent deux points coïncidents de Σ sont situés sur une surface de Kümmer Ψ^* (surface de diramation). La surface correspondante dans Σ (lieu des points de Σ invariants pour T) est la surface de Weddle Ψ, lieu des sommets des cônes appartenant au système $|R|$.

Les points singuliers de la surface de Kümmer Ψ^* sont :

a) Le point P^*, sommet de la gerbe des plans qui correspondent aux quadriques circonscrites à la cubique gauche γ_3, déterminée par les six points $A_1, A_2, \ldots, A_6$. Aux points de Σ^*, infiniment voisins de P^*, correspondent les couples de points de la cubique gauche γ_3.

b) Les quinze points P^*_{ik} sommets des gerbes de plans qui correspondent aux quadriques de $|R|$ passant respectivement par les droites A_iA_k ($i, k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$; $i \neq k$). Aux points infiniment voisins de P^*_{ik}, dans Σ^*, correspondent les couples de points de la droite A_iA_k.

Aux points de Σ infiniment voisins de A_i correspondent, dans Σ^* les points du plan π^*_i, tangent à la surface de Kümmer Ψ^* suivant une conique γ^*_i et contenant les six points singuliers P^* et P^*_{ik} ($k \neq i$). En particulier, aux points de la surface de Weddle infiniment voisins de A_i correspondent les

(*) Nous avons déjà utilisé cette correspondance dans notre note *Sur les surfaces du quatrième ordre possédant six points doubles biplanaires ordinaires* (Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 1922). Cette correspondance a été étudiée par M. Snyder (*Trans. Amer. Math. Society*, 1911) et, auparavant, par Reye (*Journal de Crelle*, t. LXXXVI). Nous n'avions pas cité ce dernier géomètre.

points de la conique γ_i^*. Enfin, aux points infiniment voisins de A_i situés dans un plan correspondent les points d'une droite de π_i^*.

6. La surface Φ, étant formée de ∞^2 groupes de J_2, a pour correspondante, dans Σ^*, une quadrique Φ^* sur laquelle la courbe de diramation, du huitième ordre, est découpée par la surface de Kümmer Ψ^*. Nous allons rechercher quelles sont les relations entre les surfaces Φ^* et Ψ^*.

Le point A_5 étant double conique pour Φ, aux points de cette surface infiniment voisins de A_5 correspondent, dans Σ^*, les points d'une conique du plan π_5^*. La quadrique Φ^* rencontre donc le plan π_5^* suivant une conique non dégénérée. Elle rencontre de même le plan π_6^* suivant une conique non dégénérée.

Le point A_1 étant biplanaire pour Φ, aux points infiniment voisins de A_1 sur cette surface correspondent, dans Σ^* les points de deux droites du plan π_1^*. Le point commun à ces deux droites est le correspondant du point A'_1. Mais, comme nous l'avons vu, ce point A'_1 est transformé en lui-même par T; il appartient donc à la surface de Weddle Ψ; par suite, son correspondant P_1^* appartient à la surface de Kümmer Ψ^*. On voit donc que la quadrique Φ^* est tangente au plan π_1^* en un point P_1^* de la conique γ_1^*. Comme la surface Ψ^* touche également ce plan le long de γ_1^*, les surfaces Φ^* et Ψ^* sont tangentes en P_1^*.

De même, la quadrique Φ^* touche la surface de Kümmer Ψ^* en trois points P_2^*, P_3^*, P_4^* situés respectivement sur les coniques γ_2^*, γ_3^*, γ_4^*. En ces points, Φ^* touche également les plans π_2^*, π_3^*, π_4^* respectivement.

Observons enfin que la quadrique Q_0, tangente aux droites $A_1A'_1$, $A_2A'_2$, $A_3A'_3$, $A_4A'_4$ aux points A_1, A_2, A_3, A_4 respectivement, et passant par A_5, A_6, est une quadrique de $|R|$. Il lui correspond donc, dans Σ^*, un plan Q_0^*. Ce plan passe par les correspondants P_1^*, P_2^*, P_3^*, P_4^* de A'_1, A'_2, A'_3, A'_4; les quatre points P_1^*, P_2^*, P_3^*, P_4^* sont donc coplanaires.

7. En nous basant sur ces résultats, nous allons construire la surface Φ en partant de la correspondance (1, 2) entre Σ^* et Σ.

Choisissons six points $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ sans relation particulière entre eux dans Σ, et rapportons projectivement les quadriques passant par ces points aux plans d'un espace Σ^*. Conservons, pour la correspondance (1, 2) entre Σ^* et Σ ainsi définie, les notations indiquées plus haut (n° 5).

Sur la surface de Kümmer Ψ^*, considérons un quartique elliptique gauche γ^* passant par les huit points singuliers

$$P^*_{15},\ P^*_{25},\ P^*_{35},\ P^*_{45},\ P^*_{16},\ P^*_{26},\ P^*_{36},\ P^*_{46},$$

quartique qui existe certainement sur la surface de Kümmer à modules généraux (*). Le long de γ^*, il y a une quadrique Q^* inscrite à la surface de Kümmer Ψ^*. De plus, la courbe γ^* et la quadrique Q^* touchent en un point (variable avec γ^*) tout plan singulier de Ψ^* que γ^* ne rencontre qu'en deux points singuliers.

La courbe γ^* ne rencontre le plan π^*_1 qu'en deux points singuliers P^*_{15}, P^*_{16}, par conséquent, cette courbe et la quadrique Q^* touchent le plan π^*_1 en un point P^*_1 (non singulier, situé sur γ^*_1).

De même, la courbe γ^* et la quadrique Q^* touchent les plans π^*_2 en P^*_2, π^*_3 en P^*_3, π^*_4 en P^*_4, ces points étant non singuliers pour Ψ^* et situés respectivement sur les coniques γ^*_2, γ^*_3, γ^*_4.

La courbe γ^* rencontrant chacun des plans π^*_5, π^*_6 en quatre points singuliers, la quadrique Q^* ne touche pas ces plans.

La quadrique Q^* touchant les plans π^*_1, π^*_2, π^*_3, π^*_4, le plan polaire Q^*_0 du point P^* par rapport à cette quadrique, passe par les points de contact P^*_1, P^*_2, P^*_3, P^*_4.

Désignons par Φ^* une quadrique quelconque du faisceau

(*) G. Humbert, *Théorie générale des surfaces hyperelliptiques.* [Journal de Liouville, 1893, (4), IX, pp. 29-170, 361-473.] Voir en particulier le chapitre III, p. 78.

déterminé par la quadrique Q^* et le plan Q_0^* compté deux fois. Cette quadrique Φ^* touche π_i^* et Ψ^* au point P_i^* $(i=1,2,3,4)$ et rencontre les plans π_5^*, π_6^* suivant des coniques.

A la quadrique Φ^* correspond, dans Σ, une surface du quatrième ordre Φ. Nous allons démontrer que cette surface Φ satisfait aux quatre conditions énumérées plus haut (n° 1) ou, en d'autres termes, que Φ est l'image d'une involution cyclique d'ordre quatre, appartenant à une surface de genres un.

8. Commençons par observer qu'aux quadriques de Σ^* appartenant au faisceau déterminé par Q^*, $2\,Q_0^*$ correspondent dans Σ, des surfaces du quatrième ordre appartenant au faisceau déterminé par les surfaces qui correspondent aux quadriques $Q^*, 2Q_0^*$.

A la quadrique Q^*, tangente (en chaque point d'intersection) à la surface de diramation Ψ^* correspond une surface du quatrième ordre de Σ dégénérée en deux quadriques Q_1, Q_2. Ces deux quadriques passent chacune une fois par les points A_1, A_2, A_3, A_4 puisque, Q^* étant tangente à π_1^*, par exemple, la surface du quatrième ordre $Q_1 + Q_2$ doit avoir un point double biplanaire en A_1. De plus, si nous désignons par A_i' le point infiniment voisin de A_i qui correspond à P_i^* $(i = 1, 2, 3, 4)$, on voit que les quadriques Q_1 et Q_2 sont tangentes aux droites A_1A_1', A_2A_2', A_3A_3', A_4A_4'.

La surface du quatrième ordre $Q_1 + Q_2$ possède des points doubles coniques en A_5, A_6, puisque Q^* rencontre π_5^*, π_6^* suivant des coniques. Il en résulte que l'une des quadriques Q_1, Q_2, par exemple Q_1, possède un point double en A_5, l'autre, Q_2, a un point double en A_6.

A la quadrique Q^* correspond donc, dans Σ, l'ensemble de deux cônes du second ordre de sommets respectifs A_5, A_6 et passant tous deux par A_1, A_2, A_3, A_4.

Au plan Q_0^* correspond dans Σ une quadrique Q_0 passant par les points A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6. De plus, puisque Q_0^* passe par P_1^*, P_2^*, P_3^*, P_4^*, la quadrique Q_0 touche les droites A_1A_1', A_2A_2', A_3A_3', A_4A_4'.

Il résulte de tout ceci que la surface du quatrième ordre Φ fait partie du faisceau déterminé par les surfaces $Q_1 + Q_2$, $2\,Q_0$; elle satisfait donc aux propriétés I, II et III (n° 3).

Il nous reste à démontrer que Φ satisfait à la condition IV.

A une génératrice rectiligne de la quadrique Φ^* correspond, dans Σ, une biquadratique gauche passant par les points A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 (intersection de deux quadriques passant par ces points), et située sur Φ.

Aux deux systèmes de génératrices rectilignes de Φ^* correspondent donc, sur Φ, deux faisceaux de biquadratiques gauches. Il s'agit de montrer que ces faisceaux possèdent les mêmes propriétés que $|\Gamma_2|$, $|\Gamma_3|$, c'est-à-dire qu'une biquadratique considérée rencontre une des courbes Γ_{i1}, Γ_{i2} en un point, ne rencontre pas l'autre, ni la courbe Γ_{i0} ($i = 1, 2, 3, 4$), enfin rencontre en un point les courbes Γ_5, Γ_6.

Considérons une génératrice rectiligne G^* de Φ^*. G^* rencontre le plan π_5^* en un point, donc la biquadratique correspondante G rencontre la courbe Γ_5 en un point. De même, G rencontre Γ_6 en un point.

La droite G^* rencontre le plan π_1^* en un point généralement distinct de P_1^* et situé sur une des génératrices de Φ^* située dans ce plan. Par suite, la courbe correspondante G ne rencontre pas Γ_{10} et rencontre une seule des courbes Γ_{11}, Γ_{12} en un point.

Partant de ces résultats, on peut montrer que les faisceaux de biquadratiques gauches correspondant aux systèmes de génératrices rectilignes de Φ^* satisfont aux équations fonctionnelles indiquées plus haut (n° 1, IV) (*).

Remarquons que les quartiques elliptiques gauches (biquadratiques) passant par huit points singuliers d'une surface de Kümmer sont en nombre ∞^1 (formant un faisceau). Il existe donc ∞^1 quartiques telles que γ^* et par suite ∞^1 quadriques telles que Q^* et, en correspondance, ∞^1 plans tels que Q_0^*.

(*) Voir notre première communication, n° 9.

Chaque couple Q^*, Q_0^* donne naissance à ∞^1 quadriques Φ^*, donc ∞^1 surfaces Φ. Par conséquent :

Étant donnés six points arbitraires de l'espace A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, *il existe* ∞^2 *surfaces du quatrième ordre images d'involutions cycliques d'ordre quatre appartenant à une surface de genres un et possédant quatre points doubles biplanaires singuliers en* A_1, A_2, A_3, A_4, *deux points doubles coniques cn* A_5, A_5.

Observons qu'à la quadrique Q^*, inscrite à la surface de Kümmer Ψ^* le long d'une biquadratique gauche γ^*, correspondent les deux cônes Q_1, Q_2 dont la courbe d'intersection correspond à γ^* et est donc située sur la surface de Weddle Ψ; par suite :

Étant donnés six points arbitraires A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, *si l'on considère deux cônes* Q_1, Q_2, *passant par* A_1, A_2, A_3, A_4 *et de sommets respectifs* A_5, A_6, *et si ces deux cônes se rencontrent en une courbe appartenant à la surface de Weddle (lieu des sommets des cônes passant par les six points donnés), il existe une quadrique* Q_0 *passant par ces six points et ayant, en chacun des quatre premiers, une tangente commune avec les deux cônes. Toute surface du quatrième ordre, appartenant au faisceau déterminé par les surfaces* $Q_1 + Q_2$, $2Q_0$ *est l'image d'une involution cyclique d'ordre quatre, appartenant à une surface de genres un* (*).

9. Si l'on considère deux cônes du second ordre passant par A_1, A_2, A_3, A_4 et ayant respectivement A_5, A_6 comme

(*) Remarquons que la possibilité de l'existence de cônes tels que Q_1, Q_2 apparaît immédiatement. Les cônes passant par A_1, A_2, A_3, A_4, de sommet A_5, découpent, sur la surface de Weddle Ψ des courbes du huitième ordre formées des quatre droites A_1A_5, A_2A_5, A_3A_5, A_4A_5 et de quartiques gauches (formant un faisceau). De même, les cônes de sommet A_6, passant par A_1, A_2, A_3, A_4, donnent naissance, sur Ψ, à un faisceau de quartiques gauches. Ces deux faisceaux ont en commun une courbe formée par la cubique gauche γ_3 et la droite A_5A_6. La surface Ψ étant de genres un, ces faisceaux doivent coïncider et être formés de quartiques elliptiques. Chacune de ces courbes est par suite commune à deux cônes tels que Q_1, Q_2.

sommets, il n'existe pas, en général, de quadriques passant par les quatre premiers points et y ayant une tangente commune avec les deux cônes. On est donc amené à rechercher si, lorsque cette quadrique existe, les cônes ne se rencontrent pas nécessairement en une courbe de la surface de Weddle Ψ. Alors, la propriété IV (n° 1), serait une conséquence des autres. La réponse est négative.

Pour le montrer, commençons par rechercher la condition d'existence d'un réseau de quadriques $|Q|$ ayant une tangente commune en chacun des points A_1, A_2, A_3, A_4.

Prenons le tétraèdre A_1, A_2, A_3, A_4 comme tétraèdre de référence, de manière à ce que le plan opposé au point A_i ait comme équation $x_i = 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. Soient

$$\left.\begin{aligned} \frac{x_2}{\alpha_{12}} = \frac{x_3}{\alpha_{13}} = \frac{x_4}{\alpha_{14}}, \\ \frac{x_1}{\alpha_{21}} = \frac{x_3}{\alpha_{23}} = \frac{x_4}{\alpha_{24}}, \\ \frac{x_1}{\alpha_{31}} = \frac{x_2}{\alpha_{32}} = \frac{x_4}{\alpha_{34}}, \\ \frac{x_1}{\alpha_{41}} = \frac{x_2}{\alpha_{42}} = \frac{x_3}{\alpha_{43}} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

les équations des tangentes $A_1A'_1$, $A_2A'_2$, $A_3A'_3$, $A_4A'_4$ aux quadriques Q en A_1, A_2, A_3, A_4.

Si le réseau $|Q|$ existe, il contient un cône de sommet A_1; on obtiendra précisément ce cône en assujetissant une quadrique de $|Q|$ à avoir en A_1 deux tangentes distinctes de $A_1A'_1$ et non situées dans un plan contenant cette droite. Il existe de même, dans $|Q|$, des cônes de sommets A_2, A_3, A_4. Inversement, s'il existe trois cônes du second ordre de sommets A_1, A_2, A_3 respectivement, passant tous trois par les quatre sommets du tétraèdre et ayant en ces points, respectivement, avec les droites (1), deux points d'intersection confondus (et ne satisfaisant pas à d'autres conditions), ils détermineront le réseau $|Q|$.

La condidion d'existence d'un cône de sommet A_1 tangent en A_2, A_3, A_4 aux droites $A_2 A_2'$, $A_3 A_3'$, $A_4 A_4'$, c'est-à-dire tangent aux plans

$$\frac{x_3}{\alpha_{23}} = \frac{x_4}{\alpha_{24}}, \quad \frac{x_4}{\alpha_{34}} = \frac{x_2}{\alpha_{32}}, \quad \frac{x_2}{\alpha_{42}} = \frac{x_3}{\alpha_{43}},$$

est (*)

$$\alpha_{23}\alpha_{34}\alpha_{42} + \alpha_{24}\alpha_{43}\alpha_{32} = 0. \tag{2}$$

Les conditions d'existence des cônes de sommets A_2, A_3 dont il est question plus haut sont de même

$$\alpha_{13}\alpha_{34}\alpha_{41} + \alpha_{14}\alpha_{43}\alpha_{31} = 0, \tag{3}$$

$$\alpha_{12}\alpha_{24}\alpha_{41} + \alpha_{14}\alpha_{42}\alpha_{21} = 0. \tag{4}$$

Ces conditions (2), (3), (4) doivent être vérifiées par les droites (1) pour que le réseau $|Q|$ existe.

Remarquons qu'en éliminant α_{41}, α_{42}. α_{43} entre les équations (2), (3), (4) précédentes, on trouve

$$\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} + \alpha_{13}\alpha_{32}\alpha_{21} = 0, \tag{5}$$

qui exprime qu'il y a un cône du second ordre de sommet A_4, tangent en A_1, A_2, A_3 aux droites $A_1 A_1'$, $A_2 A_2'$, $A_3 A_3'$.

10. Désignons par (a_1, a_2, a_3, a_4) les coordonnées de A_5, par (b_1, b_2, b_3, b_4) celle de A_6. Considérons les cônes ayant ces points pour sommet respectifs et passant par A_1, A_2, A_3, A_4, dont les équations sont

$$\left(\frac{x_1}{a_1} - \frac{x_2}{a_2}\right)\left(\frac{x_3}{a_3} - \frac{x_4}{a_4}\right) + \lambda \left(\frac{x_1}{a_1} - \frac{x_3}{a_3}\right)\left(\frac{x_2}{a_2} - \frac{x_4}{a_4}\right) = 0, \tag{6}$$

$$\left(\frac{x_1}{b_1} - \frac{x_2}{b_2}\right)\left(\frac{x_3}{b_3} - \frac{x_4}{b_4}\right) + \mu \left(\frac{x_1}{b_1} - \frac{x_3}{b_3}\right)\left(\frac{x_2}{b_2} - \frac{x_4}{b_4}\right) = 0. \tag{7}$$

(*) Il suffit d'appliquer le théorème de Pascal à la conique intersection du cône et du plan $x_1 = 0$, l'hexagone étant réduit à un triangle inscrit et aux tangentes aux sommets.

Recherchons quelle est la relation existant entre λ et μ pour que ces deux cônes appartiennent au réseau $|Q|$.

On doit tout d'abord exprimer que les plans tangents aux deux cônes en A_i se rencontrent suivant la droite $A_i A_i'$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. Cela donne

$$\alpha_{12} : \alpha_{13} : \alpha_{14} = \left(-\frac{1+\mu}{a_3b_4} + \frac{1+\lambda}{a_4b_3}\right) : \left(-\frac{\mu(1+\lambda)}{a_4b_2} + \frac{\lambda(1+\mu)}{a_2b_4}\right) : \left(\frac{\lambda}{a_2b_3} - \frac{\mu}{a_3b_2}\right),$$

$$\alpha_{21} : \alpha_{23} : \alpha_{24} = \left(-\frac{1+\lambda}{a_3b_4} + \frac{1+\mu}{a_4b_3}\right) : \left(\frac{\mu}{a_4b_1} - \frac{\lambda}{a_1b_4}\right) : \left(-\frac{\lambda(1+\mu)}{a_1b_3} + \frac{\mu(1+\lambda)}{a_3b_1}\right),$$

$$\alpha_{31} : \alpha_{32} : \alpha_{34} = \left(-\frac{\mu(1+\lambda)}{a_2b_4} + \frac{\lambda(1+\mu)}{a_4b_2}\right) : \left(\frac{\lambda}{a_4b_1} - \frac{\mu}{a_1b_4}\right) : \left(-\frac{1+\mu}{a_1b_2} + \frac{1+\lambda}{a_2b_1}\right),$$

$$\alpha_{41} : \alpha_{42} : \alpha_{43} = \left(\frac{\mu}{a_2b_3} - \frac{\lambda}{a_3b_2}\right) : \left(-\frac{\lambda(1+\mu)}{a_3b_1} + \frac{\mu(1+\lambda)}{a_1b_3}\right) : \left(-\frac{1+\lambda}{a_1b_2} + \frac{1+\mu}{a_2b_1}\right).$$

En substituant ensuite aux α_1 dans les relations (2), (3), (4) et (5), les valeurs trouvées, on obtient une même relation qui se décompose en deux autres.

$$\lambda - \mu = 0, \tag{8}$$

$$(a_1a_2b_3b_4 + a_3a_4b_1b_2)\lambda\mu(\lambda+\mu+2) + (a_1a_3b_2b_4 + a_2a_4b_1b_3)(\lambda+\mu+2\lambda\mu) - (a_1a_4b_2b_3 + a_2a_3b_1b_4)(1+\lambda)(1+\mu)(\lambda+\mu) = 0. \tag{9}$$

Posons

$$A_{ik} = \frac{x_i}{a_i} - \frac{x_k}{a_k}, \qquad B_{ik} = \frac{x_i}{b_i} - \frac{x_k}{b_k}. \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4;\ i<k).$$

Si $\lambda = \mu$, les cônes (6) et (7) se rencontrent sur la surface d'équation

$$A_{12}A_{34}B_{13}B_{24} - A_{13}A_{24}B_{12}B_{34} = 0.$$

C'est précisément l'équation de la surface de Weddle Ψ, sous la forme que lui a donnée Hierholzer (*).

Si l'on suppose que λ et μ sont liés par la relation (9), on trouve que les cônes (6) et (7) se rencontrent sur la surface d'équation (**).

$$\begin{aligned}&(a_1a_2b_3b_4 + a_3a_4b_1b_2)A_{12}A_{34}B_{12}B_{34}(A_{14}A_{23}B_{13}B_{24} + A_{13}A_{24}B_{14}B_{23})\\ &+(a_1a_4b_2b_3 + a_2a_3b_1b_4)A_{14}A_{23}B_{14}B_{23}(A_{12}A_{34}B_{13}B_{24} + A_{13}A_{24}B_{12}B_{34})\\ &-(a_1a_3b_2b_4 + a_2a_4b_1b_3)A_{13}A_{24}B_{13}B_{24}(A_{12}A_{34}B_{14}B_{23} + A_{14}A_{23}B_{12}B_{34}) = 0.\end{aligned}$$

Cette surface, du huitième ordre, ne contient certainement pas la surface de Weddle comme partie, sans quoi le premier nombre de la relation (9) serait divisible par $\lambda - \mu$, ce qui n'a pas lieu (***).

On voit donc que :

Une surface du quatrième ordre possédant six points doubles (deux coniques et quatre biplanaires singuliers) n'est pas nécessairement l'image d'une involution cyclique d'ordre quatre appartenant à une surface de genres un.

11. Avec les données précédentes, on peut aisément construire l'équation d'une surface Φ image d'une involution d'ordre quatre appartenant à une surface de genres un.

(*) Voir, par exemple, *C. M. Jessop, Quartic Surfaces* (p. 178). Cambridge, 1916.

(**) On utilise les relations

$$A_{12}A_{34} + A_{14}A_{23} = A_{13}A_{24}, \quad B_{12}B_{34} + B_{14}B_{23} = B_{13}B_{24}.$$

(***) On voit aisément que cette surface passe doublement par les droites A_iA_5, A_iA_6 ($i = 1, 2, 3, 4$), simplement par les arêtes du tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$, et par les droites communes aux couples de plans déterminés par les couples de trois points différents de l'ensemble $A_1, A_2, \ldots, A_6$, l'un de ces plans passant par A_5, l'autre par A_6.

Pour les cônes Q_1, Q_2, nous prendrons les équations (6) et (7) où $\mu = \lambda$. Pour la quadrique Q_0, nous prendrons une quadrique passant par les six points $A_1, A_2, \ldots, A_6$ et tangente aux droites A_1A_1', A_2A_2', A_3A_3'. L'équation de Q_0 sera donc

$$\begin{vmatrix} x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 & x_2x_3 & x_2x_4 & x_3x_4 \\ a_1a_2 & a_1a_3 & a_1a_4 & a_2a_3 & a_2a_4 & a_3a_4 \\ b_1b_2 & b_1b_3 & b_1b_4 & b_2b_3 & b_2b_4 & b_3b_4 \\ \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & 0 & 0 & \alpha_{23} & \alpha_{24} & 0 \\ 0 & \alpha_{31} & 0 & \alpha_{32} & 0 & \alpha_{34} \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en remplaçant les α par leurs valeurs en fonction de λ et $\mu = \lambda$ trouvées plus haut et en représentant par

$$p_{ik} = a_i b_k - a_k b_i \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

les coordonnées pluckériennes de la droite A_5A_6,

$$f(x,\lambda) \equiv \begin{vmatrix} x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 & x_2x_3 & x_2x_4 & x_3x_4 \\ a_1a_2 & a_1a_3 & a_1a_4 & a_2a_3 & a_2a_4 & a_3a_4 \\ b_1b_2 & b_1b_3 & b_1b_4 & b_2b_3 & b_2b_4 & b_3b_4 \\ \frac{1}{\lambda}a_2b_2p_{34} & -a_3b_3p_{24} & \frac{1}{1+\lambda}a_4b_4p_{32} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\lambda}a_1b_1p_{34} & 0 & 0 & \frac{1}{1+\lambda}a_2b_2p_{14} & a_4b_4p_{13} & 0 \\ 0 & a_3b_3p_{24} & 0 & \frac{1}{1+\lambda}a_2b_2p_{14} & 0 & -\frac{1}{\lambda}a_4b_4p_{12} \end{vmatrix}$$

L'équation d'une surface Φ sera donc de la forme

$$[f(x,\lambda)]^2 + k[A_{12}A_{34} + \lambda A_{13}A_{24}][B_{12}B_{34} + \lambda B_{13}B_{24}] = 0.$$

12. Nous terminerons cet exposé en construisant une surface du quatrième ordre, possédant dix points doubles isolés, birationnellement identique à Φ.

Rapportons projectivement les surfaces cubiques circonscrites au tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ aux plans d'un espace ordinaire Σ'. En d'autres termes, (y_1, y_2, y_3, y_4) étant les coordonnées ponctuelles homogènes de Σ' par rapport à un tétraèdre de référence $B_1B_2B_3B_4$, posons

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = x_2x_3x_4 : x_3x_4x_1 : x_4x_1x_2 : x_1x_2x_3.$$

Nous obtenons ainsi une transformation birationnelle entre Σ et Σ' (*). Aux plans de Σ correspondent, dans Σ', les surfaces cubiques circonscrites au tétraèdre $B_1B_2B_3B_4$. Aux droites de Σ (ou de Σ') correspondent les cubiques gauches de Σ' (ou de Σ), passant par les points B_1, B_2, B_3, B_4 (ou par A_1, A_2, A_3, A_4).

Aux points de Σ, infiniment voisins de A_1, correspondent les points du plan $B_2B_3B_4$. Aux points infiniment voisins de A_1 situés dans un plan, correspondent les points d'une conique passant par B_2, B_3, B_4. On a des propriétés analogues pour les points infiniment voisins de $A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4$.

Considérons la surface Φ, de Σ, du quatrième ordre, ayant des points doubles biplanaires en A_1, A_2, A_3, A_4, un point double conique infiniment voisin à chacun de ces points, et enfin deux points doubles coniques isolés A_5, A_6.

Soit Φ' la transformée de Φ, Φ' est du quatrième ordre, car toute cubique gauche passant par A_1, A_2, A_3, A_4 rencontre Φ en $3 \times 4 - 4 \times 2 = 4$ points variables. Au point double conique A'_i, de Φ, infiniment voisin de A_i, correspond un point B'_i, double conique pour Φ', situé dans le plan du tétraèdre $B_1B_2B_3B_4$ opposé à B_i $(i = 1, 2, 3, 4)$.

Aux plans tangents à Φ en A_i correspondent dans Σ' deux

(*) Cette transformation birationnelle est bien connue. Elle est un cas particulier de la transformation obtenue en rapportant projectivement les surfaces cubiques passant par une sextique gauche de genre trois aux plans d'un espace ordinaire. Actuellement, la sextique gauche dégénère en les six arêtes du tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$; les sommets de ce tétraèdre sont doubles pour les surfaces cubiques considérées.

cônes du second ordre tangents à Φ' en B_i (et passant par B_i'' et par les autres sommets du tétraèdre $B_1B_2B_3B_4$). Il en résulte que B_i est double biplanaire pour Φ', les plans tangents en ce point étant les plans tangents aux deux cônes le long de la droite B_iB_i' ($i = 1, 2, 3, 4$).

Nous avons vu plus haut qu'il existe un cône du second ordre de sommet A_1, tangent aux droites A_2A_2', A_3A_3', A_4A_4' respectivement en A_2, A_3, A_4. A ce cône, correspond, dans Σ', un plan passant par B_1, B_2', B_3', B_4'. On établit de même que les points B_2, B_3', B_4', B_1'; B_3, B_4', B_1', B_2'; B_4, B_1', B_2', B_3', sont coplanaires, par suite les tétraèdres $B_1B_2B_3B_4$; $B_1'B_2'B_3'B_4'$ sont des tétraèdres de Moebius.

Aux points doubles coniques A_5, A_6 de Φ correspondent évidemment des points doubles coniques de Φ'.

Aux biquadratiques gauches Γ_1, Γ_2, Γ_3 (n° 1) tracées sur Φ, correspondent, sur Φ', des biquadratiques gauches Γ_1', Γ_2', Γ_3'. Il est aisé de voir que :

Les biquadratiques Γ_1' passent par B_1, B_2, B_3, B_4, B_1', B_2', B_3', B_4' et forment un faisceau $|\Gamma_1'|$.

Les biquadratiques Γ_2' et Γ_3' passent par B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, et forment deux faisceaux $|\Gamma_2'|$, $|\Gamma_3'|$.

Donnons-nous maintenant la surface Φ', d'ordre quatre, possédant dix points doubles isolés, quatre, B_1, B_2, B_3, B_4, biplanaires ordinaires, six, B_1', B_2', B_3', B_4', B_5, B_6, coniques, les groupes de points $B_1B_2B_3B_4$, $B_1'B_2'B_3'B_4'$ formant deux tétraèdres de Moebius. Supposons de plus que sur Φ' existe une biquadratique gauche Γ_2' passant par B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6.

En rapportant projectivement les surfaces cubiques passant par les arêtes du tétraèdre $B_1B_2B_3B_4$ aux plans d'un espace ordinaire, on obtient une transformée birationnelle Φ_0 de Φ' possédant quatre points doubles biplanaires A_1, A_2, A_3, A_4, ayant des points doubles coniques A_1', A_2', A_3', A_4' infiniment voisins, et deux points doubles coniques A_5, A_6.

Comme il y a ∞^2 quadriques passant par les sommets de deux tétraèdres de Moebius, il y aura ∞^2 quadriques tangentes aux droites $A_1A'_1$, $A_2A'_2$, $A_3A'_3$, $A_4A'_4$ aux points A_1, A_2, A_3, A_4.

A la courbe Γ'_2 correspond sur Φ_0 une biquadratique gauche passant par $A_1, A_2, \ldots, A_6$, mais non par A'_1, A'_2, A'_3, A'_4. Par suite, cette courbe est tracée sur une des nappes de Φ_0 en chacun des points A_1, A_2, A_3, A_4, et les quadriques qui la contiennent découpent, sur Φ_0, un système $|\Gamma_3|$ de biquadratiques gauches passant par $A_1, A_2, \ldots, A_6$. On en déduira sans difficulté que Φ_0 jouit des mêmes propriétés que Φ. Par conséquent :

Étant donnés deux tétraèdres de Moebius I et II, une surface du quatrième ordre, possédant :

Des points doubles biplanaires ordinaires aux sommets du tétraèdre I;

Des points doubles coniques aux sommets du tétraèdre II;

Deux points doubles coniques en deux autres points;

Une biquadratique gauche passant par ces deux derniers points et par les sommets du tétraèdre I;

Représente une involution cyclique d'ordre quatre, appartenant à une surface de genre un.

Il serait aisé de continuer l'étude de la surface Φ' et de démontrer, par exemple, l'existence de deux cônes du second ordre de sommets B_5, B_6, passant par les sommets des tétraèdres I, II, et se rencontrant sur la surface de Weddle relative aux points $B_1, B_2, \ldots, B_6$.

Bruxelles, 29 juin 1923.

Bruxelles. — Imprimerie M. Hayez, rue de Louvain, 112.