GÉOMÉTRIE. — **Sur les involutions cycliques d'ordre quatre appartenant à une surface de genres un**

(*troisième communication*) (*),

par L. GODEAUX, professeur à l'École militaire.

Dans cette troisième et dernière note (**), nous considérons les plans doubles de genres un représentant des involutions cycliques d'ordre quatre, appartenant à des surfaces de genres un, dans l'hypothèse où les éléments de diramation de ces involutions sont des points isolés du plan. Nous établissons précisément le théorème suivant :

Si un plan double de genres un Φ *est l'image d'une involution cyclique d'ordre quatre appartenant à une surface* F *de genres un, de manière que les points de diramation de* Φ *pour la correspondance* (1, 4) *existant entre* Φ *et* F *soient des points isolés du plan, ce plan double* Φ *se ramène, par une transformation birationnelle, à l'un des cinq types suivants :*

I. *Plan double dont la courbe de diramation se compose d'une quartique possédant deux points doubles* A_5, A_6 *et d'une conique tangente à la quartique en quatre points* A_1, A_2, A_3, A_4. *Les six points* A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 *sont sur une même conique.*

II. *Plan double dont la courbe de diramation se compose de deux quartiques ayant deux points doubles* O_1, O_2 *en commun, se touchant en quatre points* A_1, A_2, A_3, A_4 *et ayant l'une un*

(*) Présenté par M. Stuyvaert.

(**) Les deux premières notes sont parues dans le *Bulletin de l'Académie royale de Belgique,* février et août 1923.

troisième point double A_5, *l'autre un troisième point double* A_6. *Il existe* ∞^1 *quartiques passant doublement par* O_1, O_2, *simplement par* A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 *et touchant chacune des quartiques de diramation en un point (variable).*

III. *Plan double dont la courbe de diramation se compose d'une courbe d'ordre six ayant un point quadruple* O *auquel sont infiniment voisins deux points doubles distincts* O_1, O_2, *et ayant deux points doubles isolés* A_5, A_6; *et d'une quartique passant triplement par* O, *simplement par* O_1, O_2 *et tangente à la première courbe en quatre points* A_1, A_2, A_3, A_4. *Il existe* ∞^2 *courbes d'ordre six ayant un point quadruple en* O), *des points doubles en* O_1, O_2, *passant par* A_1, A_2, ..., A_6 *et bitangentes (en des points variables) à chacune des courbes de diramation.*

IV. *Plan double dont la courbe de diramation se compose d'une courbe du huitième ordre possédant un point sextuple* O *auquel sont infiniment voisins trois points doubles distincts* O_1, O_2, O_3, *et deux points doubles distincts* A_5, A_6; *et d'une quartique ayant un point triple en* O, *passant simplement par* O_1, O_2, O_3, *et tangente à la première courbe en quatre points* A_1, A_2, A_3, A_4. *Il existe* ∞^3 *courbes d'ordre huit ayant* O *comme point sextuple,* O_1, O_2, O_3 *comme points doubles, passant par les six points* A_1, ..., A_6, *bitangentes (en des points variables) à la quartique de diramation, tangentes en quatre points (variables) à la courbe de diramation d'ordre huit.*

V. *Plan double dont la courbe de diramation se compose de deux quartiques ayant en commun deux points doubles infiniment voisins* O_1, O_2 *et se touchant en outre en quatre points situés sur une conique passant par* O_1, O_2.

Nous terminons ce travail en formant les équations d'un plan double du premier type et d'un plan double du cinquième type en partant de l'équation de la surface F.

Signalons encore cette propriété :

La surface de genres un, support d'une involution cyclique *d'ordre quatre dont un plan double du cinquième type est l'image, peut se transformer birationnellement en une surface du quatrième ordre.*

1. Soit Φ une surface de genres un ($p_a = P_1 = 1$), image d'une involution cyclique d'ordre quatre appartenant à une surface F de genres un. Supposons que la surface Φ possède une transformation birationnelle involutive θ en elle-même, et soit J_2 l'involution d'ordre deux engendrée par θ. L'involution J_2 sera supposée rationnelle et nous désignerons par D la courbe lieu des points de coïncidence de cette involution (points invariants pour θ).

Soit $|\Gamma|$ un système linéaire de genre $\pi (\pi \geq 2)$, tracé sur Φ, privé de points-base et composé au moyen de l'involution J_2 (*). Nous supposerons que le système $|\Gamma|$ ne soit pas composé au moyen d'une autre involution existant éventuellement sur Φ.

Rapportons projectivement les courbes Γ aux hyperplans d'un espace linéaire S_π à π dimensions. La surface Φ se tranforme en une surface Φ' de S_π et cette surface est normale, puisque $|\Gamma|$ a la dimension π.

A un point de Φ correspond un point de Φ' et à un point de Φ' correspondent deux points de Φ formant un groupe de l'involution J_2. Le système $|\Gamma|$ ayant le degré $2\pi - 2$ et étant, d'autre part, dépourvu de points-base, la surface Φ' a l'ordre $\pi - 1$. Elle est donc rationnelle (ce qui résulte aussi de l'hypothèse faite sur J_2).

Les sections hyperplanes Γ' de Φ' sont d'ordre $\pi - 1$ et situées dans des espaces linéaires à $\pi - 1$ dimensions; ce sont

(*) L'existence de systèmes tels que $|\Gamma|$ a été démontrée par M. Enriques. Sui piani doppi di genere uno. *Memorie della R. Soc. Italiana delle Scienze,* 1896; X; [3]. Voir nº 6.

donc des courbes rationnelles normales. La surface Φ', ayant ses sections hyperplanes rationnelles, est (*) :

1° Un plan dont les courbes Γ' sont les droites ($\pi = 2$), ou

2° Une surface de Véronèse ($\pi = 5$), ou

3° Une surface réglée normale.

De plus, entre une courbe rationnelle Γ' et la courbe Γ, de genre π, homologue, il y a une correspondance (1, 2). Celle-ci possède donc $2\pi + 2$ points de diramation sur Γ'. Par suite, la courbe de diramation D' pour la correspondance (1, 2) entre Φ' et Φ est d'ordre $2\pi + 2$. A cette courbe D' correspond la courbe D.

Nous prendrons comme modèle projectif de la surface Φ la surface Φ' comptée deux fois et ayant comme courbe de diramation la courbe D' d'ordre $2\pi + 2$. La surface Φ ainsi considérée est normale. Ses sections hyperplanes, que nous désignerons par Γ, seront donc des courbes Γ' comptées deux fois et ayant $2\pi + 2$ points de diramation.

2. Supposons que, dans la correspondance (1, 4) existant entre Φ et F, il n'y ait, en général, aucun point de diramation sur une courbe Γ. Les points de diramation quadruple A_1, A_2, A_3, A_4 et les points de diramation double A_5, A_6 sont donc les points isolés de Φ.

Supposons que le point A_1, par exemple, ne soit pas situé sur la courbe de diramation D'. Alors, il appartient à un des feuillets de la surface double Φ. Le point A_1 est, pour la surface Φ, double biplanaire singulier; actuellement, il doit présenter cette singularité pour un des feuillets de Φ, c'est-à-dire pour la surface Φ'. Or, une surface normale d'ordre $\pi - 1$ de S_π ne peut posséder un point double biplanaire sans dégénérer; donc le point A_1 (et de même les points A_2, A_3, A_4) doit appartenir à la courbe de diramation D'.

(*) Picard. Sur les surfaces algébriques dont toutes les sections planes sont unicursales. *Journal de Crelle,* 1887; C. — Guccia. Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono unicursali. *Rend. Circ. Matem.*, 1884-1887; I.

Un raisonnement analogue peut être fait pour les points A_5, A_6, qui sont doubles coniques pour Φ. Mais, actuellement, la surface Φ' peut posséder un point double conique : précisément dans le cas où cette surface se réduit à un cône du second ordre ($\pi = 3$).

Plaçons-nous dans ce dernier cas et soient O le sommet du cône Φ', K' ses génératrices rectilignes. Au point O correspondent sur Φ deux points, dont l'un au moins est un point de diramation double. Soit A_5 ce point. Le second point, que nous désignerons provisoirement par A'_5, peut ou non être confondu avec A_6. Plaçons-nous dans la seconde hypothèse et observons qu'aux droites K', rencontrant la courbe D' en quatre points, il correspond sur Φ des courbes elliptiques K. A ces courbes K correspondent, sur F, des courbes $\overline{K}$ de genre deux, puisqu'elles passent par les deux points de F correspondant à A_5. De plus, ces courbes $\overline{K}$ passent par les quatre points de F correspondant à A'_5; cela est absurde, car les courbes $\overline{K}$, qui forment un faisceau, ne peuvent avoir que deux points communs (des courbes de genres deux ayant, sur une surface de genres un, le degré deux). Il en résulte que le point A'_5 doit être confondu avec A_6.

En résumé, les points de diramation quadruple A_1, A_2, A_3, A_4 appartiennent à la courbe D'. Les points de diramation double A_5, A_6 appartiennent à la courbe D' ou bien sont superposés en un point double de Φ', qui est alors un cône du second ordre.

3. Recherchons maintenant les singularités de la courbe D' aux points A_1, A_2, ..., A_6.

Les sections hyperplanes de Φ, passant par A_1, ont le genre abaissé d'une unité (*). Les courbes Γ' passant par A_1,

(*) Voir notre Mémoire sur les involutions appartenant à une surface de genres un (première partie). *Annales de l'École normale,* 1914.

considérées comme courbes doubles, doivent donc posséder $2\pi + 2 - 2 = 2\pi$ points de diramation; par suite, A_1 est double pour la courbe D'.

De plus, par A_1 passent $\infty^{\pi-2}$ sections hyperplanes, formant un système linéaire dont le genre est $\pi - 2$. Les courbes Γ' correspondantes ne doivent plus posséder que $2\pi - 2$ points de diramation; donc la courbe D' possède un point double infiniment voisin de A_1.

On démontre de même que les points A_5, A_6, lorsqu'ils appartiennent à la courbe D', sont doubles pour celle-ci.

En résumé, les points A_1, A_2, A_3, A_4 sont des tacnodes de la courbe D'; les points A_5, A_6 sont (éventuellement) des points doubles ordinaires.

4. Le point A_1 équivaut à l'ensemble de trois courbes rationnelles de degré -2, Γ_{11}, Γ_{12}, Γ_{10} (*). Voyons comment la transformation θ opère sur ces courbes.

Supposons $\pi > 2$. Si nous rapportons projectivement les courbes Γ' passant par A_1 aux hyperplans d'un espace linéaire $S_{\pi-1}$ à $\pi - 1$ dimensions, Φ' se transforme birationnellement en une surface Φ_1', d'ordre $\pi - 2$, contenant une droite a_1 correspondant à A_1. A la surface double Φ correspond une surface double Φ_1 formée de Φ_1' comptée deux fois et possédant une courbe de diramation D_1' (correspondant à D') d'ordre 2π. La courbe D_1' possède un point double sur a_1, correspondant au point double de D' infiniment voisin de A_1.

D'autre part, les sections hyperplanes de Φ passant par A_1, ou les sections hyperplanes de Φ_1 qui sont birationnellement équivalentes à ces premières courbes, sont les courbes $\Gamma - \Gamma_{11} - \Gamma_{12}$. Il en résulte que les courbes Γ_{11}, Γ_{12} sont représentées, sur Φ_1, par la droite a_1 comptée deux fois. Par suite, θ transforme la courbe Γ_{11} en la courbe Γ_{12}.

(*) Voir notre première communication. *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, février 1923.

Les sections hyperplanes de Φ_1 passant par le point double de D'_1 situé sur la droite a_1 sont les courbes $\Gamma - \Gamma_{11} - \Gamma_{12} - \Gamma_{10}$; elles sont transformées en elles-mêmes par θ; donc Γ_{10} est transformée en elle-même par θ.

Le raisonnement qui vient d'être fait n'est plus valable lorsque $\pi = 2$, c'est-à-dire lorsque Φ est un plan double ayant une sextique D' de diramation. Mais alors, en rapportant projectivement les coniques doubles 2Γ aux hyperplans de S_5, on transforme birationnellement le plan double Φ en une surface de Véronèse double, pour laquelle les développements faits plus haut sont valables.

On obtient des résultats analogues pour les points A_2, A_3, A_4.

Les points A_5, A_6 sont équivalents respectivement à des courbes rationnelles de degré -2, Γ_5, Γ_6. Les courbes $\Gamma - \Gamma_5$, $\Gamma - \Gamma_6$ étant invariantes pour θ si les points A_5, A_6 appartiennent à D', les courbes Γ_5, Γ_6 sont dans ce cas transformées en elles-mêmes par θ.

Lorsque A_5, A_6 n'appartiennent pas à D', il résulte du raisonnement fait plus haut (n° 2) que θ transforme Γ_5 en Γ_6.

En résumé, la transformation θ change Γ_{i1} en Γ_{i2}, Γ_{i0} en elle-même ($i = 1, 2, 3, 4$); elle change Γ_5, Γ_6 en elles-mêmes ou Γ_5 en Γ_6, suivant que A_5, A_6 appartiennent à D' ou non.

5. Sur la surface Φ existent quatre systèmes linéaires de courbes $|\Gamma_1|$, $|\Gamma_2|$, $|\Gamma_3|$, $|\Gamma_0|$ tels que (voir notre première communication)

$$2\Gamma_1 + \sum_i^{1,\ldots,4} (\Gamma_{i1} + \Gamma_{i2} + 2\Gamma_{i0}) = 2\Gamma,$$

$$4\Gamma_2 + \sum (\Gamma_{i1} + 3\Gamma_{i2} + 2\Gamma_{i0}) + 2\Gamma_5 + 2\Gamma_6 \equiv 4\Gamma,$$

$$4\Gamma_3 + \sum (3\Gamma_{i1} + \Gamma_{i2} + 2\Gamma_{i0}) + 2\Gamma_5 + 2\Gamma_6 \equiv 4\Gamma,$$

$$\Gamma_0 + \sum (\Gamma_{i1} + \Gamma_{i2} + \Gamma_{i0}) + \Gamma_5 + \Gamma_6 \equiv 2\Gamma,$$

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_2 + \Gamma_3.$$

La transformation θ, changeant en elle-même toute courbe Γ, transforme une courbe du système $|2\Gamma|$ en une courbe de ce système (en général distincte de la première). De même, θ transforme en lui-même le système $|4\Gamma|$. Il résulte des égalités précédentes et des résultats obtenus plus haut (nº 4) sur la façon dont θ opère sur les courbes Γ_{i1}, Γ_{i2}, Γ_{i0}, Γ_5, Γ_6, que cette transformation laisse invariants les systèmes $|2\Gamma_1|$, $|\Gamma_0|$ et échange entre eux les systèmes $|4\Gamma_2|$, $|4\Gamma_3|$.

Supposons que θ fasse correspondre à une courbe Γ_1 une courbe $\overline{\Gamma}_1$; alors, à la courbe $2\Gamma_1$ correspond la courbe $2\overline{\Gamma}_1$ et, comme $|2\Gamma_1|$ est transformé en lui-même, on a

$$2\Gamma_1 \equiv 2\overline{\Gamma}_1.$$

La division, sur une surface de genres un, étant une opération univoque (Severi), on en conclut

$$\Gamma_1 \equiv \overline{\Gamma}_1,$$

c'est-à-dire, en d'autres termes, que θ transforme le système $|\Gamma_1|$ en lui-même.

Une courbe Γ_2 ne peut être invariante pour θ, puisque $|4\Gamma_2|$ est transformé en $|4\Gamma_3|$. La transformation θ fait correspondre à une courbe Γ_2 une courbe $\Gamma_0 - \Gamma_2$, c'est-à-dire une courbe Γ_3.

En résumé, la transformation θ change en lui-même le système $|\Gamma_1|$; elle échange entre eux les systèmes $|\Gamma_2|$, $|\Gamma_3|$.

6. Le système $|\Gamma_1|$ étant invariant pour θ, il existe certainement des courbes de ce système invariantes pour θ. Considérons l'une de ces courbes et supposons qu'elle ne rencontre la courbe de coïncidence D qu'en un nombre fini de points. A la courbe Γ_1 considérée correspond, sur Φ', une courbe Γ'_1 d'ordre $\pi - 1$. Cette courbe Γ'_1 appartient donc certainement à un hyperplan de S_π; elle ne peut appartenir à plus d'un hyperplan, car alors Φ' serait située dans un espace de dimension inférieure à π. La courbe Γ'_1 est donc une section hyperplane de Φ'. Il en résulte que la courbe Γ_1 considérée (augmentée de courbes infiniment petites Γ_{i1}, Γ_{i2}, Γ_{i0}) appartient au système $|\Gamma|$. Mais cela est absurde, car la courbe qui correspond sur F à la courbe Γ_1 considérée appartiendrait au système correspondant, sur F, à $|\Gamma|$.

Il résulte de tout ceci que les courbes Γ_1, invariantes pour θ, ne peuvent rencontrer D en un nombre fini de points; en d'autres termes, ces courbes doivent contenir une partie de la courbe D (*). La courbe de coïncidence D se décompose donc en deux parties D_1, D_2 et, par suite, la courbe de diramation D' se décompose en deux parties D'_1, D'_2. Observons que les courbes D'_1, D'_2 doivent être d'ordre pair, car si, par exemple, une courbe Γ_1 invariante pour θ se compose de D_1 et d'une partie variable, celle-ci doit rencontrer une courbe Γ en un nombre pair de points (couples de points de l'involution J_2). Comme une courbe Γ_1 rencontre une courbe Γ en un nombre pair $(2\pi - 2)$ de points, D_1 rencontre une courbe Γ en un nombre pair de points; ce nombre est égal à l'ordre de la courbe D'_1. D'autre part, la courbe $D' = D'_1 + D'_2$ étant d'ordre pair $(2\pi + 2)$, D'_2 est aussi d'ordre pair.

7. Dans son mémoire sur la classification des plans doubles de genres un (**), M. Enriques a démontré que ces plans doubles se ramènent à quatre types birationnellement distincts, à savoir :

1° Plan double ayant une sextique de diramation.

2° Plan double ayant une courbe de diramation d'ordre huit, possédant deux points quadruples distincts ou infiniment voisins.

Ce plan double est birationnellement équivalent à une quadrique double ayant une courbe de diramation d'ordre huit. (Le

(*) Une courbe Γ_1 rencontrant une courbe Γ en $2\pi - 2$ points et D rencontrant Γ en $2\pi + 2$ points, Γ_1 ne peut contenir la courbe D tout entière.

(**) Sui piani doppi... *Loc. cit.*

cas où les points quadruples sont infiniment voisins correspond au cas où la quadrique est un cône.)

3° Plan double ayant une courbe de diramation d'ordre dix, possédant un point septuple auquel sont infiniment voisins deux points triples distincts.

Ce plan double est birationnellement équivalent à une réglée double du troisième ordre, de S_4, possédant une courbe de diramation d'ordre dix.

4° Plan double ayant une courbe de diramation d'ordre douze, possédant un point nonuple auquel sont infiniment voisins trois points triples distincts.

Ce plan double est birationnellement équivalent à une réglée double d'ordre quatre, de S_5, possédant une courbe de diramation d'ordre douze.

Tenant compte de ces résultats, nous voyons que les surfaces Φ doubles normales de genres un, birationnellement distinctes, images d'involutions cycliques d'ordre quatre appartenant à une surface F de genres un, et telles que les sections hyperplanes soient en général dépourvues de points de diramation pour la correspondance entre Φ et F, sont :

I. Un plan double ayant une sextique de diramation dotée de quatre tacnodes et de deux points doubles ($\pi = 2$).

II. Une quadrique double ayant une courbe de diramation d'ordre huit, dotée de quatre tacnodes et de deux points doubles ($\pi = 3$).

III. Une réglée cubique de S_4 ayant une courbe de diramation d'ordre dix, douée de quatre tacnodes et de deux points doubles ($\pi = 4$).

IV. Une réglée d'ordre quatre de S_5 ayant une courbe de diramation d'ordre douze, dotée de quatre tacnodes et de deux points doubles ($\pi = 5$).

V. Un cône du second ordre ayant une courbe de diramation d'ordre huit, douée de quatre tacnodes ($\pi = 3$).

Nous allons examiner séparément ces surfaces.

8. *Plan double du premier type.* — Actuellement ($\pi = 2$), les courbes Γ_1, Γ_2, Γ_3 sont des courbes rationnelles isolées de degré -2.

La courbe Γ_1 est transformée en elle-même par θ, puisque le système $|\Gamma_1|$ se réduit à cette courbe. De plus, cette courbe rencontre une courbe Γ en deux points. Comme elle doit contenir une partie D_1 de la courbe de coïncidence D qui rencontre les courbes Γ en un nombre pair de points, cette courbe Γ_1 fait entièrement partie de D et se confond avec D_1.

La courbe de diramation D' du plan double Φ se compose donc de la conique D'_1 qui correspond à Γ_1 et d'une quartique D'_2.

Les tacnodes A_1, A_2, A_3, A_4 de la courbe D' sont nécessairement des points de contact de la conique D'_1 et de la quartique D'_2.

La quartique D'_2 doit posséder deux points doubles A_5, A_6. Aux courbes Γ_2, Γ_3, transformées l'une dans l'autre par θ et rencontrant chacune les courbes Γ en deux points, correspond sur le plan Φ' une conique Γ'_{23} passant par les points $A_1, \ldots, A_6$. Cette conique ne rencontre pas la courbe $D' \equiv D'_1 + D'_2$ en dehors de ces points.

Soient

$$f(x, y) = 0, \qquad \varphi(x, y) = 0, \qquad \psi(x, y) = 0,$$

respectivement les équations cartésiennes des coniques D'_1, Γ'_{23} et de la droite A_5A_6. La quartique D'_2 a nécessairement pour équation

$$f(x, y)[\psi(x, y)]^2 + \lambda[\varphi(x, y)]^2 = 0,$$

λ étant une constante (*). Il en résulte que le plan double étudié ici est donné par

$$\left[x, y, \sqrt{f(f\psi^2 + \lambda\varphi^2)}\right].$$

(*) En effet, s'il y avait un réseau de quartiques passant doublement par A_5, A_6 et touchant D'_1 en A_1, A_2, A_3, A_4, il y aurait ∞^1 de ces courbes dont se détacherait

9. *Plan double du deuxième type.* — Si $\pi = 3$, les courbes Γ_1 forment un faisceau et sont elliptiques; elles rencontrent les courbes Γ en $2\pi - 2 = 4$ points.

Si toutes les courbes Γ_1 étaient invariantes pour θ, elles comprendraient une partie fixe D_1 faisant partie de la courbe de coïncidence D et rencontrant les courbes Γ en $2x$ points $(0 < x < 2)$, c'est-à-dire, nécessairement, en deux points. La courbe de diramation D' de Φ se composerait donc d'une conique D'_1 et d'une sextique D'_2. Aux courbes $\Gamma_1 - D_1$, rencontrant les courbes Γ en deux points, et invariantes pour θ, correspondraient, sur Φ', ∞^1 droites. Ces droites formeraient nécessairement un système de génératrices rectilignes de la quadrique Φ'. Si Φ' n'est pas un cône, ces droites ne peuvent rencontrer D' en des points fixes; les tacnodes A_1, A_2, A_3, A_4 de D' sont donc situés sur D'_1; alors la sextique D'_2 doit toucher D'_1 en quatre points, ce qui est absurde (*). Si Φ' est un cône, les droites qui correspondent aux courbes $\Gamma_1 - D_1$ sont les génératrices de ce cône et l'un des tacnodes de D' pourrait être situé au sommet du cône. Mais alors ces droites ne rencontreraient plus la courbe D' qu'en deux points simples et les courbes $\Gamma_1 - D_1$ seraient rationnelles, ce qui est absurde, Φ étant de genres un et ne pouvant donc contenir qu'un nombre fini de courbes rationnelles. On voit donc que θ ne peut laisser chaque courbe Γ_1 invariante.

A l'ensemble de deux courbes Γ_1 transformées l'une dans l'autre par θ correspond une courbe Γ'_1 du quatrième ordre de Φ'. Ces courbes Γ'_1 sont elliptiques (puisque transformées

---

une fois la droite A_5A_6 et, par suite, ∞^1 cubiques passant par A_5, A_6, tangentes à D'_1 en $A_1, \ldots, A_4$. Ces cubiques contiendraient donc toutes la conique D'_1 et il resterait ∞^1 droites passant par A_5, A_6, ce qui est absurde. Les quartiques en question forment donc un faisceau. Deux de ces quartiques sont évidemment $f\psi^2 = 0$, $\varphi^2 = 0$; d'où la conclusion : l'équation de D'_2 est

$$f\psi^2 + \lambda\varphi^2 = 0.$$

(*) D'_2 ne peut contenir D'_1 comme partie, car alors D'_1 cesserait d'être une courbe de diramation effective.

birationnelles des Γ_1), forment un faisceau et touchent D' aux quatre tacnodes A_1, A_2, A_3, A_4. Puisque les courbes Γ'_1 sont elliptiques, par chacune d'elles passent ∞^1 quadriques (dont la quadrique Φ'); il y a donc ∞^2 quadriques tangentes à la courbe de diramation D' aux points tacnodaux A_1, A_2, A_3, A_4. Ces points absorbent $4\ (2 \times 2) = 16$ points d'intersection de D' avec une quadrique; par suite, les ∞^2 quadriques ne rencontrent plus D' en dehors de ces points (sauf Φ' qui contient D'). Par un point de D' passent ∞^1 quadriques (dont Φ') du réseau envisagé; par suite, la base de ce faisceau fait partie de D'. Il en résulte que D' se compose de deux courbes D'_1, D'_2 du faisceau $|\Gamma'_1|$, ces courbes se touchant en quatre points. Ces deux courbes D'_1, D'_2 correspondent aux deux courbes du faisceau $|\Gamma_1|$ invariantes pour θ. Il est aisé de voir que les courbes de $|\Gamma_1|$ invariantes pour θ sont précisément celles qui passent, soit par A_5, soit par A_6. Par suite, D'_1 possède un point double A_5, D'_2 un point double A_6.

Les courbes Γ_2, Γ_3 sont actuellement elliptiques et rencontrent les courbes Γ en quatre points. Il leur correspond donc, sur Φ', des quartiques elliptiques Γ'_{23} passant par $A_1, \ldots, A_6$. En dehors de ces six points, une quadrique, distincte de Φ', passant par une courbe Γ'_{23}, rencontre encore D'_1 et D'_2 chacune en deux points. Comme à cette courbe Γ'_{23} correspond sur Φ une courbe dégénérée, ces points doivent provenir de contacts (c'est-à-dire être des diramations apparentes); donc les courbes Γ'_{23} touchent D'_1 et D'_2 en dehors de $A_1, A_2, \ldots, A_6$. Observons également que les courbes Γ'_{23} forment un système ∞^1 d'indice deux.

Si nous projetons la quadrique Φ' sur un plan à partir d'un de ses points, on voit qu'un plan double du second type possède les particularités suivantes :

a) La courbe de diramation se compose de deux quartiques se touchant en quatre points A^*_1, A^*_2, A^*_3, A^*_4, ayant en commun deux points doubles O_1, O_2 et ayant enfin l'une un troisième point double A^*_5, l'autre un troisième point double A^*_6;

b) Il existe ∞^1 quartiques passant doublement par O_1, O_2, simplement par A_1^*, ..., A_6^* et touchant chacune des quartiques en un point.

(Les points O_1, O_2 sont les points d'intersection des génératrices de la quadrique Φ' passant par le centre de projection.).)

10. La question de l'existence du plan double qui vient d'être étudié revient à montrer que, sur la quadrique Φ', on peut choisir D_1', D_2' de manière que les courbes Γ_{23}' existent. On peut résoudre cette question de la façon suivante :

Observons tout d'abord que les courbes D_1', D_2' sont projetées, respectivement des points A_5, A_6, suivant des cônes du second ordre. En chacun des points A_1, A_2, A_3, A_4, il y a une tangente commune à ces cônes et à Φ'. Si les deux cônes se rencontrent sur la surface de Weddle Ψ, lieu des sommets des cônes du second ordre passant par $A_1, A_2, \ldots, A_6$, nous savons que la quadrique Φ' existe (*).

Cela étant, rapportons projectivement les quadriques passant par $A_1, A_2, \ldots, A_6$ aux plans d'un espace linéaire Σ^* à trois dimensions (**). Ainsi, se trouve définie une correspondance (1, 2) entre Σ^* et l'espace Σ contenant Φ', et cette correspondance possède dans Σ^* une surface de diramation qui est une surface de Kümmer Ψ^*.

A la quadrique Φ' correspond, dans Σ^*, un plan Q_0^*. A l'ensemble des cônes projetant D_1' de A_5, D_2' de A_6 correspond une quadrique Q^* inscrite à la surface de Kümmer Ψ^* le long d'une biquadratique γ^* passant par les points singuliers P_{i5}^*, P_{i6}^* $(i = 1, 2, 3, 4)$. Le plan Q_0^* est le plan polaire du point singulier P^* par rapport à Q^*.

A la conique commune à Q^*, Q_0^* correspondent les courbes

(*) Voir notre deuxième communication. *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique,* août 1923.

(**) Nous avons utilisé cette transformation dans notre seconde communication citée plus haut. Nous conserverons dans ce paragraphe les mêmes notations pour les éléments singuliers de la surface de Kümmer Ψ^*, sans les définir à nouveau.

D'_1, D'_2. Aux droites du plan Q_0^*, tangentes à cette conique, correspondent les courbes Γ'_{23} comme on le voit aisément.

L'existence des courbes Γ'_{23} apparaît donc comme une conséquence du fait que les cônes projetant D'_1 de A_5, D'_2 de A_6 se rencontrent sur la surface de Weddle Ψ.

11. *Plan double du troisième type.* — La discussion relative au cas où $\pi = 4$ est analogue à celle qui a été faite dans le cas précédent. Pour ne pas allonger outre mesure ce travail, nous nous contenterons d'énoncer les résultats auxquels on est conduit.

La surface Φ' est actuellement une réglée cubique normale de S_4. La courbe de diramation D' se scinde en une courbe D'_1 d'ordre 4 et une courbe D'_2 d'ordre 6 ayant quatre points de contact A_1, A_2, A_3, A_4. La courbe D'_2 possède en outre deux points doubles A_5, A_6.

Les courbes Γ_1 sont de genre deux et rencontrent les courbes Γ en six points. La courbe D'_2 correspond à la courbe Γ_1 passant par les points A_5, A_6. Il y a ∞^1 courbes Γ_1 auxquelles correspondent des courbes formées de D'_1 et des générations rectilignes de Φ'. A deux courbes Γ_1 transformées l'une dans l'autre par θ correspond une courbe Γ'_1 d'ordre six, tangente à D'_1, D'_2 en A_1, A_2, A_3, A_4.

Les courbes Γ_2, Γ_3 sont de genre deux et rencontrent les courbes Γ en six points. Les courbes Γ'_{23} qui correspondent, sur Φ', aux couples de courbes Γ_2, Γ_3 transformées l'une dans d'autre par θ, sont d'ordre six; elles passent par les six points $A_1, A_2, \ldots, A_6$ et sont bitangentes aux courbes D'_1, D'_2 respectivement.

Si l'on projette la surface Φ' sur un plan quelconque de deux de ses points, on obtient un plan double birationnellement équivalent à la surface Φ. Ce plan double possède les propriétés suivantes :

a) La courbe de diramation se compose de :

Une courbe d'ordre six possédant un point quadruple O auquel sont infiniment voisins deux points doubles distincts O_1, O_2, et deux points doubles isolés A_5^*, A_6^*.

Une courbe d'ordre quatre possédant un point triple O, passant simplement par O_1, O_2 et tangente en quatre points A_1^*, A_2^*, A_3^*, A_4^* à la sextique.

b) Il existe ∞^2 courbes d'ordre six ayant un point quadruple O, deux points doubles O_1, O_2, passant par $A_1^*, \dots, A_6^*$ et bitangentes à chacune des courbes composant la courbe de diramation.

12. *Plan double du quatrième type.* — La surface Φ' est actuellement une réglée normale d'ordre quatre de l'espace S_5, et l'on a $\pi = 5$. Les propriétés de la surface double Φ s'établissent par des raisonnements analogues à ceux du cas $\pi = 3$. On trouve ainsi les résultats suivants :

La courbe de diramation D', d'ordre douze, se scinde en une courbe d'ordre quatre, D_1', et une courbe d'ordre huit, D_2', se touchant en quatre points A_1, A_2, A_3, A_4. La courbe D_2' possède deux points doubles A_5, A_6.

Les courbes Γ_1 sont de genre trois et rencontrent les courbes Γ en huit points. Il correspond, sur Φ', aux couples de courbes Γ_1 conjuguées pour θ, des courbes Γ_1' d'ordre huit, tangentes à D_1', D_2' en A_1, A_2, A_3, A_4. La courbe D_2' correspond à une courbe Γ_1 invariante pour θ. Les autres courbes Γ_1 invariantes pour θ sont ∞^2 et il leur correspond, sur Φ', des courbes formées par D_1' et des couples de génératrices rectilignes de cette surface.

Les courbes Γ_2, Γ_3 sont de genre trois et rencontrent les courbes Γ en huit points. On obtient en correspondance, sur Φ', un système ∞^3 (non linéaire) de courbes Γ_{23}', d'ordre huit, passant par A_1, A_2, ..., A_6 et bitangentes à D_1', tangentes en quatre points (variables) à D_2'.

Si l'on projette la surface Φ' de trois de ses points sur un plan, on obtient un plan double birationnellement équivalent à Φ et possédant les particularités suivantes :

a) La courbe de diramation se compose de :

Une courbe du huitième ordre possédant un point sextuple O auquel sont infiniment voisins trois points doubles distincts O_1, O_2, O_3, et deux points doubles distincts A_5^*, A_6^*.

Une courbe du quatrième ordre ayant un point triple en O, passant simplement par O_1, O_2, O_3 et tangente à la première courbe en quatre points A_1^*, A_2^*, A_3^*, A_4^*.

b) Il existe ∞^3 courbes d'ordre huit, ayant un point sextuple en O, des points doubles en O_1, O_2, O_3; passant par les six points A_1^*, ..., A_6^* et bitangentes à la courbe du quatrième ordre, tangentes en quatre points à la courbe du huitième ordre, composant la courbe de diramation.

13. *Plan double du cinquième type*. — On a actuellement $\pi = 3$; la surface Φ' est un cône du second ordre ; la courbe de diramation D' possède quatre tacnodes et est d'ordre huit. Les points A_5, A_6 de la surface Φ correspondent au sommet O du cône Φ'.

En répétant le raisonnement fait pour les plans doubles du second type, on démontre que la courbe D' se compose de deux quartiques D_1', D_2' se touchant en quatre points A_1, A_2, A_3, A_4. Aux courbes Γ_1 correspondent les courbes Γ_1' de Φ' formant un faisceau dont D_1', D_2' font partie. A une courbe Γ_1' correspondent deux courbes Γ_1; à D_1', D_2' correspondent les courbes Γ_1 invariantes pour θ.

Nous allons démontrer que le cône double Φ est l'image d'une involution cyclique d'ordre quatre, I_4, appartenant à une surface du quatrième ordre (éventuellement une quadrique double) de S_3, et engendrée sur cette surface par une homographie T. Nous en déduirons quelques propriétés de ce cône double.

Désignons par K' les générations rectilignes du cône Φ'. Ces droites rencontrant la courbe de diramation $D_1' + D_2'$ en quatre points, il leur correspond sur Φ des courbes K elliptiques, formant un faisceau $|K|$. Aux courbes K correspondent sur la surface F les courbes $\overline{K}_0$ passant par les quatre points (de coïncidence double pour I_4) qui correspondent à A_5, A_6. Ces courbes sont donc, d'après la formule de Zeuthen, de genre trois. Par suite, elles appartiennent totalement à un système linéaire ∞^3, $|\overline{K}|$. La transformation T génératrice de I_4 transforme une courbe de $|\overline{K}|$ en une courbe de $|\overline{K}|$, puisque T laisse invariantes les courbes $\overline{K}_0$ de ce système.

Rapportons projectivement les courbes $\overline{K}$ aux plans d'un S_3. A la surface F correspond birationnellement une surface du quatrième ordre (que nous désignerons toujours par F) et à T correspond une homographie de période quatre, laissant F invariante. Aux courbes $\overline{K}_0$ correspondent des sections planes de F, formant un faisceau; les plans de ces sections ont donc en commun une droite δ qui rencontre F en quatre points. Ce sont précisément les points qui correspondent à A_5, A_6; ils sont des coïncidences doubles pour T (c'est-à-dire des coïncidences pour T^2) et, par suite, la droite δ est invariante pour T et chacun de ses points est invariant pour T^2.

L'homographie T laisse invariants deux points de δ, ne pouvant appartenir à F (car alors ils appartiendraient à toutes les courbes $\overline{K}_0$). D'après la théorie des homographies, T possède encore soit deux points, soit ∞^1 points (formant une droite) invariants. D'autre part, on sait que I_4 possède quatre points de coïncidence quadruple (correspondant à A_1, A_2, A_3, A_4) ; donc T possède, en dehors de δ, quatre points invariants. Il en résulte que T laisse invariant tous les points d'une droite δ'.

Par la droite δ' passent aux moins deux plans invariants pour T. Soit $\overline{K}_1$, la section de F par un de ces plans. $\overline{K}_1$ est invariante pour T et passe par quatre points invariants pour cette transformation; il lui correspond donc, sur Φ, une courbe K_1, rationnelle d'après la formule de Zeuthen. La surface Φ, de genres un, ne possédant qu'un nombre fini de courbes rationnelles, il ne peut y avoir qu'un nombre fini (nécessairement deux) de plans passant par δ', invariante pour T. Soient $\overline{K}_1$, $\overline{K}_2$ les sections F par ces plans. A ces courbes correspondent donc, sur Φ, deux courbes rationnelles K_1, K_2, passant par A_1, A_2, A_3, A_4. Observons de plus qu'aux quatre points communs à $\overline{K}_1$ et à une courbe $\overline{K}_0$ correspond un seul point de Φ; par suite, la courbe K_1 est rencontrée en un point par chacune des courbes K. Il en est de même de K_2.

De cette propriété résulte que, les courbes K étant invariantes pour θ, cette transformation change nécessairement K_1 en K_2. A l'ensemble de ces courbes correspond donc, sur Φ', une courbe K'_{12} unisécante des génératrices K'. Si l'on observe que K_1 ni K_2 ne passent par les points A_5, A_6, on voit que K'_{12} ne passe pas par le sommet O du cône Φ'; par suite, K'_{12} est une conique. On en conclut encore que les points A_1, A_2, A_3, A_4 sont coplanaires.

Nous allons maintenant démontrer que les courbes Γ'_{23} qui correspondent, sur Φ, aux couples de courbes Γ_2, Γ_3 de Φ transformées l'une dans l'autre par θ, sont formées de la conique K'_{12} et des droites K'.

Observons tout d'abord que, sur Φ', nous avons, pour les sections planes Γ',

$$\Gamma' \equiv 2K'.$$

Par suite, sur la surface Φ, nous avons

$$\Gamma \equiv 2K + \Gamma_5 + \Gamma_6.$$

Si nous désignons par $|C|$ le système linéaire complet qui correspond, sur F, au système $|\Gamma|$, nous aurons, par conséquent,

$$C \equiv 2\overline{K}.$$

Dans le système $|C|$ se trouvent deux faisceaux de courbes passant par les huit points de coïncidence de I_4, et auxquels correspondent, sur Φ, les systèmes $|\Gamma_2|$, $|\Gamma_3|$; et il n'y a d'ailleurs que deux faisceaux répondant à ces conditions. Ces faisceaux sont donc nécessairement :

a) le faisceau formé de la courbe fixe $\overline{K}_1$ et des courbes $\overline{K}_0$;

b) le faisceau formé de la courbe fixe $\overline{K}_2$ et des courbes $\overline{K}_0$.

Il en résulte que, sur Φ, le faisceau $|\Gamma_2|$ est formé de la courbe fixe K_1 et des courbes K, le faisceau $|\Gamma_3|$ de la courbe fixe K_2 et des courbes K.

Les courbes Γ'_{23} sont donc bien formées de la conique K'_{12} et des droite K'.

Ainsi donc : le cône double Φ possède une courbe de diramation formée de deux quartiques tangentes en quatre points coplanaires.

Le fait que ces quatre points sont coplanaires suffit d'ailleurs pour qu'il existe ∞^1 courbes Γ'_{23} de la nature indiquée plus haut.

Si nous projetons le cône sur un plan quelconque d'un de ses points, nous obtenons un plan double birationnellement équivalent au cône double Φ et possédant :

Une courbe de diramation formée de deux quartiques ayant en commun deux points doubles infiniment voisins O_1, O_2 et se touchant en outre en quatre points situés sur une conique passant par O_1, O_2.

14. *Construction d'un plan double du premier type.* — Considérons, dans un espace linéaire $S_5(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ à cinq dimensions, la surface F représentée par

$$\begin{gathered}\varphi_1(x_0, x_1, x_2) + a_{33}x_3^2 + a_{45}x_4x_5 = 0,\\ \varphi_2(x_0, x_1, x_2) + b_{33}x_3^2 + b_{45}x_4x_5 = 0,\\ x_3\psi(x_0, x_1, x_2) + a_4x_4^2 + a_5x_5^2 = 0,\end{gathered}$$

où φ_1, φ_2 sont des formes homogènes du second degré en x_0, x_1, x_2; ψ une forme linéaire homogène par rapport aux mêmes variables.

La surface F est d'ordre huit et est invariante pour l'homographie de période 4.

$$= \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_0 & x_1 & x_2 & -x_3 & ix_4 & -ix_5 \end{pmatrix}.$$

L'homographie T engendre, sur F, une involution I_4, d'ordre quatre, possédant un nombre fini de points de coïncidence, à savoir :

Quatre points de coïncidence quadruple

$$x_3 = x_4 = x_5 = 0, \quad \varphi_1(x_0, x_1, x_2) = 0, \quad \varphi_2(x_0, x_1, x_2) = 0;$$

Quatre points de coïncidence double (formant deux groupes de I_4)

$$x_4 = x_5 = 0, \quad x_3 \neq 0, \quad \psi(x_0, x_1, x_2) = 0,$$
$$\varphi_1(x_0, x_1, x_2) + a_{33}x_3^2 = 0, \quad \varphi_2(x_0, x_1, x_2) + b_{33}x_3^2 = 0.$$

Les hyperplans

$$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = 0$$

découpent, sur F, des courbes C invariantes pour T. Ces courbes C forment un réseau dépourvu de points-base et de degré huit; deux courbes C quelconques ont en commun deux groupes de I_4. Il en résulte que si nous rapportons projectivement les courbes C aux droites d'un plan, nous obtiendrons un plan double image de l'involution I_4.

Pour obtenir l'équation de ce plan double, posons

$$x_0 = 1, \quad x = x_1, \quad y = x_2, \quad z = \left(\frac{x_4}{x_5}\right)^2,$$

et éliminons $x_0, x_1, \ldots, x_5$ entre ces équations et les équations de F. On obtient ainsi l'équation du plan double sous la forme

$$\begin{vmatrix} [b_{33}\varphi_1(1, x, y) - a_{33}\varphi_2(1, x, y)]^2 & -(a_{33}b_{45} - b_{33}a_{45})z \\ [b_{45}\varphi_1(1, x, y) - a_{45}\varphi_2(1, x, y)]\,[\psi(1, x, y)]^2 & (a_4 z + a_5)^2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (1)$$

La courbe de diramation, c'est-à-dire le lieu des points (x, y) auxquels correspondent deux valeurs égales de z, a pour équation

$$\begin{vmatrix} b_{45} & a_{45} \\ \varphi_2 & \varphi_1 \end{vmatrix} \cdot \left[4a_4a_5 \begin{vmatrix} b_{33} & a_{33} \\ \varphi_2 & \varphi_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_{33} & b_{33} \\ a_{45} & b_{45} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{45} & a_{45} \\ \varphi_2 & \varphi_1 \end{vmatrix} \cdot \psi^2 \right] = 0. \qquad (2)$$

Cette courbe de diramation se compose donc d'une conique

$$b_{45}\varphi_1(1, x, y) - a_{45}\varphi_2(1, x, y) = 0$$

et d'une quartique tangente à cette conique aux quatre points situés sur la courbe

$$b_{33}\varphi_1(1, x, y) - a_{33}\varphi_2(1, x, y) = 0$$

et possédant, de plus, deux points doubles à l'intersection de cette dernière conique et de la droite

$$\psi(1, x, y) = 0.$$

Il en résulte que le plan double obtenu est de genres un et que, par suite, F est également de genres un.

Si l'on compare l'équation de la courbe de diramation (2) à celle de la courbe de diramation du plan double du premier type obtenue plus haut (n° 8), on voit que ces équations peuvent être identifiées. Il en résulte que le plan double (1) est le plan double le plus général du premier type.

Il serait aisé de vérifier sur le plan double (1) les propriétés énoncées dans le cas général, notamment concernant la position des points de diramation correspondant aux points de coïncidence de I_4. Nous ne le ferons pas ici. Bornons-nous à remarquer que la surface F est invariante pour la transformation birationnelle involutive

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \alpha\beta x_0 & \alpha\beta x_1 & \alpha\beta x_2 & \alpha\beta x_3 & \beta^2 x_5 & \alpha^2 x_4 \end{pmatrix},$$

où $\alpha = \sqrt{a_4}$, $\beta = \sqrt{a_5}$.

15. *Construction d'un plan double du cinquième type.* — Posons

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x_1^2, x_2^2, x_1x_2, x_3x_4) = a_{11}x_1^4 + a_{22}x_2^4 + a_{33}x_1^2x_2^2 + a_{44}x_3^2x_4^2 + a_{34}x_1x_2x_3x_4 \\ + a_{13}x_1^3x_2 + a_{14}x_1^2x_3x_4 + a_{23}x_1x_2^3 + a_{24}x_2^2x_3x_4, \end{aligned}\right\}$$

et considérons la surface du quatrième ordre F d'équation

$$\varphi(x_1^2, x_2^2, x_1x_2, x_3x_4) + a_3x_3^4 + a_4x_4^4 = 0.$$

C'est la surface du quatrième ordre la plus générale invariante pour l'homographie de période quatre

$$T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & ix_3 & -ix_4 \end{pmatrix},$$

et ne passant pas par les sommets du tétraèdre des coordonnées.

Sur F, T engendre une involution I_4 d'ordre quatre possédant quatre points de coïncidence quadruple

$$x_3 = x_4 = 0, \qquad \varphi(x_1^2,\ x_2^2,\ x_1 x_2,\ 0) = 0$$

et quatre points de coïncidence double (formant deux groupes de I_4)

$$x_1 = x_2 = 0, \qquad a_{44} x_3^2 x_4^2 + a_3 x_3^4 + a_4 x_4^4 = 0.$$

La surface F ne possède d'ailleurs pas de points singuliers et est donc de genres un.

Les quadriques

$$\lambda_0 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_1 x_2 + \lambda_4 x_3 x_4 = 0$$

découpent, sur F, des courbes C invariantes pour T. Ces courbes forment un système sans points-base et de degré 16, deux courbes C ayant en commun quatre groupes de I_4. Si nous rapportons projectivement les courbes C aux plans d'un S_3, nous obtiendrons une surface image de I_4. A cet effet, posons

$$x = \frac{x_1^2}{x_3 x_4}, \quad y = \frac{x_2^2}{x_3 x_4}, \quad z = \frac{x_1 x_2}{x_3 x_4}.$$

A une courbe C correspond alors une section plane du cône

$$z^2 = xy,$$

et la surface image de I_4 obtenue est donc un cône double.

Pour obtenir les équations de ce cône double, posons

$$x = \frac{x_1^2}{x_3 x_4}, \quad y = \frac{x_2^2}{x_3 x_4}, \quad z = \frac{x_1 x_2}{x_3 x_4}, \quad u = \left(\frac{x_3}{x_4}\right)^2,$$

et éliminons x_1, x_2, x_3, x_4 entre ces équations et l'équation de F. On obtient ainsi

$$z^2 = xy, \qquad u\varphi(x, y, z, 1) + a_3u^2 + a_4 = 0. \tag{1}$$

La courbe de diramation de ce cône double est

$$z^2 = xy, \qquad [\varphi(x, y, z, 1)]^2 - 4a_3a_4 = 0;$$

elle se compose donc de deux quartiques découpées sur le cône $z^2 = xy$ par les quadriques

$$\varphi(x, y, z, 1) + 2\sqrt{a_3a_4} = 0, \qquad \varphi(x, y, z, 1) - 2\sqrt{a_3a_4} = 0.$$

Ces deux quartiques se touchent en quatre points situés dans le plan à l'infini.

Pour obtenir un double plan birationnellement équivalent au cône double (1), rapportons projectivement les sections planes de ce dernier aux coniques

$$\lambda_1X^2 + \lambda_2Y^2 + \lambda_3XY + \lambda_4(X + Y) = 0,$$

coniques qui touchent à l'origine de la droite $X + Y = 0$. En d'autres termes, posons

$$x = \frac{X^2}{X + Y}, \quad y = \frac{Y^2}{X + Y}, \quad z = \frac{XY}{X + Y}, \quad u = Z.$$

Le cône double donne, pour transformé birationnel, le plan double

$$Z\varphi(X^2, Y^2, XY, X + Y) + (X + Y)^2(a_3Z^2 + a_4) = 0. \tag{2}$$

La courbe de diramation du plan double (2) est formée des deux courbes du quatrième ordre

$$\varphi(X^2, Y^2, XY, X + Y) + 2\sqrt{a_3a_4}\,(X + Y)^2 = 0,$$
$$\varphi(X^2, Y^2, XY, X + Y) - 2\sqrt{a_3a_4}\,(X + Y)^2 = 0.$$

Ces deux courbes possèdent deux points doubles infiniment voisins sur la droite $X + Y = 0$, à l'origine. Elles se touchent sur une conique formée de la droite $X + Y = 0$ et de la droite à l'infini (*). Ce plan double (2) est de genres un et présente les particularités des plans doubles du cinquième type.

On voit aisément qu'aux points de coïncidence quadruples de I_4 correspondent les points à l'infini de la courbe de dirama-tion. On passe, en effet, de la surface F au plan double en posant (T étant une variable d'homogénéité)

$$\frac{x_1^2}{X^2} = \frac{x_2^2}{Y^2} = \frac{x_1 x_2}{XY} = \frac{x_3 x_4}{T(X+Y)}.$$

Aux points de coïncidence quadruple correspondent les points du plan

$$T = 0, \qquad \varphi(X^2, Y^2, XY, 0) = 0.$$

Aux points de coïncidence double correspond le point $X = Y = 0$.

(*) Le fait que cette conique est dégénérée provient de ce que les formules de passage des x, y, z aux X, Y expriment que l'on projette le cône $z^2 = xy$ sur le plan $z = 0$ du point du cône situé à l'infini sur la droite $x = y = -z$. L'intersection du cône $z^2 = xy$ avec le plan de l'infini se projette donc suivant la droite de l'infini du plan et suivant la droite $X + Y = 0$ qui correspond au point de projection.

Marcel Hayez, imprimeur de l'Académie royale de Belgique, rue de Louvain, 112, Bruxelles.