ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE
Extrait des *Bulletins de la Classe des sciences*. Séance du 3 février 1923, n° 2, pp. 75-88.

GÉOMÉTRIE. — Sur les involutions cycliques d'ordre quatre appartenant à une surface de genres un.

(*Première communication*),

par LUCIEN GODEAUX, professeur à l'École militaire (*).

Nous nous proposons de reprendre et de compléter, dans cette note et dans une autre qui lui fera suite, nos recherches sur les involutions cycliques d'ordre quatre et de genres un ($p_a = P_4 = 1$), appartenant à une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$).

Nous avons montré autrefois comment on pouvait déterminer une surface normale image de l'involution telle qu'aux points de coïncidence de l'involution (en nombre nécessairement fini) correspondent des points isolés (**). Nous avons de plus déterminé le nombre de points de diramation sur cette surface et les singularités de ces points pour celle-ci. Nous reprenons l'étude des systèmes linéaires de courbes appartenant à cette surface, par une méthode nouvelle, ce qui nous permet de préciser davantage certains de nos résultats déjà obtenus.

Nous établissons ensuite les relations fonctionnelles existant entre les courbes tracées sur la surface image et l'ensemble des courbes rationnelles auxquelles les points de diramation sont équivalents en regard des transformations birationnelles.

(*) Présenté par M. Stuyvaert.

(**) *Mémoire sur les involutions appartenant à une surface de genres un.* (ANN. SCIENT. DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉR. Première partie, 1914 [3], XXXI, pp. 357-430; deuxième partie, 1919 [3], XXXVI, pp. 51-70.) — Dans la suite de ce travail ce mémoire sera désigné par *A*.

De ces relations nous déduisons deux théorèmes qui nous seront utiles dans la seconde note (*).

Cette seconde note sera consacrée à la construction de certaines surfaces particulières, images d'involutions de l'espèce envisagée ci-dessus.

1. Soient F une surface algébrique de genres un ($p_a = P_4 = 1$) contenant une involution cyclique I_4 d'ordre quatre et de genres un ($p_a = P_4 = 1$); Φ une surface image de cette involution. L'involution I_4 possède un nombre fini de points de coïncidence, précisément quatre points de coïncidence quadruple et quatre points de coïncidence double, formant deux groupes de l'involution (**).

Nous avons démontré (***) que l'on peut construire, sur F, un système linéaire complet $|C|$, dépourvu de points-base, de dimension aussi grande qu'on le veut, tel que la transformation birationnelle T de F en elle-même, génératrice de I_4, transforme une courbe C en une courbe C_0. De plus, il existe des courbes C, formant un système linéaire incomplet $|C_0|$, transformées en elles-mêmes par T, le système $|C_0|$ étant dépourvu de points-base. Le système $|C_0|$ est donc composé au moyen de l'involution I_4. En rapportant projectivement les courbes de $|C_0|$ aux hyperplans d'un espace linéaire de même dimension que $|C_0|$, on obtient donc un « modèle projectif » de la surface Φ, modèle projectif qui est normal.

Ceci étant rappelé, désignons par π le genre des sections hyperplanes de Φ, que nous supposerons normale. Il résulte des propriétés des surfaces de genres un que Φ est d'ordre

(*) Pour ne pas allonger inutilement le travail actuel, nous nous sommes borné à rappeler brièvement les résultats que nous avons obtenus antérieurement et qui nous étaient nécessaires. Nous avons de plus supposé connus les principaux théorèmes de la théorie des surfaces algébriques, ainsi que la théorie des homographies cycliques.

(**) *A*, chap. III, n° 17.

(***) *A*, chap. I, n^os^ 3, 4.

$2\pi - 2$ et située dans un espace linéaire S_π de dimension $\pi(\pi \geq 2)$. Les courbes C_0 et, par suite, les courbes C sont de genre $4\pi - 3$ et forment un système complet $|C|$ de degré $8\pi - 8$ et de dimension $4\pi - 3$.

Rapportons projectivement les courbes de $|C|$ aux hyperplans d'un espace linéaire à $4\pi - 3$ dimensions, $S_{4\pi-3}$; nous obtenons ainsi un modèle projectif normal de F, que nous désignerons toujours par F.

Dans nos travaux cités, nous avons construit un système $|C|$ simple, de manière que les modèles projectifs de F et Φ soient simples. Nous pouvons, dans la suite de cette note, laisser tomber cette restriction. Les surfaces F et Φ pourront donc être des surfaces multiples. Remarquons d'ailleurs que si F est multiple d'ordre n, c'est-à-dire constituée par une surface normale d'ordre $\frac{8\pi-8}{n}$ comptée n fois, il en est de même de Φ, c'est-à-dire que Φ est également multiple d'ordre n. La réciproque n'est pas vraie.

Désignons par A_1, A_2, A_3, A_4 les points de coïncidence quadruple; par A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22} les points de coïncidence double de l'involution I_4 sur F; par A'_1, A'_2, A'_3, A'_4, A'_{01}, A'_{02} les points de diramation correspondant sur Φ, A'_{01} correspondant au couple A_{11}, A_{12}; A'_{02} au couple A_{21}, A_{22}. Des groupes de l'involution I_4 sur F sont respectivement $4A_1$, $4A_2$, $4A_3$, $4A_4$, $2A_{11} + 2A_{12}$, $2A_{21} + 2A_{22}$.

Si la surface Φ est simple, chacun des points A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 est un point double biplanaire de Φ, auquel est infiniment voisin un point double conique; chacun des points A'_{01}, A'_{02} est un point double conique (*). Dans tous les cas, que Φ soit simple ou multiple, les points de diramation sont des points isolés de cette surface.

Enfin, nous avons démontré (**) qu'il existe dans $|C|$, outre

(*) *A*, chap. III, n° 16.

(**) L. Godeaux, *Sur les correspondances rationnelles entre deux surfaces de genres un* (Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 1922, pp. 189-196.)

$|C_0|$, trois systèmes partiels composés au moyen de I_4, de dimension $\pi - 2$ chacun.

2. La transformation birationnelle T, faisant correspondre à une section hyperplane C de F une section hyperplane de cette surface, est nécessairement déterminée par une homographie H, cyclique de période quatre, de $S_{4\pi-3}$, pour laquelle F est invariante.

L'homographie H^2, de période deux, possède deux espaces linéaires unis. Cette homographie H^2 détermine, sur F, une transformation birationnelle T^2, de période 2, engendrant une involution d'ordre deux. Il en résulte que les espaces unis ont les dimensions $2\pi - 1$, $2\pi - 3$ (*). Nous les désignerons par $S_{2\pi-1}$, $S_{2\pi-3}$. De plus, l'espace $S_{2\pi-3}$ ne rencontre pas F et l'espace $S_{2\pi-1}$ rencontre cette surface en huit points (simples). Remarquons que les points A_1, A_2, A_3, A_4, A_{11}, A_{12}, A_{22} sont invariants pour T^2; ce sont donc précisément les huit points communs à F et à $S_{2\pi-1}$.

Dans chacun des espaces $S_{2\pi-1}$, $S_{2\pi-3}$ unis pour H^2, l'homographie H détermine une homographie de période deux. Il y a donc, dans chacun de ces espaces, deux espaces linéaires unis pour H. Désignons par S, S′ ceux qui se trouvent dans $S_{2\pi-1}$; par S″, S‴ ceux qui se trouvent dans $S_{2\pi-3}$.

Les hyperplans passant par trois des espaces S, S′, S″, S‴ découpent, sur F, des sections hyperplanes transformées chacune en elles-mêmes par H, donc par T. Il y a quatre systèmes d'hyperplans ainsi déterminés, et nous retrouvons ainsi les quatre systèmes de courbes de $|C|$ composés avec I_4.

Supposons que les hyperplans passant par S′, S″, S‴ découpent, sur F, le système $|C_0|$, de dimension π. Puisque $|C_0|$ est dépourvu de points-base par construction, les espaces S′, S″, S‴ ne rencontrent pas F. D'autre part, il résulte de la

(*) L. Godeaux. *Mémoire sur les Surfaces algébriques doubles*..... (Ann. de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1914 [3], V, pp. 289-312) et A, chap. VII.

théorie des homographies cycliques que S a la dimension π. Nous le désignerons par S_π.

Les quatre points A_1, A_2, A_3, A_4, invariants pour T, donc pour H, doivent de plus se trouver dans S_π, et ce sont les seuls points communs à F et à cet espace.

Les hyperplans passant par S, S'', S''' découpent, sur F, un système linéaire (incomplet) que nous désignerons par $|C_1|$ et dont la dimension est $\pi - 2$; il en résulte que S' est de dimension $\pi - 2$. Nous désignerons cet espace par $S'_{\pi-2}$.

De même, S'', S''' sont de dimensions $\pi - 2$ et nous les désignerons par $S''_{\pi-2}$, $S'''_{\pi-2}$. Les systèmes linéaires incomplets découpés sur F par les hyperplans passant par S_π, $S'''_{\pi-2}$, $S'_{\pi-2}$, ou par S_π, $S'_{\pi-2}$, $S''_{\pi-2}$ seront désignés respectivement par $|C_2|$, $|C_3|$.

3. Considérons un des points de coïncidence quadruple, par exemple A_1, et soit p_1 le plan tangent à F en ce point (le point A_1 est nécessairement un point simple de F, car s'il était multiple, il y aurait une courbe, ou un ensemble de courbes, rationnelle, de degré -2, qui serait une courbe de coïncidence). Il résulte de nos recherches antérieures (*) que T opère, dans le domaine du premier ordre de A_1, comme une homographie involutive; par suite, les droites du plan p_1 issues de A_1 sont invariantes pour H^2 et H opère, sur ce faisceau de droites, comme une homographie involutive. Il y a donc deux droites de ce faisceau, soient t_{11}, t_{12}, invariantes pour H.

Supposons tout d'abord que le plan p_1 n'ait en commun, avec $S_{2\pi-1}$, que le seul point A_1. Dans ces conditions, l'homographie H^2 transformant en elle-même une droite t, de p_1, passant par A_1, laisse deux points de cette droite invariants. L'un de ces points est A_1; l'autre appartient nécessairement à l'espace $S_{2\pi-3}$. De plus, si t est distincte de t_{11}, t_{12}, la droite t ne peut rencontrer $S''_{\pi-2}$, $S'''_{\pi-2}$, sans quoi elle serait invariante pour H.

(*) A, chap. III, nos 13, 16.

Les droites t_{11}, t_{12}, étant invariantes pour H, ont deux points invariants pour cette homographie. L'un de ces points est A_1, l'autre se trouve nécessairement dans $S''_{\pi-2}$ ou $S'''_{\pi-2}$. Les deux droites t_{11}, t_{12} ne peuvent d'ailleurs rencontrer un de ces espaces, car alors il en serait de même de toute tangente t à F en A_1, ce qui a été reconnu impossible. Il en résulte que le plan p_1 rencontre $S''_{\pi-2}$ et $S'''_{\pi-2}$ chacun en un point.

Supposons maintenant que le plan p_1 puisse rencontrer l'espace $S_{2\pi-1}$ en une droite, ou appartenir à cet espace.

Les hyperplans passant par $S_{2\pi-3}$ et A_1 découpent, sur F, des courbes invariantes pour H^2 et ayant un point double à tangentes variables en A_1; par suite, ces hyperplans contiennent le plan tangent p_1. Ces hyperplans ont en commun un espace linéaire à $2\pi - 2$ dimensions, certainement invariant pour H^2. Supposons que cet espace ait en commun avec $S_{2\pi-1}$ un espace linéaire à ρ dimensions; ce dernier espace contiendra certainement la partie commune à $S_{2\pi-1}$ et au plan p_1. Dans l'espace à $2\pi - 2$ dimensions dont il vient d'être question, H^2 a comme éléments unis $S_{2\pi-3}$ et l'espace à ρ dimensions. D'après la théorie des homographies, on doit avoir

$$\rho + 2\pi - 3 + 2 = 2\pi - 2 + 1;$$

donc $\rho = 0$. Par suite, p_1 et $S_{2\pi-1}$ ne peuvent avoir que le point A_1 en commun.

En résumé : *En un point de coïncidence quadruple de l'involution* I_4 *sur* F, *le plan tangent à cette surface rencontre en un et un seul point chacun des espaces* $S''_{\pi-2}$, $S'''_{\pi-2}$ *unis de l'homographie* H *de période quatre, génératrice de l'involution.*

Nous désignerons par t_{i1}, t_{i2} les tangentes à F en $A_i (i = 1, 2, 3, 4)$, s'appuyant respectivement sur $S''_{\pi-2}$, $S'''_{\pi-2}$.

4. Considérons maintenant les points de coïncidence double A_{11}, A_{12} et soient p_{11}, p_{12} les plans tangents à F respectivement en ces points. L'homographie H^2 laisse invariant chacun de ces points et chacun des plans p_{11}, p_{12}, et l'homographie H fait correspondre A_{12} à A_{11}, p_{12} à p_{11}.

En répétant le raisonnement fait plus haut (n° 3), on démontrerait que le plan p_{11} ne peut avoir que le point A_{11}, le plan p_{12} que le point A_{12} en commun avec l'espace $S_{2\pi-1}$.

Chacune des tangentes à F en A_{11} est invariante pour H^2, mais H transforme une de ces tangentes en une tangente à F en A_{12}. Il en résulte que le plan p_{11} ne peut rencontrer les espaces linéaires $S''_{\pi-2}$, $S'''_{\pi-2}$; par contre, chacune des tangentes à F en A_{11}, étant invariante pour H^2, doit avoir deux points unis pour cette homographie; l'un de ces points est A_{11}; l'autre se trouve necessairement dans $S_{2\pi-3}$. On voit donc que p_{11} rencontre $S_{2\pi-3}$ en une droite. Il en est de même de p_{12}, et ces deux droites ainsi obtenues sont transformées l'une dans l'autre par H.

En résumé : *En un point de coïncidence double, le plan tangent à* F *rencontre en une droite l'espace* $S_{2\pi-3}$ *uni pour l'homographie* H^2, *mais il ne rencontre pas les espaces* $S''_{\pi-2}$, $S'''_{\pi-2}$ *unis pour* H.

5. Les résultats qui viennent d'être obtenus vont nous permettre de poursuivre l'étude des systèmes $|C_1|$, $|C_2|$, $|C_3|$ et des systèmes qui leur correspondent sur Φ.

Les courbes C_1 sont découpées sur F par les hyperplans passant par les espaces S_π, $S''_{\pi-2}$, $S'''_{\pi-2}$. Ces hyperplans contiennent donc les points A_1, A_2, A_3, A_4 et les plans tangents à F en ces points. Les courbes C_1 possèdent donc des points doubles en A_1, A_2, A_3, A_4.

Désignons par $|\Gamma|$ le système des courbes de Φ qui correspondent aux courbes de $|C_0|$, et par $|\Gamma_1|$ le système des courbes de Φ correspondant aux courbes de $|C_1|$. Il résulte des constructions faites plus haut que $|\Gamma|$, de genre π, de degré $2\pi - 2$ et de dimension π, n'est autre que le système des sections hyperplanes de Φ. Le système $|\Gamma_1|$ est certainement complet et a la même dimension $\pi - 2$ que $|C_1|$; $|\Gamma_1|$ est, par suite, de degré $2\pi - 6$ et de genre $\pi - 2$. Il en résulte que deux courbes C_1 se rencontrent, en dehors des points A_1, A_2, A_3, A_4, en

$8\pi - 24$ points; par suite, il y a 4 intersections de deux courbes C_1 absorbées en chacun des points A_1, A_2, A_3, A_4, et les courbes C_1 ont donc, en ces points, des points doubles à tangentes variables.

Une courbe C_1 contient une involution d'ordre 4, cyclique, engendrée par H, et possédant, d'après ce qui précède, huit points de coïncidence double; cette involution étant représentée par une courbe Γ_1, a le genre $\pi - 2$; on doit donc avoir, par la formule de Zeuthen,

$$8(\pi - 3) + 8 = 2(4\pi - 8),$$

car C_1 est de genre $4\pi - 3 - 4 = 4\pi - 7$. On a ainsi une vérification des résultats précédents.

Les deux branches d'une courbe C_1 en un des points A_1, A_2, A_3, A_4 sont transformées l'une dans l'autre par T ou H; par suite, la courbe Γ_1 correspondante possède un point simple au point de diramation corespondant sur Φ.

Observons de plus qu'une courbe C_0 et une courbe C_1 se rencontrent en $8\pi - 8$ points; donc une courbe Γ et une courbe Γ_1 se rencontrent en $2\pi - 2$ points, c'est-à-dire que les courbes Γ_1 sont d'ordre $2\pi - 2$.

En résumé : *Il existe sur la surface Φ un système linéaire complet de courbes d'ordre $2\pi - 2$ et de genre π, passant simplement par les points de diramation quadruple* A'_1, A'_2, A'_3, A'_4.

6. Les courbes C_2 sont découpées par les hyperplans passant par S_π, $S'_{\pi-2}$, $S'''_{\pi-2}$. Ces hyperplans contiennent donc l'espace $S_{2\pi-1}$, donc les points A_1, A_2. A_3, A_4, A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, mais ils ne contiennent pas nécessairement les plans tangents en ces points à la surface F. Désignons, pour faciliter l'écriture, ces hyperplans par Σ_2.

Un hyperplan Σ_2, contenant A_1 et $S'''_{\pi-2}$, contient la droite t_{12}, tangente F en A_1. Si tous les hyperplans Σ_2 contenaient le plan tangent p à F en A_1, ils contiendraient le point commun à t_{11} et à $S''_{\pi-2}$, ce qui est contraire à la théorie des homographies cycliques. Il en résulte que les courbes C_2 passent simplement par A_1 et y ont pour tangente t_{12}. De même, les courbes C_2 passent simplement par A_2, A_3, A_4 et y ont respectivement pour tangentes t_{22}, t_{32}, t_{42}.

Les hyperplans Σ_2 rencontrent les plans p_{11}, p_{12}, respectivement tangents à F en A_{11}, A_{12}, en des droites variables. S'ils contenaient un de ces plans, ils contiendraient l'autre, puisque ces plans sont transformés l'un dans l'autre par H. S'ils contenaient ces deux plans, ils contiendraient les droites intersections de ces plans avec $S_{2\pi-3}$. Mais ces droites sont transformées l'une dans l'autre par H et ne rencontrent ni $S''_{\pi-2}$ ni $S'''_{\pi-2}$. Il en résulte que les hyperplans Σ_2 contiendraient toutes les droites s'appuyant sur les deux droites rencontrées plus haut, sur $S'''_{\pi-2}$ et, par suite, sur $S''_{\pi-2}$. En d'autres termes, les hyperplans Σ_2 contiendraient tous une même partie de $S''_{\pi-2}$, ce qui est contraire à la théorie des homographies cycliques.

Il en résulte que les courbes C_2 passent simplement par les points A_{12}, A_{22} et de même par A_{21}, A_{22}.

Désignons par $|\Gamma_2|$ le système des courbes qui correspondent sur Φ aux courbes C_2. Le système $|\Gamma_2|$ est complet, de genre $\pi-2$, de degré $2\pi-6$, de dimension $\pi-2$, et ses courbes ont l'ordre $2\pi-2$. Il résulte de ce qui précède que les courbes Γ_2 passent simplement par les points de diramation A'_1, A'_2, A'_3, A'_4, A'_{01}, A'_{02}, en touchant, aux quatre premiers, un des plans tangents à la surface Φ.

On verrait de même que les courbes C_3 passent simplement par les points A_1, A_2, A_5, A_4, en y touchant respectivement les droites t_{11}, t_{21}, t_{31}, t_{41}, et par les points A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}. Au système $|C_3|$ correspond, sur Φ, un système complet $|\Gamma_3|$, de dimension $\pi-2$, de genre $\pi-2$, de degré $2\pi-6$, et dont les courbes ont l'ordre $2\pi-2$. Les courbes Γ_3 passent simplement par A'_1, A'_2, A'_3, A'_4, A'_{01}, A'_{02}. En chacun des quatre premiers points elles touchent celui des plans tangents qui n'est pas touché par les courbes Γ_2.

En résumé : *Il existe sur la surface Φ deux systèmes linéaires complets de courbes d'ordre $2\pi - 2$ et de genre $\pi - 2$, passant simplement par les six points de diramation. En chacun des quatre points de diramation quadruple, les courbes de chaque système touchent un des plans tangents.*

La formule de Zeuthen, appliquée à la correspondance entre une courbe Γ_2 et la courbe C_2 correspondante, et la comparaison des degrés des systèmes $|\Gamma_2|$, $|C_2|$ fournissent des vérifications de nos résultats.

7. — On sait qu'un point double biplanaire auquel est infiniment voisin un point double conique équivaut, au point de vue des transformations birationnelles, à un ensemble de trois courbes rationnelles de degré -2. Deux d'entre elles représentent les points infiniment voisins du point considéré sur chacune des nappes de la surface; elles ne se rencontrent pas. La troisième, qui a un point commun avec chacune des deux autres, représente le point double conique. Ces courbes apparaissent dans des transformées birationnelles de la surface, convenablement choisies.

Nous désignerons par $\Gamma_{i1}, \Gamma_{i2}, \Gamma_{i0}$ les trois courbes rationnelles dont l'ensemble équivaut au point A'_i $(i = 1, 2, 3, 4)$, la courbe Γ_{i0} étant celle qui rencontre les deux autres chacune en un point; Γ_{i1}, Γ_{i2} ne se rencontrent pas.

Observons que les courbes C_0 de F passant par A_i acquièrent en ce point un point double dont les tangentes sont t_{i1}, t_{i2}. A ces courbes C_0 correspondent les sections hyperplanes de Φ passant par A'_i ; par suite, les points des courbes Γ_{i1}, Γ_{i2} correspondent respectivement aux points de t_{i1}, t_{i2}, infiniment voisins de A_i, c'est-à-dire aux points de F, infiniment voisins de A_i, qui sont invariants pour T. Il en résulte que les points de Γ_{i0} correspondent aux points de F, infiniment voisins de A_i, qui sont invariants pour T^2.

Les points doubles coniques A'_{01}, A'_{02} sont équivalents chacun à une courbe rationnelle de degré -2. Nous désignerons ces courbes respectivement par Γ'_1, Γ'_2. Les points de la courbe Γ'_1, par exemple, correspondent aux couples de points de F, infiniment voisins de A_{11}, A_{12} respectivement, transformés l'un dans l'autre par H. Cela résulte du fait que les courbes C_0 passant par A_{11} passent par A_{12} et ont, en chacun de ces points, un point double à tangentes variables.

8. — Nous allons maintenant rechercher les équations fonctionnelles reliant les courbes $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$.

A une courbe C, non transformée en elle-même par T, correspond sur Φ une courbe Γ^*, d'ordre $8\pi - 8$, de genre $4\pi - 3$, possédant $12(\pi - 1)$ points doubles (variables avec C), en des points simples de Φ. Ce sont les points qui correspondent aux couples de points de C conjugués par H. Lorsque C varie d'une manière continue dans $|C|$ et vient coïncider avec une courbe C_1, Γ^* varie d'une manière continue dans un système linéaire (puisque Φ est régulière) $|\Gamma^*|$ et vient coïncider avec une courbe 4Γ. On a donc $\Gamma^* \equiv 4\Gamma$.

Lorsque C, variant d'une manière continue dans $|C|$, vient coïncider avec une courbe C_1, Γ^* vient coïncider avec une courbe $4\Gamma_1$, augmentée des composantes rationnelles des points A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 par lesquels passent les courbes Γ_1. A cause du rôle symétrique des points A'_1, A'_2, A'_3, A'_4, on peut écrire immédiatement

$$\left.\begin{aligned} 4\Gamma_1 + \lambda_1(\Gamma_{11} + \Gamma_{21} + \Gamma_{31} + \Gamma_{41}) + \lambda_2(\Gamma_{12} + \Gamma_{22} + \Gamma_{32} + \Gamma_{42}) \\ + \lambda(\Gamma_{10} + \Gamma_{20} + \Gamma_{30} + \Gamma_{40}) \equiv \Gamma^* \equiv 4\Gamma, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

λ_1, λ_2, λ étant des entiers que nous allons déterminer.

Les courbes C_1 passent par A_1, par exemple, et y ont un point double à tangentes variables. En d'autres termes, chaque courbe C_1 a deux points infiniment voisins de A_1, et ces deux points sont conjugués pour T. Il en résulte qu'à ces deux points correspond un point de la courbe Γ_{10}. De plus, une courbe Γ_1 ne rencontre pas en général les courbes Γ_{11}, Γ_{12}. Si l'on introduit ces conditions dans la relation fonctionnelle (1), on trouve

$$4+\lambda_1+\lambda_2-2\lambda=0, \quad -2\lambda_1+\lambda=0, \quad -2\lambda_2+\lambda=0.$$

On en déduit $\lambda=4$, $\lambda_1=\lambda_2=2$. Par suite, on a

$$4\Gamma_1+2\sum_i^{1,\dots,4}\Gamma_{i1}+2\sum_i^{1,\dots,4}\Gamma_{i2}+4\sum_i^{1,\dots,4}\Gamma_{i0}\equiv 4\Gamma.$$

La division sur une surface de genres un étant une opération univoque (*), on en déduit encore

$$2\Gamma_1+\sum_i^{1,\dots,4}(\Gamma_{i1}+\Gamma_{i2}+2\Gamma_{i0})\equiv 2\Gamma. \qquad (2)$$

Remarquons que la considération de la surface qui représente l'involution d'ordre deux engendrée sur F par T^2 permettrait de prévoir que la relation (1) est divisible par deux.

De la relation (2) on peut tirer un théorème qui nous sera utile dans la suite.

Le système linéaire $|2\Gamma|$ est découpé, sur Φ, par les hyperquadriques. Le système

$$|2\Gamma_1|=|2\Gamma-\sum_i^{1,\dots,4}(\Gamma_{i1}+\Gamma_{i2}+\Gamma_{i0})|$$

est également découpé par des hyperquadriques; mais celles-ci passent par les points A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 et sont tangentes, en chacun de ces points, à la droite commune aux deux plans tangents. De plus, le long de chaque courbe Γ_1, il y a une de ces hyperquadriques qui touche la surface Φ.

En résumé : *Parmi les hyperquadriques passant par les points de diramation quadruple de Φ et touchant la droite commune aux deux plans tangents à cette surface en chacun de ces points, il y en a $\infty^{\pi-2}$ qui touchent la surface Φ en chaque point d'intersection.*

(*) Severi, *La base minima pour la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique* (Ann. de l'École normale supér., 1908 [3], XXV, pp. 449-468.)

9. Reprenons la courbe C et sa correspondante $\Gamma^* \equiv 4\Gamma$ sur Φ. Lorsque C varie dans $|C|$ d'une manière continue et vient coïncider avec une courbe C_2, Γ^* vient coïncider avec une courbe $4\Gamma_2$ augmentée des composantes rationnelles des points de diramation. On a donc, à cause de la symétrie des rôles de ces points dans la question,

$$\left.\begin{aligned}&4\Gamma_2 + \mu_1(\Gamma_{11} + \Gamma_{21} + \Gamma_{31} + \Gamma_{41}) + \mu_2(\Gamma_{12} + \Gamma_{22} + \Gamma_{32} + \Gamma_{42}) \\ &\quad + \mu(\Gamma_{10} + \Gamma_{20} + \Gamma_{30} + \Gamma_{40}) + \mu'(\Gamma'_1 + \Gamma'_2) \equiv 4\Gamma.\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Les courbes C_2 étant tangentes en A_1 à la droite t_{12}, les courbes Γ_2 rencontrent Γ_{12} en un point; mais elles ne rencontrent pas Γ_{10} ni Γ_{11}. De même, les courbes C_2 passant simplement par A_{11} et A_{12}, les courbes Γ_2 rencontrent Γ'_1 en un point. Si l'on introduit ces données dans l'équation (1), on obtient

$$\mu = 2\mu_1, \quad \mu + 4 = 2\mu_2, \quad \mu_1 + \mu_2 = 2\mu, \quad \mu' = 2.$$

On a donc $\mu = 2$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 3$, $\mu' = 2$. Par suite, la relation (1) devient

$$4\Gamma_2 + \sum_i^{1,\ldots,4} (\Gamma_{i1} + 3\Gamma_{i2} + 2\Gamma_{i0}) + 2(\Gamma'_1 + \Gamma'_2) \equiv 4\Gamma. \qquad (2)$$

De même, on a

$$4\Gamma_3 + \sum_i^{1,\ldots,4} (3\Gamma_{i1} + \Gamma_{i2} + 2\Gamma_{i0}) + 2(\Gamma'_1 + \Gamma'_2) \equiv 4\Gamma. \qquad (3)$$

On pourrait déduire des relations (2), (3) qu'il existe deux familles d'hypersurfaces du quatrième ordre ayant un contact du troisième ordre le long des courbes Γ_2, Γ_3; c'est un fait que nous avons déjà établi antérieurement (*).

En additionnant membre à membre les équations (2), (3), nous obtenons

$$4(\Gamma_2 + \Gamma_3) + 4\sum_i^{1,\ldots,4} (\Gamma_{i1} + \Gamma_{i2} + \Gamma_{i0}) + 4(\Gamma'_1 + \Gamma'_2) \equiv 8\Gamma,$$

(*) *A*, chap. IX, n° 59.

et, par suite, puisque sur Φ la division est une opération univoque, on a

$$(\Gamma_2+\Gamma_3)+\sum_{i}^{i,\ldots,4}(\Gamma_{i1}+\Gamma_{i2}+\Gamma_{i0})+\Gamma'_1+\Gamma'_2\equiv 2\Gamma.$$

De cette relation, on déduit que les courbes du système

$$|\Gamma_0|=|\Gamma_2+\Gamma_3|$$

rencontrent les courbes Γ_{11}, Γ_{21}, Γ_{31}, Γ_{41}, Γ_{12}, Γ_{22}, Γ_{32}, Γ_{42}, Γ'_1, Γ'_2, chacune en un point, mais ne rencontrent pas les courbes Γ_{10}, Γ_{20}, Γ_{30}, Γ_{40}. Il en résulte que ce système est découpé par les hyperquadriques passant par les points de diramation de Φ.

Les systèmes $|\Gamma_2|$, $|\Gamma_3|$ *sont résidus l'un de l'autre par rapport au système découpé sur la surface* Φ *par les hyperquadriques passant par les six points de diramation.*

C'est un résultat que l'on pouvait prévoir. Si nous considérons, en effet, sur F le système $|2C|$, il est invariant pour T. Les courbes de $|2C|$ passant par les points A_1, A_2, A_3, A_4, A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22} acquièrent, en ces points, des points doubles à tangentes fixes pour les quatre premiers, variables pour les autres. Parmi ces courbes de $|2C|$ se trouvent précisément les courbes C_1+C_2.

Bruxelles. — Imprimerie M. Hayez, rue de Louvain, 112.