LES RECHERCHES DE R. TORELLI SUR LES COURBES ALGÉBRIQUES AYANT MÊME TABLEAU DE PÉRIODES DES INTÉGRALES ABÉLIENNES

PAR M. L. GODEAUX,
Professeur à l'Université de Liége.

On sait que la condition nécessaire et suffisante pour que deux courbes algébriques de même genre p soient birationnellement équivalentes (c'est-à-dire qu'il existe une correspondance birationnelle entre les points de ces courbes) est qu'elles aient mêmes modules. Ces modules, au nombre de $3p-3$ en général, dépendent des coefficients des équations des courbes. On peut se poser une question analogue au sujet de deux courbes algébriques de même genre dont on connaît les tableaux de périodes des intégrales abéliennes de première espèce, en considérant en somme ces périodes comme des modules transcendants des courbes. Une réponse à cette question a été donnée en 1913 par R. Torelli par un énoncé d'une extrême simplicité.

Appelons périodes normales des intégrales de première espèce attachées à une courbe algébrique irréductible les périodes relatives à un système de rétrosections de la surface de Riemann correspondante. L'énoncé de R. Torelli est le suivant :

Si deux courbes algébriques de même genre possèdent des intégrales normales de première espèce ayant le même tableau de périodes normales, elles sont birationnellement identiques.

Nous nous proposons d'indiquer à grands traits comment R. Torelli est parvenu à ce théorème, en signalant divers travaux sur la même question parus récemment en Italie, et notamment diverses recherches ultérieures de R. Torelli lui-même ([1]).

1. *Variété de Jacobi.* — Soit C une courbe algébrique irréductible de genre $p > 0$. Considérons les séries linéaires g_p de groupes de p points appartenant à la courbe C. Si une de ces séries est spéciale, c'est-à-dire si ses groupes appartiennent à des groupes de la série canonique g_{2p-2}^{p-1} de C, cette série a la dimension 1, c'est une g_p^1. Si une série g_p n'est pas spéciale, elle a la dimension 0, c'est-à-dire qu'elle comprend un seul groupe de p points; c'est une série g_p^0.

On appelle *variété de Jacobi* attachée à la courbe C, la variété V_p, à p dimensions, dont les points représentent sans exception les séries g_p de la courbe C. La variété de Jacobi est déterminée à des transformations birationnelles près.

Dans la série canonique g_{2p-2}^{p-1} de la courbe C se trouvent ∞^{p-2} séries linéaires g_p^1. Les points de la variété V_p correspondant à ces séries forment une variété W_{p-2}, à $p-2$ dimensions, irréductible, parce que ses points sont en correspondance birationnelle avec les groupes de $p-2$ points de la courbe irréductible C.

La variété de Jacobi est une variété abélienne. Si nous désignons par $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_p(x)$ un système de p intégrales normales de première espèce de C, et si nous posons

$$U_i \equiv u_i(x_1) + u_1(x_2) + \ldots + u_i(x_p), \qquad (\text{mod. périodes})$$
$$(i = 1, 2, \ldots, p),$$

$x_1, x_2, \ldots, x_p$ étant p points de la courbe C ou de la surface de Riemann correspondante, la variété V_p pourra être représentée par les équations

$$X_i = \varphi_i(U_1, U_2, \ldots, U_p) \qquad (i = 1, 2, \ldots, p+1),$$

où les φ sont des fonctions abéliennes.

([1]) Travail écrit à l'occasion d'une communication faite au séminaire de M. Hadamard. Nous remercions M. Hadamard de nous avoir permis de rendre hommage à la mémoire d'un géomètre avec lequel nous avions entretenu de cordiales relations. R. Torelli naquit à Naples le 7 juin 1889 et mourut à Monfalcone (Isonzo) le 9 septembre 1915. On trouvera une notice sur la vie et les travaux de R. Torelli, due à son Maître F. Severi, dans le *Bollettino di Bibliografia e Storia delle Scienze Mathematiche*, 1916.

La variété de Jacobi est cependant une variété abélienne particulière, à cause de la présence de la variété W_{p-2}.

2. *Transformations birationnelles de la variété de Jacobi.* — La variété de Jacobi admet deux séries ∞^p de transformations birationnelles en elle-même, comme cela résulte de la représentation transcendante de cette variété. Mais on peut obtenir ces transformations par un procédé géométrique, dû à M. Castelnuovo ([1]) et que nous rappellerons brièvement.

Considérons, sur C, une série g_{2p}^p de groupes de $2p$ points et de dimension p, nécessairement non spéciale. Soit G un groupe de p points de C. Ce groupe appartient à un seul groupe de la série g_{2p}^p et ce dernier groupe est complété par un groupe G′ de p points, qui est ainsi complètement déterminé par G. Lorsque G varie, G′ varie et les points de V_p images de G, G′ se correspondent dans une transformation birationnelle de cette variété en elle-même. Comme il y a sur C ∞^p séries g_{2p}^p, il existe, sur V_p, ∞^p transformations analogues; ce sont les *transformations* (ordinaires) *de seconde espèce* de V_p. Une série g_{2p}^p étant complètement déterminée par un de ses groupes, il existe une de ces transformations faisant passer d'un point de V_p à un point de V_p.

Considérons maintenant deux séries linéaires g_{2p}^p, $g_{2p}'^p$ et indiquons par G, G′, H, H′ ..., des groupes de p points de C. Supposons que G et G′, H et H′ forment des groupes de la série g_{2p}^p, G′ et G_1, H′ et H_1 des groupes de $g_{2p}'^p$, ce que nous indiquerons par la notation habituelle

$$G + G' \equiv H + H', \qquad G' + G_1 \equiv H' + H_1.$$

On en déduit

$$G + H_1 \equiv G_1 + H.$$

Laissons fixes les groupes H et H_1, et faisons varier G; G_1 varie et les points de V_p, images des groupes G, G_1, se correspondent dans une transformation birationnelle de V_p en elle-même. Cette

([1]) CASTELNUOVO, *Le corrispondenze univoche tra gruppi di p punti sopra una curva di genere p* (*Rendiconti R. Istituto Lombardo*, 1892). Cette méthode de M. Castelnuovo s'étend aux surfaces. *Voir* CASTELNUOVO, *Sugli integrali semplici appartenenti ad una superficie irregolare* (*Rend. R. Accad. Lincei*, 1er sem. 1905).

transformation est le produit des transformations de seconde espèce déterminées par les séries g^p_{2p}, g'^p_{2p}. Les nouvelles transformations de V_p ainsi obtenues sont les *transformations* (ordinaires) *première espèce;* elles sont en nombre ∞^p et forment un groupe transitif. Il existe une transformation du groupe faisant passer d'un point de V_p à un point de V_p.

On reconnaît, dans ces transformations, celles qui ont été l'objet autrefois de travaux importants de M. Picard (1).

3. *Systèmes* Σ *sur la variété de Jacobi.* — Il existe ∞^{p-1} groupes de p points de la courbe C appartenant aux groupes d'une série linéaire g^{p-1}_{2p-1}, d'ordre $2p-1$ et de dimension $p-1$, nécessairement non spéciale, de cette courbe. Les points de V_p, images de ces groupes de p points, forment une variété algébrique V_{p-1}, à $p-1$ dimensions. Les séries linéaires g^{p-1}_{2p-1} de C étant en nombre ∞^p, on obtient ainsi, sur V_p, un système Σ_p, de dimension p, de variétés V_{p-1}.

Parmi les séries g^{p-1}_{2p-1}, il y en a ∞^1 formées de la série canonique g^{p-1}_{2p-2} et d'un point fixe. Il leur correspond, sur V_p, ∞^1 variétés V_{p-1}, *spéciales*, passant par W_{p-2}, et que nous indiquerons par V'_{p-1}. Ces ∞^1 variétés V'_{p-1} forment un système Σ'_p d'indice p, c'est-à-dire que par un point de V_p passent p variétés V'_{p-1} de Σ'_p.

Les ∞^p variétés V_{p-1} peuvent être représentées par les équations

$$\theta(U_1-g_1,\ U_2-g_2,\ \ldots,\ U_p-g_p)=0,$$

où $g_1, g_2, \ldots, g_p$ sont les constantes et où θ est une fonction abélienne du premier ordre, de caractéristique nulle, dont le tableau des périodes est celui des intégrales $u_1, u_2, \ldots, u_p$.

Les transformations ordinaires de V_p échangent entre elles les variétés V_{p-1} de Σ.

Sur la variété V_p, il peut exister d'autres systèmes analogues à Σ_p, soit parce que la variété V_p peut posséder exceptionnellement des transformations birationnelles en elle-même distinctes

(1) PICARD, *Mémoire sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables* (*Journal de Liouville*, 1889) et *Traité sur cette théorie.* Rappelons aussi la note de M. Picard *Sur l'impossibilité de certains groupes de points sur une surface algébrique*, reproduite à la fin du Tome II de son Traité.

des transformations ordinaires, soit parce que V_p peut être la variété de Jacobi de plusieurs courbes.

Les variétés à $p-1$ dimensions représentant, sur V_p, les groupes de p points de C ayant un point fixe sont précisément les variétés spéciales V'_{p-1}. On peut considérer plus généralement les variétés $V'_{p-\rho}$, à $p-\rho$ dimensions, représentant les groupes de p points de C ayant ρ points fixes ($\rho \geqq 1$). Ces variétés $V'_{p-\rho}$ forment un système $\Sigma'_{p-\rho}$, ∞^ρ et une de ces variétés est l'intersection de ρ variétés V'_{p-1}. En appliquant aux variétés $V'_{p-\rho}$ les transformations ordinaires de V_p, on obtient un système plus ample, $\Sigma_{p-\rho}$, de variétés $V_{p-\rho}$, chacune de celles-ci étant l'intersection de ρ variétés V_{p-1}.

En particulier, pour $\rho = p-1$, on obtient des variétés Σ'_1, Σ_1 de courbes V'_1, V_1 birationnellement identiques à C. Notons que les courbes V'_1 rencontrent une variété V_{p-1} de Σ_p en p points, la variété W_{p-2} en $p-1$ points. Les variétés spéciales V'_{p-1} rencontrent donc une courbe V'_1 en un seul point variable.

4. *Séries non linéaires de groupes de points sur une courbe.* — Considérons, sur la courbe C, une variété irréductible, ∞^1, de groupes de n points. Ces groupes forment une série que l'on représente par γ_n. Les caractères de la série γ_n sont, outre l'*ordre* n, *l'indice* ν, nombre des groupes de γ_n contenant un point de la courbe, le *genre* π, genre de la variété γ_n où le groupe de n points est considéré comme élément générateur, et enfin le *défaut d'équivalence* z.

Si l'indice ν est supérieur à l'unité, la série γ_n est appelée série non linéaire. Si $\nu = 1$, la série γ_n est une série linéaire g_n si $\pi = 0$, mais si π n'est pas nul, c'est une involution de groupes de n points sur C.

Le défaut d'équivalence d'une série non linéaire (ou d'une involution) a été introduit par M. Castelnuovo [1] comme le nombre de groupes de la série appartenant à des groupes d'une série linéaire générique g^{n-1}_{n+p-1}, d'ordre $n+p-1$ et de dimension $p-1$, de la courbe C. Le nombre des points doubles de la

[1] Castelnuovo, *Sulle serie algebriche di gruppi di punti appartenenti ad una curva algebrica* (*Rend. R. Accad. Lincei*, 1er sem. 1906).

série γ_n est exprimé par $2\nu(n+p-1)-2z$ et si $z=0$, tous les groupes de γ_n appartiennent à une série linéaire d'ordre n, d'où le nom donné à z.

Signalons que M. Comessatti [1] a généralisé de la manière suivante le nombre z de M. Castelnuovo. Étant donnée la série γ_n, on désignera par Z_r le nombre de groupes d'une série linéaire générique $g^{(r+1)(n-1)}_{(r+1)(n-1)+p}$ contenant r groupes de γ_n. On a précisément $Z_0=z$. M. Comessatti a utilisé ces nombres pour établir notamment cet élégant théorème : *La condition nécessaire et suffisante pour que, parmi les sommes des p intégrales de première espèce de la courbe C le long des groupes de la série γ_n, il y en ait $r \leqq p$ indépendantes, est que $Z_0, Z_1, \ldots, Z_{r-1}$ ne soit pas nul et Z_r soit nul.* M. Castelnuovo [2] a récemment retrouvé les nombres de M. Comessatti dans une étude sur les variétés abéliennes contenant des variétés intermédiaires, signalant qu'ils fournissent les caractères les plus importants d'une série algébrique.

Reprenons la série non linéaire γ_n. On dit que cette série est composée au moyen d'une involution de groupes de m points de C lorsque chaque groupe de la série est formé de $\frac{n}{m}$ groupes de l'involution. Cela étant, supposons la série γ_n non composée au moyen d'une involution et soit Γ une courbe, de genre π, dont les points correspondent birationnellement aux groupes de γ_n. Entre les points des courbes C et Γ, nous avons une correspondance (n, ν); à un point de C correspondent ν points de Γ, et à un point de Γ, n points de C. Il existe par suite, sur Γ, une série non linéaire γ'_ν, d'ordre ν, d'indice n, de genre p, dont le défaut d'équivalence est égal à celui, z, de la série γ_n de C. En effet, si δ est le nombre de points doubles de γ_ν, on a, par la formule de Zeuthen,

$$2\nu(n+p-1)-d=2n(\nu+\pi-1)-\delta.$$

(1) Comessatti, *Sulle serie algebriche semplicemente infinite di gruppi di punti appartenenti ad una curva algebrica* (*Rend. Cir. Palermo*, 2e sem. 1913).

(2) Castelnuovo, *Sulle funzioni abeliane*. IV : *Applicazioni alle serie algebriche di gruppi sopra una curva* (*Rend. R. Acc. Lincei*, 1er sem. 1921). *Voir* aussi Rosati, *Sopra certi invarianti aritmetici delle serie algebriche semplicemente infinite appartenenti ad una curva algebrica* (*Rend. Circ. Palermo*, 1925).

5. *Séries non linéaires d'ordre p sur une courbe de genre p.* — Considérons en particulier, sur C, une série non linéaire γ_p, d'ordre p, d'indice p et de genre p, non composée au moyen d'une involution. Supposons de plus que la série γ_p ne contienne aucun groupe spécial et enfin qu'aucune intégrale de première espèce de C ne donne des sommes constantes le long des groupes de la série.

R. Torelli [1] démontre que le défaut d'équivalence z de la série γ_p est égal à p. Considérons une série linéaire quelconque g_{2p}^p d'ordre $2p$ et de dimension p sur C; soient G les groupes de γ_p, G' les groupes de p points qui, avec les groupes G, forment des groupes de la série g_{2p}^p. Les groupes G' engendrent une série γ'_p birationnellement identique à γ_p. L'indice de γ'_p est égal au nombre de groupes G' contenant un point fixe P de C, c'est-à-dire au nombre de groupes G de γ_p contenus dans la série linéaire g_{2p-1}^{p-1} formée par les groupes g_{2p}^p contenant le point P, c'est-à-dire enfin au défaut d'équivalence z de γ_p. Cela étant, soit G_1 un groupe de γ_p appartenant à un groupe d'une série linéaire g_{2p-1}^{p-1}; ce dernier groupe est complété par un groupe H_1 de $p-1$ points. Soit H'_1 le groupe de $p-1$ points qui, avec H_1, forme un groupe de la série canonique g_{2p-2}^{p-1}. Il est facile de voir que la série g'^{p-1}_{2p-1}, déterminée par le groupe $G'_1+H'_1$, où G'_1 est le groupe de γ'_p correspondant à G_1, contiendra tous les groupes de γ'_p correspondant aux groupes de γ_p contenus dans la série g_{2p-1}^{p-1} de départ, et n'en contiendra pas d'autre. Il en résulte que γ_p et γ'_p ont même défaut d'équivalence z. Par suite, comme γ_p et γ'_p jouent des rôles symétriques, le défaut d'équivalence z de γ'_p (et de γ_p) est égal à l'indice p de γ_p.

Observons en outre que la série γ_p ne peut avoir de points fixes. Supposons en effet que γ_p puisse posséder h points fixes. En supprimant ces points, on obtient une série γ_{p-h}, d'ordre $p-h$. Les groupes de la série canonique g_{2p-2}^{p-1} contenant un groupe de la série γ_{p-h} forment une série linéaire g_{p-2+h}^{h-1} et l'on a donc ainsi ∞^h groupes de $p-2+h$ points qui, avec des groupes de γ_{p-h}, forment des groupes canoniques. Il y aura quelques-uns de ces ∞^h

[1] R. Torelli, *Sulle curve di genere due contenenti una involuzione ellittica* (*Rend. R. Accad. Napoli*, 1911).

groupes contenant les h points fixes de γ_p et par suite, contrairement à l'hypothèse, quelques groupes spéciaux dans cette série.

Aux groupes de la série γ_p correspondent, sur la variété de Jacobi V_p, les points d'une courbe K, de genre p, ne rencontrant pas la variété W_{p-2}. La courbe K rencontre chacune des variétés V_{p-1} de Σ_p en $z = p$ points.

A la série γ'_p considérée plus haut correspond sur V_p une courbe K′ déduite de K par une transformation de seconde espèce.

6. *Un théorème de MM. Enriques et Severi.* — Supposons $p = 2$. La variété de Jacobi relative à la courbe C de genre 2 est la surface de Jacobi V_2. La variété W_{p-2} est un point W_0, image de tous les couples de points de la série canonique g_2^1 de C. Le système Σ_p devient un système de courbes V_1, de genre 2, d'indice 2 et de degré 2 et les variétés spéciales V'_1 sont les courbes du système passant par le point W_0. Les systèmes $\Sigma_{p-\rho}$ ($p = 2, \rho = 1$) coïncident, de même que les systèmes $\Sigma'_{p-\rho}$. Chacune des courbes V'_1 représente l'ensemble des couples de points de C ayant un point fixe et toutes les courbes de Σ_1 sont birationnellement identiques à C.

Considérons, sur C, une série non linéaire γ_2, d'ordre 2, genre 2, indice 2, privée de groupes canoniques et telle qu'aucune intégrale de première espèce de C ne donne des sommes constantes le long des groupes de la série. La série γ_2 a le défaut d'équivalence $z = 2$ et il lui correspond, sur la surface de Jacobi V_2, une courbe K de genre 2, ne passant pas par W_0 et rencontrant chacune des courbes V_1 en deux points. Or, MM. Enriques et Severi (1) ont démontré qu'une courbe C de V_2 possédant ces propriétés appartient nécessairement au système Σ_1 et est par suite birationnellement identique à la courbe C. La démonstration de ce fait est basée sur le théorème de Weber suivant lequel si, entre deux courbes de même genre supérieur à 1, on a une correspondance rationnelle, elle est nécessairement birationnelle.

Le théorème de MM. Enriques et Severi peut s'énoncer en disant que la série non linéaire γ_2 considérée sur C est birationnellement identique à C.

---

(1) Enriques-Severi, *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques* (*Acta mathematica*, t. XXXII, 1909; t. XXXIII, 1910).

7. *Le premier théorème de R. Torelli.* — R. Torelli [1] a cherché à étendre le théorème de MM. Enriques et Severi, qui vient d'être rappelé, aux courbes de genre quelconque. Il est précisément arrivé au résultat suivant : *S'il existe, sur une courbe algébrique irréductible de genre quelconque p* ($p > 0$), *une série* γ_p *d'ordre* p, *d'indice p et de genre* p, *non composée au moyen d'une involution, privée de groupes spéciaux et telle qu'aucune intégrale de première espèce de C ne donne des sommes constantes le long des groupes de la série, la série* γ_p *est birationnellement identique à* C.

La démonstration de R. Torelli, nécessairement toute différente de celle de MM. Enriques et Severi, est basée sur une analyse très fine des propriétés des groupes de points sur une courbe algébrique. Nous en indiquerons les traits essentiels.

Soit K la courbe de la variété de Jacobi V_p de C, image des groupes de la série γ_p. En appliquant à la courbe K toutes les transformations de première espèce de V_p, on obtient ∞^p courbes K_1, formant une famille $\{K_1\}$ telle que, par tout point de V_p, passent ∞^1 courbes de la famille. Les transformations de seconde espèce de V_p, appliquées à K, donnent de même une famille $\{K_2\}$, de dimension p, qui peut d'ailleurs éventuellement coïncider avec $\{K_1\}$. Il s'agit de prouver que, dans l'une de ces familles, se trouve une courbe V_1 birationnellement identique à C.

Entre une courbe K_1 (ou K_2) et la courbe C existe une correspondance (p, p), qui peut d'ailleurs avoir des points fixes. Il existe par suite, sur C, deux familles de séries γ_p, d'ordre p, birationnellement identiques aux courbes K_1 ou K_2, donc à la courbe K. Ces deux familles ∞^p forment, sur C, la classe des séries γ_p birationnellement équivalentes à la série γ_p donnée. L'existence, dans l'une des familles $\{K_1\}$, $\{K_2\}$, d'une courbe V_1 porte l'existence dans la classe des séries γ_p, d'une série ayant $p - 1$ points fixes, et réciproquement.

Parmi les courbes K_1 et K_2, il en existe qui s'appuient sur W_{p-2}; on les obtient en appliquant à la courbe K une trans-

[1] R. Torelli, *Sulle varietà di Jacobi* (*Rend. R. Accad. Lincei*, 2e sem. 1913). R. Torelli utilise continuellement les résultats de son Mémoire *Sulle serie algebriche semplicemente infinite di gruppi di punti appartenenti a una curva algebrica* (*Rend Circ. Palermo*, 1er sem. 1914).

formation ordinaire de V_p faisant correspondre à un point quelconque de K un point quelconque de W_{p-2}. Ces courbes K_1, K_2 sont dites spéciales, de même que les séries γ_p qui leur correspondent sur C; ces dernières contiennent des groupes spéciaux. Les courbes K_1 et K_2 spéciales ne peuvent pas toujours appartenir entièrement à la variété W_{p-2}; il en résulte que les courbes K_1 (ou K_2) spéciales sont en nombre ∞^{p-1} et forment une variété irréductible (représentant les couples de points de K et de W_{p-2}).

Torelli prouve que la variété des courbes K_1 (ou K_2) spéciales coïncide avec la variété de ces courbes donnant naissance, sur la courbe C, à des séries γ_p ayant des points fixes. Les courbes C et K jouent d'ailleurs ici un rôle parfaitement symétrique.

Si l'on considère une courbe K_1 (ou K_2) s'appuyant en K points sur W_{p-2}, il lui correspond, sur C, une série γ_p ayant h ($h > 0$) points fixes. On a donc une correspondance $(p - h, p - k)$ entre les courbes C et K, c'est-à-dire une série γ_{p-h} dépourvue de points fixes) sur C et une série γ_{p-k} sur K.

Cela étant, si les courbes C et K sont toutes deux hyperelliptiques, c'est-à-dire s'il existe sur chacune de ces courbes une série spéciale g_2^1, les nombres des couples de ces séries g_2^1 appartenant à une série γ_{p-h} sur C et à une série γ_{p-k} sur K doivent être positifs ou nuls. Ces nombres peuvent être calculés au moyen d'une formule de Schubert [1] et l'on obtient immédiatement deux inégalités entraînant $h = k = p - 1$. Ce qui démontre le théorème dans le cas particulier considéré.

Si l'une au moins des courbes C, K, par exemple K, n'est pas hyperelliptique, les courbes spéciales de l'une des familles $\{K_1\}$, $\{K_2\}$ rencontrent W_{p-2} en un seul point et chacune d'elles donne naissance à une correspondance $(p - h, p - 1)$ entre C et K ($h > 0$). L'application de la formule de Schubert montre que C ne peut être hyperelliptique. Une application ingénieuse des propriétés

---

(1) La formule de Schubert donne le nombre $n\nu \binom{m-1}{r} - \frac{1}{2} \binom{m-1}{r-1} d$ des groupes de $r + 1$ points communs à une série linéaire g_n^r et à une série non linéaire γ_m ayant d points doubles. *Voir* Severi, *Lezioni di Geometria Algebrica* (Padova, Draghi, 1908), *Vorlesungen über algebraische Geometrie* (Leipzig, Teubner, 1921), Enriques-Chisini, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche* (Bologne, Zanichelli. 1924).

des groupes de points sur C permet alors de déduire, de la correspondance $(p-h,\ p-1)$ entre C et K, une série γ_p spéciale de C, birationnellement identique à K, possédant $p-1$ points fixes, d'où le théorème énoncé dans le cas général.

8. *Le second théorème de Torelli.* — Soient C, C′ deux courbes de même genre p, $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_p(x)$ p intégrales normales de première espèce de C, $u'_1(x')$, $u'_2(x')$, ..., $u'_p(x')$ p intégrales normales de première espèce de C′. Supposons que ces intégrales aient le même tableau de périodes normales. On peut alors écrire p égalités, à des périodes près,

$$u_i(x_1)+u_i(x_2)+\ldots+u_i(x_p)=u'_i(x')+\pi_i \qquad (i=1,2,3,\ldots,p),$$

π_1, π_2, ..., π_p étant des constantes génériques. D'après Hürwitz [1], il en résulte qu'il existe, entre les courbes C et C′, une correspondance $(p,\ p)$ donnant, sur C, une série γ_p, d'ordre p, d'indice p, de genre p, dépourvue de groupes spéciaux et telle qu'aucune des intégrales $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_p(x)$ ne donne des sommes constantes le long des groupes de la série. L'application du premier théorème de Torelli montre que la série γ_p et par suite la courbe C′ sont birationnellement identiques à la courbe C.

Ainsi se trouve établi le beau théorème de R. Torelli énoncé au début de cet article.

9. *Démonstration de M. Comessatti.* — Les travaux de Hermite et de G. Humbert sur les fonctions abéliennes ont montré l'existence, sur la surface de Jacobi V_2, de certaines transformations birationnelles non ordinaires de cette surface en elle-même, provenant de transformations birationnelles en elles-mêmes de la courbe de genre 2 dont V_2 représente les couples de points. Ces transformations sont appelées *transformations de Hermite* de V_2.

M. Comessatti [2] s'est proposé d'étudier les transformations

---

(1) Hürwitz, *Ueber algebraische Correspondenzen und das verallgemeinerte Correspondenz-princip* (*Berichte K. Gesellschaft*, Leipzig, 1886; *Math. Annalen*, t. XXVIII).

(2) Comessatti, *Sulle trasformazioni Hermitiane delle varietà de Jacobi* (*Atti R. Accad. Torino*, 1914-1915). La propriété en question, dans le cas $p=2$, a été établie par MM. Enriques et Severi, *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques, loc. cit. Voir* aussi Rosenblatt, *Sur les transformations birationnelles des variétés de Jacobi en elles-mêmes* (*Bull. Acad. Cracovie*, 1918).

de Hermite d'une variété de Jacobi quelconque V_p, transformations caractérisées par le fait qu'elles laissent inaltéré le système Σ_p des variétés V_{p-1} de V_p. M. Comessatti a démontré que les transformations de Hermite proviennent, comme dans le cas $p=2$, de transformations birationnelles de la courbe C dont V_p est la variété de Jacobi. Chemin faisant, M. Comessatti donne une nouvelle démonstration du théorème de Torelli.

Soient C et C* deux courbes de genre $p>1$, V_p et V_p^* leurs variétés de Jacobi. Supposons qu'il existe, entre V_p et V_p^*, une correspondance birationnelle transformant le système Σ_p de V_p dans le système Σ_p de V_p^*. Et bien, dans ces conditions, les courbes C, C* sont birationnellement identiques. M. Comessatti démontre cette propriété en prouvant que l'on peut faire correspondre à toute série linéaire g_{2p-1}^{p-1} de C, formée d'un point fixe et de la série canonique g_{2p-2}^{p-1}, une série analogue de C* ; en d'autres termes, on peut faire se correspondre (en multipliant éventuellement la transformation donnée par une transformation ordinaire de V_p) les variétés spéciales de V_p et de V_p^*.

Cela étant, supposons que les intégrales normales $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_p(x)$ de C et $u'_1(x')$, $u'_2(x')$, ..., $u'_p(x')$ de C* aient même tableau de périodes normales. Posons

$$\begin{aligned} U_i(x) &= u_i(x_1)+u_i(x_2)+\ldots+u_i(x_p) \\ U'_i(x') &= u'_i(x'_1)+u'_i(x'_2)+\ldots+u'_i(x'_p) \end{aligned} \qquad (i=1,\,2,\,\ldots,\,p),$$

$x_1, x_2, \ldots, x_p$ et $x'_1, x'_2, \ldots, x'_p$ étant des groupes de p points de C et de C*.

Nous pouvons écrire, à des périodes près, les π étant des constantes,

$$U_i = U'_i + \pi_i \qquad (i=1,\,2,\,\ldots,\,p)$$

et ces formules établissent une correspondance birationnelle entre les séries linéaires g_p de C, C*, c'est-à-dire entre les points de V_p, V'_p.

A la variété V_{p-1} de V_p, représentée par l'équation

$$\theta(U_1-g_1,\,U_2-g_2,\,\ldots,\,U_p-g_p)=0,$$

correspond la variété V_{p-1} de V_p^* représentée par

$$\theta(U'_1-g_1+\pi_1,\,U'_2-g_2+\pi_2,\,\ldots,\,U'_p-g_p+\pi_p)=0,$$

et par suite les courbes C, C^* sont birationnellement identiques.

10. *Un théorème de M. Severi.* — Une courbe C détermine, à des transformations birationnelles près, sa variété de Jacobi V_p. M. Severi s'est posé la question inverse : une variété de Jacobi détermine-t-elle une courbe (à des transformations birationnelles près? Il a pu donner une réponse affirmative à cette question dans le cas des courbes à modules généraux ([1]). Il s'agit au fond de prouver que si deux courbes C, C^* ont des variétés de Jacobi birationnellement identiques, elles sont elles-mêmes birationnellement identiques. Cette propriété est vraie si les variétés de Jacobi admettent pour *base minima* les systèmes Σ_p de ces variétés. En d'autres termes, si tout système de variétés algébriques à $p-1$ dimensions, sur la variété de Jacobi V_p (ou V_p^*) de C (ou de C^*) contient des variétés du système Σ_p comptées un certain nombre de fois. Alors, une correspondance birationnelle entre V_p et V_p^* échange entre eux les systèmes Σ_p de ces variétés et les résultats de M. Comessatti sont applicables.

Rappelons ce que l'on appelle *valence* d'une correspondance algébrique entre les points d'une courbe algébrique C. Si, entre les points de cette courbe, on a une correspondance (α, β), si l'on désigne par G_β le groupe des β points qui correspondent à un point P de C, par G'_β le groupe correspondant à un point P', et s'il existe un entier γ tel que l'on ait, soit

$$\gamma P + G_\beta \equiv \gamma P' + G'_\beta \qquad (\gamma \geqq 0),$$

soit

$$(-\gamma) P' + G_\beta \equiv (-\gamma) P + G'_\beta \qquad (\gamma < 0),$$

ce nombre γ est la valence de la correspondance. Hürwitz ([2]) a prouvé que toute correspondance sur une courbe à modules généraux était douée d'une valence. Les correspondances singulières,

---

([1]) SEVERI. *Annexe au Mémoire de Comessatti sur les transformations de Hermite* (*loc. cit.*). M. Severi était en possession de ce théorème depuis 1913; il est cité par Torelli dans son Mémoire sur les variétés de Jacobi (*loc. cit.*).

([2]) HÜRWITZ (*loc. cit*). La propriété en question a été précisée par M. SEVERI, *Le corrispondenze fra i punti di una curva variabile in un sistema lineare sopra una superficie algebrica* (*Math. Annalen*, t, LXXIV, 1913).

Nous traduisons par *valence* le mot allemand *wertigkeit*, *valenza* des Italiens.

c'est-à-dire n'ayant pas de valence, ne peuvent exister que sur les courbes à modules particuliers.

Cela étant, la condition nécessaire et suffisante pour que, sur la variété de Jacobi V_p, la base minima soit constituée par le système Σ_p, est que la courbe C dont V_p est déduite soit privée de correspondances symétriques ($\alpha = \beta$) singulières. Par suite : *Étant donnée la variété de Jacobi d'une courbe algébrique ne possédant pas de correspondances symétriques singulières, la courbe est déterminée* (à des transformations birationnelles près).

On remarquera que dans ce théorème de M. Severi, il s'agit de courbes à modules généraux. Le théorème de R. Torelli concerne les courbes à modules quelconques.

11. *Représentation analytique des correspondances algébriques.* — Il convient de rappeler ici les résultats de Hürwitz, déjà plusieurs fois invoqués, sur les correspondances algébriques entre deux courbes algébriques. En réalité, Hürwitz considère le cas de deux courbes superposées, mais ses conclusions sont valables dans le cas de courbes distinctes (de même genre) [1].

Soient C, C′ deux courbes algébriques de genre p, $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_p(x)$, et $u'_1(x')$, $u'_2(x')$, ..., $u'_p(x')$ leurs intégrales normales de première espèce. Soit encore

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \omega_{11} & \omega_{12} & \dots & \omega_{1p} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \omega_{21} & \omega_{22} & \dots & \omega_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \omega_{p1} & \omega_{p2} & \dots & \omega_{pp} \end{matrix}$$
$$(\omega_{ik} = \omega_{ki})$$

le tableau des périodes normales des intégrales $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_p(x)$. Nous écrirons le tableau analogue pour C′ en remplaçant ω_{ik} par ω'_{ik}.

Supposons qu'il existe une correspondance T entre C et C′, faisant correspondre β points de C′ à un point de C, la correspon-

---

[1] Hürwitz (*loc. cit.*). Pour un exposé géométrique de la théorie des correspondances, *voir* Severi, *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e sopra certe classi di superficie* (*Mem. R. Accad. Torino*, 1903). Dans le cas actuel, où les courbes C, C′ ne sont pas superposées, *voir* R. Torelli, *Alcune questioni di geometria sopra una curva algebrica* (*Rend. R. Accad. Lincei*, 1er sem. 1915).

dance T^{-1} faisant correspondre α points de C à un point de C'. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_\alpha$ les points que T^{-1} fait correspondre à un point x' de C'. La somme des valeurs d'une intégrale $u_k(x)$ en ces α points peut être considérée comme une intégrale de première espèce de C', et l'on a donc

$$u_k(x_1) + u_k(x_2) + \ldots + u_k(x_\alpha) = \sum_{i=1}^{p} \pi_{ki} u'_i(x') + \pi_k$$
$$(k = 1, 2, \ldots, p),$$

les quantités π_k, π_{ki} étant des constantes. Par un choix convenable des chemins parcourus par le point x' sur la surface de Riemann correspondant à C', on en déduit

$$\left.\begin{aligned} \pi_{kl} &= h_{kl} + \sum_{i=1}^{p} g_{il}\omega_{ki} \\ \sum_{i=1}^{p} \pi_{ki}\omega'_{il} &= \mathrm{H}_{kl} + \sum_{i=1}^{p} \mathrm{G}_{il}\omega_{ki} \end{aligned}\right\} \quad (k, l = 1, 2, \ldots, p),$$

les nombres h, g, H, G étant des entiers (caractéristiques de la correspondance). Ces entiers caractéristiques satisfont aux p^2 relations

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} g_{ji}\omega_{kj}\omega'_{il} + \sum_{i=1}^{p} h_{ki}\omega'_{il} - \sum_{i=1}^{p} \mathrm{G}_{il}\omega_{ki} = \mathrm{H}_{kl}$$
$$(k, l = 1, 2, \ldots, p).$$

On obtient les mêmes relations pour la correspondance T, les entiers caractéristiques de celle-ci étant

$$h'_{kl} = \mathrm{G}_{lk}, \qquad g'_{kl} = -g_{lk}, \qquad \mathrm{H}'_{kl} = -\mathrm{H}_{lk}, \qquad \mathrm{G}'_{kl} = h_{lk}.$$

La correspondance (α, β) entre C et C' donne sur C une série γ_α et sur C', une série γ_β. Si l'on considère sur C (ou sur C') la correspondance entre les points de cette courbe dans laquelle sont homologues deux points qui correspondent par T^{-1} (ou par T) à un même point de C' (ou de C), les entiers caractéristiques de cette correspondance s'expriment en fonction de h, g, H, G. R. Torelli montre que le défaut d'équivalence commun aux séries γ_α, γ_β est

$$z = \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{p}(h_{ik}\mathrm{G}_{ik} - \mathrm{H}_{ik}g_{ik}).$$

Si inversement on se donne les relations (1) entre les périodes ω_{ik}, ω'_{ik}, il existe entre C', C une infinité de correspondances ayant les entiers caractéristiques h, g, H, G. Parmi ces correspondances, il y en a d'ailleurs une infinité faisant correspondre aux points de C' des groupes de p points de C, c'est-à--dire donnant des séries γ_p sur C.

Observons encore, avec Torelli, que si le déterminant $|\pi_{kl}|$ n'est pas nul, dans une des correspondances rencontrées, il ne peut exister une infinité de couples de points de C' auxquels correspondent des groupes équivalents ou coïncidents sur C (deux groupes de points d'une courbe sont dits équivalents s'ils appartiennent à une même série linéaire).

12. *Dernières recherches de R. Torelli.* — En comparant les développements précédents et le premier de ses théorèmes cités (n° 7), R. Torelli [1] démontre le théorème suivant : *Si les systèmes de périodes normales* ω_{ik}, ω'_{ik}, *des deux courbes* C', C *vérifient les* p^2 *relations* (1), *les entiers* h, g, H, G *donnant lieu à l'égalité*

$$\sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{p} (h_{ik} G_{ik} - H_{ik} g_{ik}) = p,$$

le déterminant $|\pi_{kl}|$ *n'étant pas nul, ces deux courbes sont birationnellement identiques.*

Il suffit pour cela de montrer qu'une des séries γ_p, définies sur C par les considérations précédentes, satisfait aux conditions imposées dans le premier théorème (n° 7).

Le fait que les courbes C, C' sont birationnellement identiques implique alors que les entiers h, g, H, G satisfont aux relations

$$\sum_{k=1}^{p} (h_{ik} G_{ik} - H_{ik} g_{ik}) = 1,$$

$$\sum_{k=1}^{p} (h_{ik} G_{lk} - H_{ik} g_{li}) = \sum_{k=1}^{p} (g_{ik} G_{lk} - G_{ik} g_{lk}) = \sum_{k=1}^{p} (H_{ik} h_{lk} - h_{ik} H_{lk}) = 0$$
$$(i \neq l).$$

---

(1) R. Torelli, *Alcune questioni di geometria sopra una curva algebrica* (*loc. cit.*).

Une analyse de l'expression analytique de la correspondance birationnelle entre les variétés de Jacobi V_p, V'_p de C, C' conduit alors R. Torelli au théorème suivant : *La condition nécessaire et suffisante pour que les courbes C, C' aient la même variété de Jacobi, est que les périodes normales ω_{ik}, ω'_{ik} satisfassent à la relation* (1), *le déterminant* $|\pi_{kl}|$ *n'étant pas nul et le déterminant*

$$\begin{vmatrix} h_{11} & \dots & h_{1p} & H_{11} & \dots & H_{1p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{p1} & \dots & h_{pp} & H_{p1} & \dots & H_{pp} \\ g_{11} & \dots & g_{1p} & G_{11} & \dots & G_{p1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{p1} & \dots & g_{pp} & G_{p1} & \dots & G_{pp} \end{vmatrix}$$

ayant pour valeur ± 1.

En particulier, si la courbe C ne possède pas de correspondances symétriques singulières, les courbes C, C' sont birationnellement identiques. R. Torelli retrouve ainsi le théorème de M. Severi.

Signalons enfin ces deux derniers théorèmes de Torelli :

S'il existe, entre les variétés de Jacobi V_p, V'_p *des deux courbes* C, C', *une correspondance birationnelle faisant correspondre au système* $\Sigma_{p-\rho}$ *de* V_p *le système* $\Sigma_{p-\rho}$ *de* V'_p, *les courbes* C, C' *sont birationnellement identiques.*

S'il existe, entre les variétés des q-uples de points $(q < p)$ *des courbes* C, C' *une correspondance birationnelle, les deux courbes sont birationnellement identiques.*

Pour $\rho = 1$, le premier de ces théorèmes coïncide avec un résultat de M. Comessatti signalé plus haut.

13. *Recherches de M. Rosati.* — Dans les travaux de R. Torelli, il est question de périodes normales des intégrales abéliennes, c'est-à-dire de périodes relatives aux systèmes de rétrosections des surfaces de Riemann. M. Rosati (1) s'est demandé si l'on pouvait

(1) Rosati, *Intorno alle corrispondenze simmetriche singolari sopra una curva di genere due* (*Rend. Circ, Palermo*, 1920). M. Rosati est l'auteur de

affirmer l'identité birationnelle de deux courbes C, C′ de genre p, ayant mêmes périodes relatives à deux systèmes primitifs quelconques de cycles des surfaces de Riemann correspondantes (cycles s'exprimant au moyen de $2p$ homologies en fonction d'un système de rétrosections, le déterminant des coefficients des homologies étant $+1$). Un exemple emprunté au cas $p=2$ montre qu'une restriction est nécessaire pour que la réponse soit affirmative.

L'hypothèse faite sur les courbes C, C′ porte à l'existence, sur la courbe C, d'une série γ_p ayant C′ pour image. M. Rosati montre que si la correspondance entre les points de C déterminée par cette série γ_p a une valence, les courbes C, C′ sont birationnellement identiques. Donc : *Si deux courbes de genre p ont mêmes périodes relatives à deux systèmes de cycles primitifs, et si l'une d'elles est privée de correspondances symétriques singulières, ces courbes sont birationnellement identiques.*

14. *Remarque.* — Pour que deux courbes de même genre soient birationnellement identiques, il faut et il suffit que leurs modules soient égaux, c'est-à-dire que $3(p-1)$ conditions soient remplies. Si l'on exprime que les périodes normales sont égales, on a $\frac{1}{2}p(p+1)$ conditions, il y a donc $\frac{1}{2}(p-2)(p-3)$ conditions superflues. On sait d'autre part qu'entre les périodes normales d'une courbe de genre p, il existe précisément $\frac{1}{2}(p-2)(p-3)$ relations (Riemann), mais sauf pour $p=4$ (¹), on ne connaît pas ces relations. Dans ses dernières recherches (nº 12), R. Torelli démontre l'identité birationnelle de deux courbes lorsque leurs périodes normales satisfont à p^2 relations, mais dans celles-ci figurent $4p^2$ entiers h, g, H, G, liés à leur tour par certaines égalités et une inégalité. Une étude arithmétique de ces relations conduirait sans doute aux relations de Riemann entre les

---

recherches très intéressantes sur les correspondances algébriques entre courbes, parues dans les *Rend. R. Accad. Lincei*, 2ᵉ sem. 1913, les *Atti della R. Accad. di Torino*, 1914-1915, 1915-1916, 1917-1918, les *Annali di Matematica*, 1915, 1918, 1921 et 1925.

(¹) *Voir* Schottky, *Zur Theorie der Abelschen Funktionen von vier Variabeln* (*Journal de Crelle*, 1888).

périodes et à un énoncé définitif du théorème de Torelli. C'est ce que Torelli pensait et il en écrivait encore la veille de sa mort à son ami M. Rosati.

Quoi qu'il en soit, R. Torelli a certainement fait faire à la question de l'identité birationnelle de deux courbes algébriques, un pas décisif.

(Extrait du *Bulletin des Sciences mathematiques*,
2e série, t. L ; août-septembre 1926.)