ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

Extrait des *Bulletins de la Classe des sciences*. Séance du 1er juillet 1922, nos 6-7, pp. 443-456.

GÉOMÉTRIE. — **Sur les surfaces du quatrième ordre possédant six points doubles biplanaires ordinaires** (*),

par LUCIEN GODEAUX, professeur à l'École militaire.

Nous avons, dans des recherches antérieures (**), déterminé les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface de genres 1 soit l'image d'une involution appartenant à une surface de genres 1. Pour compléter ces recherches, il est nécessaire de prouver également l'existence de ces surfaces, par exemple en construisant des modèles particuliers. Dans le cas où l'involution est d'ordre 2, la chose est simple. Si en effet une surface du quatrième ordre représente une involution d'ordre 2, appartenant à une surface de genres 1, elle est l'enveloppe des quadriques d'un système d'indice 2 formé dans un réseau de quadriques (***). Les huit points-base de ce réseau sont les points doubles de la surface du quatrième ordre. Il importe de remarquer qu'il existe des surfaces du quatrième ordre, contenant huit points doubles coniques, qui ne rentrent pas dans le type indiqué ci-dessus. Il ne suffit donc pas qu'une surface du quatrième ordre possède huit points doubles coniques pour qu'elle soit l'image d'une involution d'ordre 2, appartenant à une surface de genres 1.

(*) Présenté par M. Stuyvaert.

(**) *Sur les involutions de genres 1 existant sur une surface de genres 1.* (BULL. DE L'ACAD. ROY. DES SCIENCES DE BELGIQUE, 1913, pp. 310-328.) — *Mémoire sur les involutions appartenant à une surface de genres 1.* (ANNALES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, 1914, pp. 357-430; 1919, pp. 51-70.) [Voir 2e partie, nos 55 et 56.]

(***) *Mémoire sur les surfaces algébriques doubles ayant un nombre fini de points de diramation.* (ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE, 1914; pp. 289-312.) [Voir no 11.]

Dans ce travail, nous nous proposons de construire une surface du quatrième ordre, image d'une involution d'ordre 3, appartenant à une surface de genres 1. Nous y arrivons en utilisant la transformation simplement rationnelle de l'espace obtenue en rapportant projectivement les quadriques passant par six points, aux plans de l'espace. Cette transformation avait été considérée antérieurement par M. V. Snyder.

Nous commençons par démontrer que, étant donnés six points de l'espace, il existe ∞^4 surfaces du quatrième ordre ayant un point double biplanaire ordinaire en chacun de ces points et représentant chacune une involution d'ordre 3 appartenant à une surface de genres 1.

Nous établissons ensuite qu'il n'y a que ∞^4 surfaces du quatrième ordre possédant des points doubles biplanaires en six points assignés; par suite,

Toute surface du quatrième ordre, assujettie à la seule condition de posséder des points doubles biplanaires ordinaires en six points donnés, est l'image d'une involution d'ordre 3 appartenant à une surface de genres 1.

Si l'on rapproche ce théorème de celui que nous avions établi antérieurement (*loc. cit.*),

Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface normale de genres 1 soit l'image d'une involution d'ordre 3 appartenant à une surface de genres 1 sont que

1° Elle possède six points doubles biplanaires ordinaires;

2° Parmi les hypersurfaces cubiques passant par ces six points, il y en ait qui osculent la surface en tout point d'intersection.

On voit que nous avons réduit, dans le cas particulier des surfaces du quatrième ordre, les conditions nécessaires et suffisantes de deux à une. C'est ce qui n'a pas lieu dans le cas des involutions d'ordre 2, comme nous l'avons fait remarquer plus haut.

1. — Soit F une surface du quatrième ordre possédant six points doubles biplanaires ordinaires P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6. Désignons par $|C|$ le système des sections planes de F (système de degré 4 et de genre 3). Au point de vue de la géométrie sur une surface algébrique, un point double biplanaire équivaut à deux courbes rationnelles de degré — 2 et d'ordre 0, ayant un point commun. Désignons par C_{i1}, C_{i2} les deux courbes rationnelles auxquelles équivaut le point P_i $(i = 1, 2, \ldots, 6)$. Deux courbes telles que C_{i1}, C_{k1}, ayant les premiers indices différents, ne se rencontrent pas.

Supposons que la surface F ne possède pas d'autre singularité que celles mentionnées ci-dessus ; dans ces conditions, la surface F est de genres 1 $(p_a = P_4 = 1)$.

Nous avons démontré antérieurement (*) que la condition nécessaire et suffisante pour que F soit l'image d'une involution d'ordre 3 appartenant à une surface de genres 1 est l'existence d'un faisceau de biquadratiques gauches $|C_1|$ tel que l'on ait l'identité fonctionnelle

$$3C_1 + 2(C_{11} + C_{21} + \cdots + C_{61}) + (C_{12} + C_{22} + \cdots + C_{62}) \equiv 3C.$$

Dans ces conditions, il existe un second faisceau de biquadratiques gauches $|C_2|$ tel que (**)

$$3C_2 + (C_{11} + C_{21} + \cdots + C_{61}) + 2(C_{12} + C_{22} + \cdots + C_{62}) \equiv 3C.$$

Les courbes C_1 rencontrent donc en un point chacune des courbes $C_{11}, \ldots, C_{61}$, mais ne rencontrent pas les courbes $C_{12}, \ldots, C_{62}$. Les courbes C_2 ne rencontrent pas les courbes $C_{11}, \ldots, C_{61}$, mais rencontrent en un point chacune des courbes $C_{12}, \ldots, C_{62}$.

(*) *Mémoire sur les involutions appartenant à une surface de genres 1.* (ANNALES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, 1919, (3), XXXVI, pp. 51-70.)

(**) *Idem*, 1914.

Une courbe C_1 et une courbe C_2 se rencontrent en deux points simples de la surface F. Chacune de ces courbes appartenant à un faisceau, on a F_1 ∞^2 couples de points formant une involution I_2, d'ordre 2.

2. — Envisageons, d'une part, le système, de degré 4, genre 3, dimension 3 :

$$|C_0| = |C_1 + C_2|,$$

et, d'autre part, le système $|C'_0|$ découpé, les ∞^3 quadriques passant par les six points $P_1, P_2, \ldots, P_6$. On a donc

$$|C'_0| = |2C - (C_{11} + C_{21} + \cdots + C_{61}) - (C_{12} + C_{22} + \cdots + C\ )|.$$

Mais on a également

$$|3C_0| = |3(C_1 + C_2)| = |6C - 3(C_{11} + C_{21} + \cdots + C_{61}) - 3(C_{12} + C_{22} + \cdots + C_{62})|,$$

et, par suite,

$$|3C_0| = |3C'_0|.$$

La division sur les surfaces de genres 1 étant univoque (*), les systèmes $|C_0|$, $|C'_0|$ coïncident et les courbes $|C_1 + C_2|$ sont découpées sur F_1 par les quadriques passant par $P_1, \ldots, P_6$.

Il en résulte en particulier que toute courbe C_1 est située sur une quadrique passant par une courbe C_2, et inversement.

Soient Q_1, Q_2 deux points simples de F_1 ne faisant pas partie d'un groupe de I_2; C'_1, C''_2 les courbes de $|C_1|$ passant respectivement par Q_1, Q_2; C'_2, C''_2 les courbes de $|C_2|$ passant respectivement par les mêmes points. Par Q_1, Q_2 passent ∞^1 courbes de $|C_0|$ formant un faisceau. Parmi ces courbes se trouvent $C'_1 + C''_2$, $C''_1 + C'_2$; donc ces ∞^1 courbes C_0 passent encore par les points

(*) F. Severi, *La base minima pour la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique.* (Annales de l'École normale supérieure, 1908, (3), XXV, p. 21.)

communs à C_1', C_2' et à C_1'', C_2''. En d'autres termes, les quatre points communs à deux courbes C_0 forment deux groupes de I_2, ou encore, $|C_0|$ est composé au moyen de l'involution I_2.

3. — Désignons par Σ l'espace contenant F et rapportons projectivement les courbes de $|C_0|$ aux plans d'un second espace linéaire à trois dimensions Σ^*. Aux groupes de points de I_2 correspondent les points d'une quadrique F^* en correspondance (1, 2) avec F. Aux courbes C_0 correspondent les sections planes C_0^* de cette quadrique et aux courbes C_1, C_2 respectivement les génératrices rectilignes C_1^*, C_2^*.

On peut considérer la surface F comme transformée birationnellement en une *quadrique double* F^* douée d'une courbe de diramation du huitième ordre (car si entre la courbe rationnelle C_0^* et la courbe de genre 3, C_0, il y a une correspondance d'indices 1, 2, il y a huit points de diramation sur C_0^*).

Recherchons ce qui correspond, sur F^*, aux courbes rationnelles C_{i1}, C_{i2}. Soit Q_1 un point de C_{11}, par exemple. Par Q_1 passe une courbe C_1. La courbe C_2 passant par Q_1 contient nécessairement C_{11}, car cette courbe est fondamentale pour $|C_2|$. Le point Q_2, qui, avec Q_1, forme un groupe de I_2, se trouve donc sur la courbe C_1 dont il vient d'être question, et sur la courbe $C_2 - C_{11}$, qui est unique et bien déterminée. Lorsque Q_1 décrit C_{11}, la courbe C_1 passant par Q_1 varie et décrit le faisceau $|C_1|$; le point Q_2 décrit la courbe $C_2 - C_{11}$. Cette courbe apparaît donc comme conjuguée de C_{11} dans l'involution I_2. A l'ensemble les courbes C_{11}, $C_2 - C_{11}$ correspond, sur F^*, une génératrice du même mode que C_2^*. Remarquons que les courbes C_{11}, $C_2 - C_{11}$ ayant deux points communs, la génératrice de F^* qui lui correspond doit être bitangente à la courbe de diramation.

Désignons respectivement par Γ_{11}, Γ_{22}, ..., Γ_{61} les génératrices (du même mode que C_2^*) de F^* correspondant aux couples de courbes C_{11} et $C_2 - C_{11}$, C_{22} et $C_2 - C_{21}$, ..., C_{61}, et

$C_2 - C_{61}$; par $\Gamma_{12}, \Gamma_{22}, \ldots, \Gamma_{62}$ les génératrices (du même mode que C_1^*) qui correspondent respectivement aux couples de courbes C_{12} et $C_1 - C_{12}$, C_{22} et $C_1 - C_{22}, \ldots$, C_{62} et $C_1 - C_{62}$.

Enfin, soit D^* la courbe de diramation, du huitième ordre, de F^*. Nous voyons que, si elle existe, *la surface* F *est birationnelle équivalente à une quadrique double* F^*, *possédant une courbe de diramation d'ordre 8,* D^*, *bitangente à six couples de génératrices rectilignes.*

On peut imaginer aisément une quadrique double telle que F^* ; il suffit de supposer que la courbe D^* est découpée sur F^* par une surface de Kummer dont six plans tangents suivant une conique et passant par un même point de l'espace sont précisément les plans des génératrices Γ_{11} et Γ_{12}, Γ_{21} et $\Gamma_{22}, \ldots, \Gamma_{61}$ et Γ_{62}. Nous allons montrer que l'on peut, de la quadrique F^*, remonter à la surface F, et prouver ainsi l'existence de cette dernière surface.

4. — La correspondance (1, 2) entre la quadrique F^* et la surface F peut être étendue aux espaces Σ^*, Σ. Considérons, en effet, les ∞^3 quadriques Φ passant par les six points P_1, $P_2, \ldots, P_6$. Trois de ces quadriques, n'appartenant pas à un même faisceau, ont encore en commun deux points Q_1, Q_2. Si nous rapportons projectivement les quadriques Φ aux plans de Σ^*, nous avons une correspondance (1, 2) entre Σ^*, Σ. Cette correspondance a été étudiée par M. V. Snyder (*) ; nous utiliserons certains résultats de ce géomètre.

Aux quadriques Φ d'un réseau correspondent les plans d'une

(*) *An application of a* (1, 2) *quaternary correspondence to the Weddle and Kummer surfaces.* (Trans. of the Amer. Math. Society, 1911, vol. XII, p. 354.) La transformation involutive faisant correspondre le point Q_2 au point Q_1 a été étudiée par Geiser (*Journal de Crelle,* 1867, t. LXVII, p. 78); Ebenhart (Dissertation, Breslau, 1885) et Sturm (*Geometrische Verwandschaften,* t. IV. Teubner, 1909, p. 414).

gerbe. En particulier, aux quadriques circonscrites à la cubique gauche γ_3 déterminée par les points $P_1, P_2, \ldots, P_6$ correspondent les plans passant par un point P^*, principal pour la correspondance. Ce point P^* correspond, en effet, à tout couple de points de γ_3.

Deux points Q_1, Q_2 communs à ∞^2 quadriques Φ, formant un réseau, sont situés sur une bisécante de γ_3. En effet, dans ces ∞^2 quadriques, il y en a nécessairement ∞^1 circonscrites à γ_3. Aux bisécantes de γ_3 correspondent les droites passant par P^*.

Désignons par $\pi_1^*, \pi_2^*, \ldots, \pi_6^*$ les plans, passant par P^*, qui correspondent respectivement aux cônes projetant γ_3 des points $P_1, P_2, \ldots, P_6$. Ces six plans sont tangents à un cône du second ordre de sommet P^*. En effet, si l'on considère un point Q^* de Σ^* et ses correspondants, Q_1, Q_2 dans Σ, la droite $Q_1 Q_2$ est une bisécante de γ_3 et appartient donc à deux cônes circonscrits à cette courbe. Par suite, le lieu des plans de Σ^*, correspondant aux cônes circonscrits à γ_3, est un cône de classe 2, de sommet P^*, nécessairement tangent aux plans $\pi_1^*, \pi_2^*, \ldots, \pi_6^*$.

Considérons un point de la droite $P_i P_k$. Par ce point passent ∞^1 quadriques Φ contenant toutes cette droite. Il correspond donc à cette droite, dans Σ^*, un point fondamental P_{ik}^*.

Dans le Mémoire cité plus haut, M. Snyder a démontré que le lieu des points de Σ^* auxquels correspondent dans Σ deux points coïncidents est une surface de Kummer possédant les seize points doubles $P^*, P_{12}^*, P_{13}^*, \ldots, P_{56}^*$. Nous désignerons cette surface par Ψ^*. Les plans $\pi_1^*, \ldots, \pi_6^*$ sont tangents à Ψ^* le long de coniques que nous désignerons respectivement par $E_1^*, \ldots, E_6^*$. Le lieu des points de Σ qui correspondent aux points de Ψ^* est une surface de Weddle Ψ, lieu des sommets des cônes au second ordre passant par les six points $P_1, P_2, \ldots, P_6$.

Rappelons encore que

1° Le lieu des points de Σ^* auxquels correspondent des couples de points de Σ, dont l'un se trouve dans un plan quelconque, est une surface de Steiner (d'ordre 4) ayant P^* comme point triple et comme droites doubles, les droites passant par P^* qui correspondent aux trois bisécantes de γ_3 situées dans le plan considéré;

2° Le lieu des points de Σ^* auxquels correspondent des couples de points de Σ, dont l'un se trouve sur une droite quelconque, est une conique.

5. — Considérons une droite d passant par P_1. Il y a ∞^2 quadriques Φ touchant d en P_1. Parmi ces ∞^2 quadriques se trouve nécessairement le cône projetant γ_3 de P_1. Par suite, au point infiniment voisin de P_1 sur d correspond un point du plan π_1^*, ou encore, aux points du domaine du premier ordre de P_1 correspondent les points du plan π_1^*.

Par la droite d passent ∞^1 quadriques Φ, formant faisceau, et une de ces quadriques contient γ_3. Par suite, à la droite d correspond, dans Σ^*, une conique dégénérée en deux droites : l'une, d^*, ne passant pas par P^* et rencontrant π_1^* au point correspondant au point de d infiniment voisin de P_1; l'autre joignant ce point et P^* (et située, par suite, dans π_1^*).

Considérons un plan passant par P_1. A ce plan correspond une surface de Steiner de Σ^* ayant un point triple en P^* et deux droites doubles dans π_1^* (et une troisième droite double en dehors de π_1^*). Cette surface de Steiner dégénère en le plan π_1^* (correspondant à P_1) et une surface cubique ayant une droite double passant par P^*, mais située en dehors de π_1^*. Cette surface cubique, réglée, rencontre π_1^* suivant deux droites passant par P^* (correspondant aux deux génératrices, situées dans le plan considéré, du cône projetant γ_3 de P_1) et suivant une troisième droite ne passant pas par P^*. Cette droite est le lieu des points de Σ^* correspondant aux points du domaine du premier ordre de P_1, situés dans le plan considéré.

La surface de Weddle Ψ possède un point double en P_1, le cône tangent étant le cône projetant γ_3 de P_1. Par suite, aux points du domaine du premier ordre de P_1, situés sur ce cône, correspondent les points de la conique E_1^* de π_1^*, suivant laquelle la surface de Kummer touche ce plan.

On arrive à des conclusions analogues pour les domaines du premier ordre des points P_2, P_3, ..., P_6.

6. — Considérons une quadrique F^* de Σ^*, tangente aux six plans π_1^*, ..., π_6^*. Une telle quadrique existe certainement, puisque ces six plans sont tangents à un cône du second ordre. A cette quadrique F^* correspond dans Σ une surface du quatrième ordre F possédant des points doubles biplanaires en P_1, P_2, ..., P_6. En effet, F^* rencontre π_1^*, par exemple, suivant deux droites; par conséquent, F touche deux plans en P_1.

Aux génératrices de chaque mode de F^* correspondent sur F des biquadratiques gauches passant par les six points P_1, P_2, ..., P_6, en y touchant chacune un des plans tangents à F. La surface F obtenue répond donc aux conditions imposées à une surface du quatrième ordre pour qu'elle soit l'image d'une involution d'ordre 3 appartenant à une surface de genres 1.

Remarquons qu'il y a ∞^4 quadriques possédant un cône tangent assigné; par suite,

Étant donnés six points arbitraires, il existe ∞^4 surfaces du quatrième ordre possédant des points doubles biplanaires ordinaires en ces six points et représentant chacune une involution d'ordre 3 appartenant à une surface de genres 1.

On voit d'ailleurs que, si la surface F^* est considérée comme surface double, la courbe de diramation est découpée sur F^* par la surface de Kummer Ψ^*, dans les conditions indiquées plus haut.

7. — Les surfaces du quatrième ordre sont ∞^{34}. Posséder un point double conique en un point déterminé, pour une surface, équivaut à quatre conditions. Par conséquent, il y a au moins ∞^{10} surfaces du quatrième ordre ayant un point double conique en chacun des points $P_1, P_2, \ldots, P_6$. Nous allons démontrer qu'il y en a exactement ∞^{10}, c'est-à-dire que ces surfaces satisfont à $6 \times 4 = 24$ conditions indépendantes.

Observons qu'à une quadrique quelconque de Σ^* correspond dans Σ une surface du quatrième ordre ayant en $P_1, P_2, \ldots, P_6$ des points doubles. Si donc nous désignons par Π_2 l'involution déterminée dans Σ par les couples de points qui, avec P_1, $P_2, \ldots, P_6$, forment l'intersection de trois quadriques Φ linéairement indépendantes, nous voyons qu'il y a ∞^9 surfaces du quatrième ordre, ayant six points doubles $P_1, P_2, \ldots, P_6$, formées de couples de points Π_2. Il est donc possible de trouver une surface du quatrième ordre présentant les mêmes singularités, mais non composées de ∞^2 couples de Π_2, puisque ces surfaces sont au moins en nombre ∞^{10}.

Soit F_1 une pareille surface. Le lieu des points qui, avec ceux de F_1, forment des couples de Π_2 est une surface F'_1 que nous allons démontrer être du quatrième ordre. Soit r^* une droite quelconque de Σ^*; il lui correspond, dans Σ, une biquadratique passant par $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_6$ et rencontrant donc F_1 en $4 \times 4 - 6 \times 2 = 4$ points en dehors des points doubles. Par suite, à F_1 correspond, dans Σ^*, une surface F_1^* d'ordre 4. A F_1^* correspond dans Σ une surface du huitième ordre nécessairement décomposée en F_1 et F'_1. F'_1 est donc bien du quatrième ordre.

La surface F'_1 possède, en P_1, la même singularité que F_1, c'est-à-dire un point double conique. Aux cônes tangents à F_1, F'_1 en P_1 correspondent dans π_1^* deux coniques appartenant à F_1^*. On voit que ces deux coniques font nécessairement partie d'un faisceau contenant la conique E_1^*. On arrive aux mêmes conclusions pour les autres points doubles et, par suite, F_1^* rencontre les plans $\pi_1^*, \ldots, \pi_6^*$ en des couples de coniques dont les points d'intersection sont sur la surface de Kümmer Ψ^*.

Les surfaces F_1, F'_1 déterminent un faisceau qui contient la surface de Weddle Ψ, car la courbe commune à F_1 et à Ψ appartient nécessairement à F'_1. L'involution Π_2 détermine, dans ce faisceau, une involution d'ordre 2; un couple de cette involution est, par exemple, formé par F_1, F'_1. Il y a deux éléments unis pour cette involution, c'est-à-dire deux surfaces du faisceau formées de ∞^2 couples de Π_2. L'une est la surface de Weddle Ψ, l'autre est une surface F_2 à laquelle correspond, dans Σ^*, une quadrique F^*_2. Les surfaces F^*_1, Ψ^* et la quadrique F^*_2, comptée deux fois, appartiennent, par suite, à un même faisceau. De plus, F^*_1 et Ψ^* se touchent le long de leur courbe $[F^*_1, \Psi^*]$ d'intersection. Celle-ci est la courbe découpée sur Ψ^* par la quadrique F^*_2.

Inversement, à une surface du quatrième ordre tangente à Ψ^* le long d'une courbe appartenant à une quadrique correspond dans Σ une surface du huitième ordre décomposée en deux surfaces du quatrième ordre. En effet, puisque la surface du quatrième ordre envisagée dans Σ^* touche la surface de diramation Ψ^*, elle se transforme dans Σ en une surface du huitième ordre dégénérée. L'intersection complète de ces deux surfaces doit se trouver sur Ψ; d'où la propriété énoncée. On voit immédiatement que les deux surfaces du quatrième ordre obtenues dans Σ ont chacune un point double aux points $P_1, P_2, \ldots, P_6$. En effet, une surface du quatrième ordre touchant Ψ^* le long d'une courbe appartenant à une quadrique rencontre le plan Π^*_1, par exemple, en une courbe du quatrième ordre possédant quatre points doubles à l'intersection de E^*_1 et de la quadrique envisagée. Cette courbe du quatrième ordre dégénère donc en deux coniques se rencontrant sur E^*_1; d'où la propriété énoncée.

On sait que le long d'une courbe découpée sur une surface de Kümmer par une quadrique il y a ∞^1 surfaces du quatrième ordre tangentes à cette surface de Kümmer. C'est un cas particulier d'un résultat classique de Humbert. Par suite, il y a dans Σ^* ∞^{10} surfaces du quatrième ordre qui se transforment, dans Σ, en des couples de surfaces du quatrième ordre ayant des points doubles (en général) coniques en $P_1, P_2, \ldots, P_6$. Par conséquent,

Les surfaces du quatrième ordre possédant six points doubles coniques assignés sont en nombre ∞^{10}.

8. — Soit, s'il en existe une, F_3 une surface du quatrième ordre possédant en P_1, $P_2, \ldots, P_6$ des points doubles biplanaires ordinaires, et qui ne soit pas formée par ∞^2 couples de Π_2. D'après ce qui vient d'être dit, il correspond à F_3, dans Σ^*, une surface du quatrième ordre F_3^* touchant Ψ^* le long d'une courbe située sur une quadrique. A F_3^* correspondent, dans Σ, deux surfaces du quatrième ordre F_3, F_3' appartenant, avec Ψ, à un même faisceau.

Observons qu'en P_1, par exemple, F_3' a nécessairement, comme F_3, un point double biplanaire. Soient ω_1, ω_2 les plans tangents à F_3 en P_1 ; ω_1', ω_2' les plans tangents à F_3' au même point. Supposons, pour fixer les idées, que les points de ω_1 et ω_1', infiniment voisins de P_1, forment des couples de Π_2. Le plan ω_1 contient deux bisécantes de la cubique gauche γ_3. Ces bisécantes sont des lieux de ∞^1 couples de Π_2; par suite, ω_1' contient les mêmes bisécantes et coïncide donc avec ω_1. De même ω_2' et ω_2 coïncident. Il en résulte que la surface F_3^* doit toucher le plan Π_1^* suivant deux droites. Le point commun à ces deux droites est d'ailleurs distinct de P^*, car aux droites de Π_1^* passant par ce point correspondent les droites du cône projetant γ_3 de P_1.

Désignons par r_{i1}^*, r_{i2}^* les droites suivant lesquelles F_3^* touche le plan π_i^* $(i = 1, 2, \ldots, 6)$. Le point commun à r_{11}^* et à π_2^* se trouve nécessairement sur l'une des droites r_{21}^*, r_{22}^*, par exemple sur r_{21}^*. Alors, les droites r_{12}^*, r_{22}^* se rencontrent en un point commun à π_1^*, π_2^* et la droite $P^*\,P_{12}^*$, commune à ces deux plans, ne pouvant rencontrer F_3^* en dehors des deux points communs aux droites r^*, est bitangente à F_3^*. Par le point commun à r_{11}^*, r_{21}^* passent donc trois tangentes à la surface F_1^* (r_{11}^*, r_{21}^*, $P^*\,P_{12}^*$) et ces tangentes ne sont pas situées dans un même plan.

Donc F_3^* possède un point au moins double en ce point. En répétant le même raisonnement pour les autres points communs aux droites r^*, on voit que F_3^* possède $2\binom{6}{2} = 30$ points au moins doubles. Il en résulte que cette surface dégénère.

Considérons un plan arbitraire passant par r_{11}^*, par exemple. Il rencontre F_3^* en cette droite et en une cubique plane qui doit avoir cinq points au moins communs avec r_{11}^*; donc cette cubique dégénère et r_{11}^* est double pour F_3^*. De même, la surface F_3^* passe doublement par les autres droites r^*.

Un plan quelconque ne peut rencontrer F_3^* en plus de deux droites r^* ; d'autre part, une droite r^* en rencontre six autres : celle qui est située dans le même plan π^* et une de chacun des cinq autres plans π_i^*. Il en résulte que les droites r^* sont nécessairement situées sur une quadrique ; six de ces droites faisant partie des génératrices d'un mode, les six autres des génératrices de l'autre mode. Et cette quadrique est tangente aux six plans π_i^*.

De ce qui précède, il résulte que la surface F_3 doit nécessairement être formée par ∞^2 couples de l'involution I_2. Si l'on rapproche ce résultat de celui qui a été obtenu plus haut (n° 6), on voit que

Toute surface du quatrième ordre possédant six points doubles biplanaires en six points assignés (et pas d'autre singularité) représente une involution d'ordre 3, appartenant à une surface de genres 1.

Observons que posséder un point double biplanaire ordinaire en un point assigné équivaut, pour une surface, à cinq conditions. On voit donc que les conditions imposées à une surface du quatrième ordre, de posséder six points doubles biplanaires assignés, sont toutes indépendantes.

9. — Remarquons que les six points de contact de la quadrique F^* avec les plans $\pi_1^*, \ldots, \pi_6^*$ sont situés dans un même plan φ^*, le plan polaire de F^* par rapport au point P^*. A ce plan correspond, dans Σ, une quadrique Φ, ne contenant pas la cubique gauche γ_3. Le plan tangent à Φ en P_1, par exemple, correspond à la droite intersection de φ^* et de π_1^*. Cette droite appartient au faisceau déterminé par les deux génératrices de F^* situées dans π_1^*. Par conséquent, si F est la surface du quatrième ordre qui, dans Σ, correspond à F^*, les plans tangents à F en P_1 et le plan tangent à Φ en P_1 appartiennent à un même faisceau. En d'autres termes, la quadrique Φ est tangente en P_1 à la droite commune aux plans tangents à F en ce point. Par suite,

Si une surface du quatrième ordre possède six points doubles biplanaires ordinaires, les droites communes aux deux plans tangents à la surface en chacun de ces points sont tangentes, en ces points, à une même quadrique ne contenant pas la cubique gauche déterminée par les six points doubles.

Bruxelles, 16 mai 1922.