Détermination de la structure d'un point uni d'une involution cyclique appartenant à une surface algébrique(seconde note

Lucien Godeaux

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Détermination de la structure d'un point uni d'une involution cyclique appartenant à une surface algébrique

(seconde note [1]),

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie

19. Posons $r = (\nu^2 - 5\nu + 8):2$, et considérons le système $|C^{r-1}|$. A ce système correspondent les nombres

$$\lambda_{r-1} = \nu - 2,\ \mu_{r-1} = 3\nu^2 - 7\nu + 2,\ \lambda_{r-1} + \mu_{r-1} = 3\nu^2 - 6\nu.$$

En se reportant au raisonnement du n° 13, on voit que les courbes C^{r-1} passent $\nu - 2$ fois par les points $(\alpha,1),\ldots,(\alpha,x)$, y fois par le point $(\alpha,x + 1)$, $\nu - 2 - y$ fois par le point $(\alpha,x + 1,1),\ldots$, une fois par un point P_{r-1} car on doit avoir

$$(\nu - 2)(3\nu + x) + y = p,\ y < \nu - 2,$$

et les nombres $\nu - 2$ et y sont premiers entre eux.

Les courbes C^{r-1} passent en outre $2\nu + 7$ fois par $(\beta,1)$, 5 fois par $(\beta,2),\ldots,(\beta,\nu - 1)$, 4 fois par (β,ν), 2 fois par $(E,\nu+1),\ldots,(\beta,3\nu^2+2\nu)$, une fois par $(\beta,\nu,1),(\beta,\nu,1,1)$. Si nous posons

$$3\nu^2 - 7\nu + 2 - 5\nu - 7 = 3\nu^2 - 12\nu - 5 = 2h(\nu + 1) + k,$$

$$(k < 2\nu + 2)$$

les courbes C^{r-1} passent $2\nu + 2$ fois par $(\beta,1,1),\ldots,(\beta,1,h)$, k fois par $(\beta,1,h + 1)$, $2\nu + 2 - k$ fois par $(\beta,1,h + 1,1)$ et par une suite de

(1) La première note est parue dans le *Bulletin de l'Académie*, t. 57, 1971, pp. 918-934.

points infiniment voisins successifs se terminant par un point simple R_{r-1}. Rappelons en effet que $3v^2 - 10v - 5$ et $2v - 2$ sont premiers entre eux. On aura la même valeur pour h qu'au n° 13 si $v^2 - 3v + 3$ n'est pas divisible par $2v + 2$, une valeur supérieure dans le cas opposé.

20. Considérons les courbes C^r qui correspondent aux valeurs

$$\lambda_r = 3v^2 - 4v - 3, \ \mu_r = 5, \ \lambda_r + \mu_r = 3v^2 - 4v + 2.$$

Les courbes C^r passent $2v - 3$ fois par $(\alpha,1)$, $v - 1$ fois par $(\alpha,2)$, $\ldots,(\alpha,x)$, y fois par $(\alpha,x + 1)$, $v - 1 - y$ fois par $(\alpha,x + 1,1)$ et par une suite de points se terminant par un point simple P_{r+1}, $v - 2$ fois par les points $(\alpha,1,1),\ldots,(\alpha,1,3v)$, les nombres x et y satisfaisant à la condition

$$(v - 1)(3v + x) + y = p.$$

Les courbes C^r passent cinq fois par les points $(\beta,1),\ldots,(\beta,v - 1)$, quatre fois par (β,v), deux fois par $(\beta,v + 1),\ldots,(\beta,3v^2 + 2v)$, une fois par $(\beta,v,1),(\beta,v,1,1)$.

Passons au système $| C^{r+1} |$ qui correspond aux valeurs

$$\lambda_{r+1} = 3v^2 - 7v - 4, \ \mu_{r+1} = 3v + 7, \ \lambda_{r+1} + \mu_{r+1} = 9v^2 - 4v + 3.$$

Les courbes C^{r+1} passent $2v - 4$ fois par le point $(\alpha,1)$, $v - 1$ fois par les points $(\alpha,2),\ldots,(\alpha,x)$, y fois par le point $(\alpha,x + 1)$, $\alpha - 1 - y$ fois par $(\alpha,x + 1,1),\ldots$, une fois par le point P_{r+1}, $v - 3$ fois par les points $(\alpha,1,1),\ldots,(\alpha,1,3v)$.

Les courbes C^{r+1} passent $3v$ fois par le point $(\beta,1)$, deux fois par les points $(\beta,2),\ldots,(\beta,3v^2 + 2v)$; elles ne passent plus par les points $(\beta,v,1),(\beta,v,1,1)$. Sur la surface Φ_{r+1} la courbe τ disparaît, alors qu'elle figure encore comme droite sur la surface Φ_r.

On a $\mu_{r+1} - 3v = 7$, de sorte que les courbes C^{r+1} passent 7 fois par les points $(\beta,1,1),(\beta,1,1,1),\ldots,(\beta,1,1,h)$, où h est donné par

$$3v - 2 = 7h + k, \ (0 < k < 7).$$

Observons que si $3v - 2$ et 7 n'étaient pas premiers entre eux p serait divisible par 7. Il en résulte que les courbes C^{r+1} passent k fois par $(\beta,1,1,h + 1)$, $7 - k$ fois par le point $(\beta,1,1,h + 1,1)$ et par une suite de points infiniment voisins successifs se terminant par un point simple R_{r+1}.

De ce qui précède on conclut que les courbes $C^{r+2}, C^{r+3}, \ldots, C^{r+\nu-3}$ ne passent plus par les points $(\beta,\nu,1),(\beta,\nu,1,1)$. Leurs comportements en 0 se déduisent en usant des mêmes méthodes qu'aux n^{os} 14, 15, ..., 18.

21. Les courbes $C^{r+\nu-2}$ sont caractérisées par les nombres

$$\lambda_{r+\nu-2} = \nu - 1, \ \mu_{r+\nu-2} = 3\nu^2 - 4\nu + 1,$$

$$\lambda_{r+\nu-2} + \mu_{r+\nu-2} = 3\nu^2 - 3\nu.$$

Ces courbes passent $\nu - 1$ fois par les points $(\alpha,1),\ldots,(\alpha,x)$, y fois par le point $(\alpha,x+1)$, $\nu - 1 - y$ fois par $(\alpha,x+1,1),\ldots$, une fois par un point P_{r+1} où l'on a

$$(\nu - 1)(3\nu + x) + y = p.$$

Elles passent $2\nu + 1$ fois par le point $(\beta,1)$, deux fois par les points $(\beta,2),\ldots,(\beta,3\nu^2 + 2\nu)$, $2\nu - 1$ fois par $(\beta,1,1)$. On a $\mu_{r+\nu-2} - (2\nu + 1) = 3\nu^2 - 6\nu$. Ce nombre est premier avec $2\nu - 1$, car autrement p serait divisible par 3. En posant

$$3\nu^2 - 6\nu = (2\nu - 1)h + k, \ (k < 2\nu - 1)$$

on voit que les courbes $C^{r+\nu-2}$ passent $2\nu - 1$ fois par les points $(\beta,1,1),\ldots,(\beta,1,h)$, k fois par $(\beta,1,h+1)$, $2\nu - 1 - k$ fois par $(\beta,1,h+1\ 1),\ldots$ et une fois par un point $R_{r+\nu-2}$.

Les courbes $C^{r+\nu-1}$ sont caractérisées par les nombres

$$\lambda_{r+\nu-1} = 3\nu^2 - \nu - 1, \ \mu_{r+\nu-1} = 2.$$

Elles passent deux fois par les points $(\beta,1),\ldots,(\beta,3\nu^2 + 2\nu)$.

Elles passent d'autre part $2\nu - 1$ fois par les points $(\alpha,1),\ldots,(\alpha,6\nu + 3)$, une fois par $(\alpha,6\nu + 4),(\alpha,6\nu + 4,1),\ldots,(\alpha,6\nu + 4,\nu - 1)$, $\nu - 1$ fois par les points $(\alpha,1,1),\ldots,(\alpha,1,3\nu)$.

22. Posons pour abréger $t = (\nu^2 - 3\nu + 4) : 2$ et observons que l'on a $t = r + \nu - 2$.

Nous avons

$$\lambda_t = 3\nu^2 - \nu - 1, \ \mu_t = 2, \ \lambda_t + \mu_t = 3\nu^2 - \nu + 1$$

et les courbes C^t ont déjà été considérées.

Nous avons ensuite

$$\lambda_{t+1} = 3v^2 - 4v - 2,\ \mu_{t+1} = 3v + 4,\ \lambda_{t+1} + \mu_{t+1} = 3v^2 + 2,$$

$$\lambda_{t+2} = 3v^2 - 7v - 3,\ \mu_{t+2} = 6v + 6,\ \lambda_{t+2} + \mu_{t+2} = 3v^2 - v + 3,$$

. . . .

$$\lambda_{t+k} = 3v^2 - (3k + 1)v - (k + 1),\ \mu_{t+k} = 3kv + 2(k + 1),$$

$$\lambda_{t+k} + \mu_{t+k} = 3v^2 - v + k + 1,$$

. . . .

$$\lambda_{t+v-1} = v,\ \mu_{t+v-1} = 3v^2 - v,\ \lambda_{t+v-1} + \mu_{t+v-1} = 3v^2,$$

Les courbes C^{t+1} passent $2v - 2$ fois par $(\alpha,1),\ldots,(\alpha,6v + 3)$, une fois par $(\alpha,6v + 4),(\alpha,6v + 4,1),\ldots,(\alpha,6v + 4,v - 1)$, $v - 2$ fois par $(\alpha,1,1),\ldots,(\alpha,1,3v)$.

Supposons qu'elles passent $3v + 4$ fois par $(\beta,1),\ldots,(\beta,x')$, y fois par $(\beta,x' + 1)$ et une fois par les points $(\beta,x' + 2),\ldots,(\beta,3v^2 + 2v)$. On doit avoir

$$(3v + 3)x' + y = 3v^2 + 2v,$$

d'où $x' = v - 1$, $y = 2v + 3$. Il en résulte que les courbes C^{t+1} passent $v + 1$ fois par les points $(\beta,v,1),(\beta,v,1,1)$.

Alors que sur la surface Φ_t on a une conique ρ_1, une droite γ_t représentant le domaine du point $(\alpha,6v + 4,v - 1)$ et une courbe γ_n, sur la surface Φ_{t+1} qui est la projection de Φ_t à partir d'un point $0'_t$ commun à la conique ρ_1 et à la courbe γ_n, nous avons une droite ρ_1, unc courbe γ_n d'ordre $v - 2$ et la courbe τ d'ordre $v - 1$.

23. Envisageons maintenant les courbes C^{t+2}. Elles passent $2v - 3$ fois par les points $(\alpha,1)$, v fois par $(\alpha,2),\ldots(\alpha,6v + 3)$, une fois par $(\alpha,6v + 4),(\alpha,6v + 4,1),\ldots(\alpha,6v + 4,v - 1)$, $v - 3$ fois par $(\alpha,1,1),\ldots,(\alpha,1,3,v)$.

Il est aisé de voir que ces courbes ne peuvent plus passer $v + 1$ fois par les points $(\beta,v,1),(\beta,v,1,1)$ et par suite $2v + 1$ fois par (β,v). Par le même procédé que nous avons déjà utilisé, on trouve que ces courbes passent $6v - 1$ fois par $(\beta,1)$, $3v + 1$ fois par $(\beta,2),\ldots,(\beta,v - 1)$, $2v + 1$ fois par (β,v), une fois par $(\beta,v + 1),\ldots,(\beta,3v^2 + 2v)$, v fois par $(\beta,v,1),(\beta,v,1,1)$. D'autres part, comme on a $\mu_{t+2} - (6v - 1) = 7$, les courbes passent 7 fois par le point $(\beta,1,1)$ et passent en outre par une suite de points se terminant par un point simple R_2 déjà rencontré (n° 6).

Sur la surface Φ_{t+2} on a une droite ρ_1, une seconde droite ρ_2, représentant le domaine du point R_2, une droite γ_t, une courbe γ_n d'ordre $\nu - 3$ et une courbe τ d'ordre ν. Cette surface est la projection de Φ_{t+1} à partir du point $0_t{}^+{}_1$ situé sur les courbes γ_n et τ.

Les courbes C^{t+3} passent $2\nu - 4$ fois par $(\alpha,1)$, ν fois par $(\alpha,2)$, $\dots,(\alpha,6\nu + 3)$, une fois par $(\alpha,6\nu + 4),(\alpha,6\nu + 4,1,(\alpha,6\nu + 4,\nu - 1)$, $\nu - 4$ fois par $(\alpha,1,1),\dots,(\alpha,1,3\nu)$.

Elles passent en outre $6\nu - 2$ fois par $(\beta,1)$, $3\nu + 1$ fois par $(\beta,2)$, $\dots,(\beta,\nu - 1)$, $2\nu + 1$ fois par (β,ν), une fois par $(\beta,\nu + 1),\dots,(\beta,3\nu^2+2\nu)$ ν fois par $(\beta,\nu,1),(\beta,\nu\ 1\ 1)$.

On a $\mu_{t+3} - (6\nu - 2) = 3\nu + 10$ par suite les courbes C^{t+3} passent $3\nu - 3$ fois par $(\beta,1,1)$, 13 fois par $(\beta,1,1,1)$ et par une suite de points infiniment voisins successifs dont nous désignerons le dernier par R_{t+3}.

Sur la surface Φ_{t+3} nous avons une droite ρ_1, une droite γ_t, une courbe γ_n d'ordre $\nu - 4$, une courbe τ d'ordre ν et enfin une courbe ρ_{t+3} représentant le domaine du point R_{t+3}. Cette surface est la projection de Φ_{t+2} à partir du point 0_{t+2} commun à la droite ρ_{t+2} et à la courbe γ_n.

En considérant les courbes C^{t+4} et en répétant le raisonnement déjà fait plusieurs fois, on voit que la courbe ρ_{t+2} est une droite.

24. Les courbes des systèmes $| C^{t+4} |$, $| C^{t+5} |,\dots$ se traitent comme on a traité les systèmes $| C^{i+3} |$, $| C^{i+4} |,\dots$

Le dernier des systèmes est $| C^{t+\nu-1} |$ correspond aux valeurs

$$\lambda_{t+\upsilon-1} = \nu,\ \mu_{t+\upsilon-1} = 3\nu^2 - \nu,\ \lambda_{t+\upsilon-1} + \mu_{t+\upsilon-1} = 3\nu^2.$$

Les courbes $C^{t+\nu-1}$ passent ν fois par les points $(\alpha,1),\dots,(\alpha,6\nu + 3)$ et une fois par les points $(\alpha,6\nu + 4),(\alpha,6\nu + 4,1),\dots,(\alpha,6\nu + 4,\nu - 1)$.

Ces courbes passent également $5\nu + 2$ fois par $(\beta,1)$, $3\nu + 1$ fois par $(\beta,2),\dots,(\beta,\nu - 1)$, $2\nu + 1$ fois par (β,ν), une fois par $(\beta,\nu + 1)$, $\dots,(\beta,3\nu^2 + 2\nu)$, ν fois par $(\beta,\nu,1),(\beta,\nu,1,1)$.

On a $\mu_{t+\nu-1} - (5+2) = 3\nu^2 - 6\nu - 2$. Les courbes $C^{t+\nu-1}$ passent $2\nu + 2$ fois par $(\beta,1,1)$, elles passent par $(\beta,1,1,1)$ et par une suite de points infiniment voisins successifs se terminant par un point R_{t-1}.

Le système $| C^{t+\nu} |$ est caractérisé par les valeurs

$$\lambda_{t+\upsilon} = 3\nu^2 - \nu,\ \mu_{t+\upsilon} = 3\nu + 1,\ \lambda_{t+\upsilon} + \mu_{t+\upsilon} = 3\nu^2 + 2\nu + 1$$

Ces courbes passent $3\nu + 1$ fois par les points $(\beta,1),\ldots,(\beta,\nu - 1)$, $2\nu + 1$ fois par (β,ν), une fois par $(\beta,\nu + 1),\ldots,(\beta,3\nu^2 + 2\nu)$, et enfin ν fois par $(\beta,\nu,1),(\beta,\nu,1,1)$.

Les courbes $C^{t+\nu}$ passent en outre 2ν fois par le point $(\alpha,1)$, $\nu + 1$ fois par les points $(\alpha,2),\ldots,(\alpha,x)$, y fois par les points $(\alpha,x + 1)$, $\nu + 1 - y$ fois par le point $(\alpha,x + 1,1),\ldots$, et finalement une fois par un point P_{t+1}, les nombres x,y satisfaisant aux conditions

$$(\nu + 1)(3\nu + x) + y = p,$$

et $\nu + 1$, y étant donc premiers entre eux.

Les courbes envisagées passent en outre $\nu - 1$ fois par les points $(\alpha,1,1),\ldots,(\alpha,1,3\nu)$.

Sur la surface Φ_{t+1} on a une droite ρ_1, une courbe τ d'ordre ν, une droite γ_{t+1} qui représente le domaine du point P_{t+1} et enfin une courbe γ_n d'ordre $\nu - 1$.

Les courbes $C^{t+\nu+1}$ correspondent aux nombres

$$\lambda_{t+\upsilon+1} = 3\nu^2 - 4\nu - 1, \ \mu_{t+\upsilon+1} = 6\nu + 3,$$

$$\lambda_{t+\upsilon+1} + \mu_{t+\upsilon+1} = 3\nu^2 + 2\nu + 2.$$

On trouve cette fois que les courbes $C^{t+\nu+1}$ ne passent plus que $\nu - 1$ fois par les points $(\beta,\nu,1),(\beta,\nu,1,1)$.

Elles passent $2\nu - 1$ fois par $(\alpha,1)$, elles ont le même comportement que les courbes $C^{t+\nu}$ aux points $(\alpha,2),\ldots,P_{t+\upsilon+1}$, et passent $\nu - 2$ fois par les points $(\alpha,1,1),\ldots,(\alpha,1,3,\nu)$.

D'autre part, elles passent $6\nu - 4$ fois par $(\beta,1)$, $3\nu - 2$ fois par $(\beta,2),\ldots,(\beta,\nu - 1)$, $2\nu - 1$ fois par (β,ν), une fois par $(\beta,\nu + 1),\ldots$, $(\beta,3\nu^2 + 2\nu)$, $\nu - 1$ fois par $(\beta,\nu,1),(\beta,\nu,1,1)$.

On a $\mu_{t+\upsilon+1} - (6\nu - 4) = 7$ de sorte que les courbes $C^{t+\nu+1}$ passent 7 fois par $(\beta,1,1),\ldots$, simplement par le point P_2 déjà rencontré plus haut.

Sur la surface $\Phi_{t+\upsilon+1}$ on a une droite ρ_1, une courbe τ d'ordre $\nu - 1$, une droite ρ_2, une droite $\gamma_{\upsilon+1}$ et une courbe γ_n d'ordre $\nu - 2$. Elle est la projection de $\Phi_{t+\upsilon}$ du point $0_{t+\upsilon+1}$ commun aux courbes τ et γ_n de cette surface.

On voit que l'étude des systèmes successifs se fait de la même manière que celle des systèmes dont les courbes passent doublement par $(\beta,3\nu^2 + 2\nu)$.

25. Parmi les systèmes rencontrés en poursuivant l'étude, on trouve le système correspondant aux nombres

$$\lambda = 2\nu,\ \mu = 2\nu(3\nu + 1),\ \lambda + \mu = 6\nu^2.$$

Les courbes de ce système passent 2ν fois par $(\alpha,1),\ldots,(\alpha,x)$, y fois par $(\alpha,x + 1)$, $2\nu - y$ fois par $(\alpha,x + 1,1),\ldots$ pour aboutir à un point simple P, x et y satisfaisant aux conditions

$$2\nu(3\nu + x) + y = p,\ (y < 2\nu).$$

Elles passent $\nu + 4$ fois par $(\beta,1)$, une fois par $(\beta,2),\ldots,(\beta,3\nu^2 + 2\nu)$, $\nu + 3$ fois par $(\beta,1,1)$, une fois par les points $(\beta,1,1,1),\ldots,(\beta,1,1,6\nu^2 - 4\nu - 7)$.

Ces courbes ne passent donc plus par les points $(\alpha,1,3\nu),(\beta,\nu,1,1)$.

On rencontre ultérieurement le système caractérisé par les nombres

$$\lambda = 6\nu^2 + \nu,\ \mu = 1,\ \lambda + \mu = 6\nu^2 + \nu + 1.$$

Ses courbes passent simplement par les points $(\beta,1),\ldots,(\beta,3\nu^3 + 2\nu)$ et ne passent plus par $(\beta,\nu,1,1)$. Elles passent $4\nu + 1$ fois par $(\alpha,1)$, $2\nu + 1$ fois par $(\alpha,2),\ldots,(\alpha,x)$, y fois par $(\alpha,x + 1)$, $2\nu - 1 + y$ fois par $(\alpha,x + 1,1),\ldots$ pour finir par un point simple P'. Les nombres x,y satisfont aux conditions

$$(2\nu + 1)(3\nu + x) + y = p,\ (y < 2\nu + 1).$$

Enfin les courbes envisagées passent 2ν fois par les points $(\alpha,1,1),\ldots,(\alpha,1,3\nu)$.

26. Posons $s = (4\nu^2 + 2\nu + 1) : 2$.

Le premier des systèmes dont les courbes ne passent pas par le point $(\beta,3\nu^2 + 2\nu)$ est le système C^{s-1} qui est caractérisé par les nombres

$$\lambda_{s-1} = 2\nu + 1,\ \mu_{s-1} = 6\nu^2 + \nu - 1,\ \lambda_{s-1} + \mu_{s-1} = 6\nu^2 + 3\nu,$$

Les courbes C^{s-1} passent $2\nu + 1$ fois par les points $(\alpha,1),\ldots,(\alpha,x)$, y fois par $(\alpha,x + 1)$, $2\nu + 1 - y$ fois par $(\alpha,x + 1,1),\ldots$ pour aboutir au point simple P', les nombres x,y étant ceux qui ont été rencontrés à la fin du n° précédent.

Ces courbes passent $3\nu + 1$ fois par $(\beta,1)$, $\nu - 1$ fois par $(\beta,1,1)$, par $(\beta,1,1,1),\ldots$ et simplement par un dernier point R_{s-1}.

Le système C^{s+k} est caractérisé par les nombres

$$\lambda_{s+k} = 6v^2 - (3k - 7)v - k + 3, \ \mu_{s+n} = 3(k - 1)v + 2k - 4,$$

$$\lambda_{s+k} + \mu_{s+k} = 6v^2 + 4v + k - 1.$$

Pour $k = 0{,}1$, on a $\mu < 0$, donc les systèmes $| C^s |$, $| C^{s+1} |$ n'existent pas. Considérons le système $| C^{s+2} |$.

Les courbes C^{s+2} passent $4v + 1$ fois par $(\alpha,1)$, $2v + 2$ fois par $(\alpha,2),\ldots,(\alpha,x)$, y fois par $(\alpha,x + 1)$, $2v + 2 - y$ fois par $(\alpha,x + 1,1),\ldots$ et finalement par un point simple P_{s+2}, $2v - 1$ fois par les points $(\alpha,1,1),\ldots,(\alpha,1,3v)$ les nombres x,y satisfaisant actuellement aux conditions

$$(2v + 2)(3v + x) + y = p, \quad (y < 2v + 2).$$

Les courbes C^{s+2} passent en outre $3v$ fois par les points $(\beta,1),\ldots$, $(\beta,v - 1)$, $2v$ fois par (β,v) et v fois par $(\beta,v,1),(\beta,v,1,1)$.

L'examen des systèmes suivants ne présente plus aucune difficulté. On parviendra finalement au système que nous avons désigné par $| C^n |$ et dont les courbes passent $p - 1$ fois par 0 et une fois par $(\alpha,1),(\alpha,1,1),\ldots,(\alpha,1,3v),(\beta,1,,(\beta,1,1),\ldots,(\beta,1,9v^2 - 1)$.

Résumé

27. Nous indiquerons brièvement le comportement des courbes C passant par 0 en donnant les branches d'origine 0 appartenant à ces courbes suivant la méthode que nous avons exposée récemment [1].

Parmi les solutions en nombres entiers positifs des congruences

$$\lambda + \alpha\mu \equiv 0, \ \mu + \beta\lambda \equiv 0, \ (\text{mod. } p)$$

telles que $\lambda + \mu$ soit inférieur à p, se trouvent

$$\lambda_i' = 3iv + 2i + 1, \ \mu_i' = 3v - 3i - 1, \quad (0 \leqslant i \leqslant v - 1) \tag{1}$$

et

$$\lambda_k'' = k, \ \mu_k'' = 3kv - k, \quad (1 \leqslant k \leqslant 3v + 1) \tag{2}$$

ces solutions coïncidant si $i = 0$ et $k = 1$.

[1] *Nouvelles recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique*, cinquième note (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1971, pp. 378-385).

Les courbes C qui correspondent à la seconde solution passent $3k\nu$ fois par 0, k fois par les points $(\alpha,1),(\alpha,2),\ldots$ et finalement par un point P_k, simple pour les courbes. Celles-ci ont donc en commun une branche A_k d'origine 0, linéaire si $k = 1$, superlinéaire si $k > 1$.

Les courbes C qui correspondent à la première solution passent $2_i + 1$ fois par le point $(\alpha,1)$,$i + 1$ fois par les points $(\alpha,2),\ldots$ et finalement une fois par un point P_{i+1}, ensuite i fois par les points $(\alpha,1,1)$, $\ldots,(\alpha,1,3\nu)$. Dans le voisinage du point 0, elles se comportent donc comme la branche A_{i+1} jointe à i fois une branche superlinéaire d'origine 0 passant par $(\alpha,1),(\alpha,1,1),\ldots$ et que nous désignerons par A.

Les courbes C qui correspondent à la solution (1) passent $3(i + 1)\nu - i$ fois par 0, $3\nu - 3i - 1$ fois par $(\beta,1),\ldots,(\beta,\nu - 1)$, $2\nu - 2i$ fois par (β,ν) deux fois par $(\beta,\nu + 1),\ldots,(\beta,3\nu^2 + 2\nu)$, $\nu - i - 1$ fois par $(\beta,\nu,1),(\beta,\nu,1,1)$.

Nous désignerons par B la branche linéaire d'origine 0 passant par $(\beta,1),\ldots,(\beta,3\nu^2 + 2\nu)$ et par B′ la branche superlinéaire passant trois fois par les points 0, $(\beta,1),\ldots,(\beta,\nu - 1)$, deux fois par (β,ν), une fois par $(\beta,\nu,1),(\beta,\nu 1,1)$.

Les courbes C qui satisfont à la solution (1) peuvent être représentées dans le voisinage de 0 par

$$A_{i+1} + iA + 2B + (\mu - i - 1)B'.$$

Supposons $k \leqslant \nu - 1$. Les courbes C qui correspondent à la solution (2) passent $3(k + 1)\nu - 2k$ fois par $(\beta,1)$, $3\nu - 3k - 1$ fois par $(\beta,2),\ldots,(\beta,\nu - 1)$, $2\nu - 2k$ fois par (β,ν), 2 fois par $(\beta,\nu + 1),\ldots,$ $(\beta,3\nu^2 + 2\nu)$, $\nu - k - 1$ fois par $(\beta,\nu,1),(\beta,\nu,1,1)$. Cela étant, dans le voisinage du point 0, les courbes C satisfaisant à la condition (2) se comportent comme

$$A_k + 2B + (\nu - k - 1)B' + B_k,$$

B_k étant une branche d'origine 0 contenant les points $(\beta,1),(\beta,1,1)$.

Les courbes C passant par 0 peuvent se répartir en trois catégories suivant qu'elles passent 2 fois, ou une fois ou ne passent pas par le point $(\beta,3\nu^2 + 2\nu)$. Nous les considérerons successivement.

28. Les systèmes qui viennent d'être considérés rentrent dans la première catégorie. Il faut y ajouter les systèmes qui correspondent aux nombres $\lambda'_i + \lambda''_k,\mu'_i + \mu''_k$, à condition que la somme de ces nombres soit au plus égale à $3\nu^2 - \nu + 1$.

Les courbes du système $|C^{q+k}|$ que nous avons considéré plus haut (n° 17) se comportent dans le voisinage du point 0 comme l'expression

$$A_{i+1} + (i - k)A + 2B + (v - i - 2)B' + B_{q+k},$$

B'_{q+k} étant une branche superlinéaire d'origine 0 passant par les points $(\beta,1),(\beta,1,1),\ldots$

29. Passons aux systèmes de courbes C pour lesquels le point $(\beta,3v^2 + 2v)$ est simple.

Parmi ces systèmes se trouvent ceux qui sont caractérisés par les valeurs

$$\lambda = 3v^2 + (3i - 1)v + 2i - 2,\ \mu = 3v - 3i + r$$

$$\lambda + \mu = 3v^2 + (3i + 2)v - i + 2.$$

Les courbes d'un tel système passent $2v + 2i - 2$ fois par $(\alpha,1)$, $v + i$ fois par $(\alpha,2),\ldots$, une fois par P_{v+i}, $v + i - 2$ fois par $(\alpha,1,1)$, $\ldots,(\alpha,1,3v)$. Elles passent en outre $3v - 3i + 4$ fois par $(\beta,1,),\ldots$, $(\beta,v - 1)$, $2v - 2i + 3$ fois par (β,v), une fois par $(\beta,v + 1),\ldots$, $(\beta,3v^2 + 2v)$, $v - 1 - i$ fois par $(\beta,v,1),(\beta,v,1,1)$.

Dans le voisinage du point 0, ces courbes se comportent comme

$$A_{v+i} + (v - i - 1)A + B + (v + 1 - i)B'.$$

Les autres systèmes s'obtiennent en ajoutant aux valeurs λ,μ précédentes données par $i = 0,1,\ldots,v + 1$ des nombres λ''_k,μ''_k, la somme de ces quatre quantités étant au plus égale à $6v^2 + 4v + 1$.

Les courbes du système $|C^{t+v}|$ considéré au n° 21, ont dans le voisinage du point 0 le comportement

$$A_{2v} + (v - 1)A + B + vB'.$$

30. Reste à examiner les systèmes dont les courbes C ne passent pas par le point $(\beta,3v^2 + 2v)$. Pour ces systèmes on doit avoir

$$6v^2 + v + 1 \leqslant \lambda + \mu \leqslant 9v^2 + 3v.$$

On trouve tout d'abord les systèmes caractérisés par

$$\lambda = 2v + h,\ \mu = (2v + h)(3v - 1),$$

$$\lambda + \mu = 3v(2v + h).\ (1 \leqslant h \leqslant v + 1)$$

Les courbes du système correspondant à une valeur déterminée de h ont, dans le voisinage de 0, le comportement caractérisé par

$$A_{2\nu+h} + (\nu + 1 - h)B' + B'_{2\nu+h'}$$

$B'_{2\nu+h}$ étant une branche d'origine 0 passant par $(\beta,1),(\beta,1,1),\ldots$

En particulier, pour $h = \nu + 1$, la branche $B_{3\nu+1}$ passe par les points $(\beta,1),(\beta,1,1),\ldots,(\beta,1,9\nu^2 - 1)$.

On trouve également des systèmes en prenant

$$\lambda = \lambda'_i + \lambda''_{2\nu+h} = (3i + 2)\nu + h + 3i + 1,$$

$$\mu = \mu'_i + \mu''_{2\nu+h} = 6\nu^2 + (3h + 1)\nu - 3i - h - 1,$$

$$\lambda + \mu = 6\nu^2 + 3(i + h + 1)\nu - i.$$

Cette valeur de $\lambda + \mu$ est au plus égale à $9\nu^2 + 3\nu$, ce qui donne

$$3(i + h)\nu \leqslant 3\nu^2 + i$$

et comme i est au plus égal à $\nu - 1$, on a $i + h \leqslant \nu$.

Les courbes caractérisées par les nombres précédents ont en 0 un comportement donné par

$$A_{2\nu+1-i=h} + iA \neq (\nu - h - i)B' + B'_{2\nu-i=h'}$$

la branche superlinéaire $B'_{2\nu-i-h}$ d'origine 0 passant par les points $(\beta,1),(\beta,1,1),\ldots$

Liège, le 14 août 1971

ERRATUM

P. 921, ligne 8, lire *ont la multiplicité* 3ν au lieu de *ont la multiplicité* $\nu + 2$.