ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

Extrait des *Bulletins de la Classe des Sciences*. Séance du 3 juillet 1926, n° 7, pp. 527-534.

GÉOMÉTRIE. — **Sur un plan double de genres zéro et de bigenre un,**

par LUCIEN GODEAUX, professeur à l'Université de Liége (*).

De nos recherches sur les surfaces algébriques doubles (**), nous avons déduit, comme cas particulier d'un théorème général, que *si une surface de genres zéro et de bigenre un* ($p_a = p_g = P_3 = 0$, $P_2 = 1$) *est l'image d'une involution d'ordre deux appartenant à une surface de genres zéro et de bigenre un, elle peut se ramener, par une transformation birationnelle, à un plan double dont la courbe de diramation est formée par*

1° *Une conique et une quartique ayant deux points de contact, jointes aux deux droites tangentes à ces courbes en ces points, le point de rencontre de ces droites étant, de plus, double pour la quartique; ou par*

2° *Deux cubiques planes tangentes en deux points et les droites tangentes à ces courbes en ces points, le point de rencontre de ces droites étant commun aux deux cubiques.*

Dans cette note, nous nous proposons de former effectivement un plan double du premier type. Nous partons d'un plan

(*) Présenté par M. Servais.

(**) *Mémoire sur les surfaces algébriques doubles ayant un nombre fini de points de diramation.* (ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE, 1914.) — Voir aussi *Sur les involutions appartenant à une surface de genres* $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$ (BULL. SOC. MATH. FRANCE, 1913); *Mémoire sur les surfaces algébriques de genres zéro et de bigenre un.* (IDEM, 1915.)

double de genres zéro et de bigenre un, contenant une involution d'ordre deux également de genres zéro et de bigenre un, dont nous construisons une image sous forme d'un plan double du type indiqué.

Rappelons qu'une surface de genres zéro et de bigenre un, surface dont la découverte et l'étude sont dues à M. Enriques (*), peut toujours se ramener, d'après ce géomètre, à un plan double ayant pour courbe de diramation une sextique ayant deux tacnodes, jointe aux deux tangentes tacnodales, celles-ci se rencontrant en un point double de la sextique.

1. Soit F une surface de genres zéro et de bigenre un ($p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$) dont nous prendrons pour modèle projectif un plan double dont la courbe de diramation s'obtient de la manière suivante :

Soient D_1, D_1' deux droites; D_2 une conique ne passant pas par le point A commun à ces droites; A_1, A_1' deux points de la conique D_2 situés le premier sur D_1, le second sur D_1'; D_3 une cubique passant par le point A, tangente à D_1 en A_1 et à D_1' en A_1'. Construisons une courbe D_6 appartenant au faisceau déterminé par 1° la courbe du sixième ordre formée par les droites D_1, D_1' et la conique D_2 comptée deux fois; 2° la courbe du sixième ordre formée par la cubique D_3 comptée deux fois.

La courbe de diramation du plan double F sera la courbe $D_1 + D_1' + D_6$.

La courbe D_6 possède, d'après sa construction, des tacnodes en A_1 et A_1' et un point double en A. Elle possède, en outre,

(*) F. Enriques, *Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche* (chap. VI, n° 39) (Memoria Soc. ital. Scienze, 1896); *Sopra le superficie algebriche di bigenere uno*. (Idem, 1906.) — Voir aussi Fano, *Superficie algebriche di genere zero e bigenere uno, e loro casi particolari*. (Rend. Circ. Palermo, 1910, XXIX.)

quatre points doubles, intersections, en dehors de A_1, A'_1, de la cubique D_3 et de la conique D_2. Des points doubles isolés étant sans influence sur les genres d'une surface algébrique, la surface F a bien les genres $p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$.

Pour former l'équation de la courbe D_6, prenons comme figure de référence le triangle $A_1A'_1A''_1$, A''_1 étant un des points communs aux courbes D_2, D_3 en dehors de A'_1, A_1, et prenons, en outre, le point A comme point unitaire. Si nous désignons par $(1, 0, 0)$ les coordonnées de A''_1, par $(0, 1, 0)$ celles de A_1, par $(0, 0, 1)$ celles de A'_1, les droites D_1, D'_1 auront pour équations

$$x_1 - x_3 = 0, \qquad (D_1), \qquad x_1 - x_2 = 0, \qquad (D'_1).$$

Nous écrirons l'équation de la conique D_2 sous la forme

$$\psi(x_1, x_2, x_3) \equiv a_1x_2x_3 + a_2x_3x_1 + a_1x_1x_2 = 0. \qquad (D_2).$$

Enfin, l'équation de la cubique D_3 sera

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) \equiv x_2(b_1x_1 + b_2x_2)(x_1 - x_3) + x_3(c_1x_1 + c_3x_3)(x_1 - x_2) = 0. \quad (D_3).$$

La courbe D_6 a alors pour équation

$$(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(a_1x_2x_3 + a_2x_3x_1 + a_3x_1x_2)^2$$
$$+ k[x_2(b_1x_1 + b_2x_2)(x_1 - x_2) + x_3(c_1x_1 + c_3x_3)(x_1 - x_2)]^2 = 0,$$

ou

$$(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\psi^2 + k\varphi^2 = 0. \qquad (D_6).$$

En posant $x = \frac{x_2}{x_1}$, $y = \frac{x_3}{x_1}$, la surface F aura donc pour équation

$$z^2 = \{(1 - x)(1 - y)[\psi(1, x, y)]^2 + k[\varphi(1, x, y]^2\}(1 - x)(1 - y),$$

et le plan double F sera représenté par la notation habituelle

$$\left\{ x, y, \sqrt{[(1 - x)(1 - y)\psi^2 + k\varphi^2](1 - x)(1 - y)} \right\}. \quad (F).$$

2. Considérons le réseau de cubiques planes déterminé par les trois courbes D_3, $D_1 + D_2$, $D'_1 + D_2$. L'équation d'une courbe de ce réseau s'écrit

$$\lambda_1\varphi(x_1, x_2, x_3) + \lambda_2(x_1 - x_3)\psi(x_1, x_2, x_3) + \lambda_3(x_1 - x_2)\varphi(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Désignons ce réseau par $|C|$. Les cubiques C ont en commun sept points, à savoir le point A et les six points communs aux courbes D_2, D_3. Ces cubiques C se rencontrent encore deux à deux en des couples de points formant une involution I_2.

Pour obtenir une image de l'involution I_2, rapportons projectivement les cubiques C aux droites Γ d'un plan ϖ'. Si X_1, X_2, X_3 sont les coordonnées projectives du plan ϖ', nous pouvons obtenir cette projectivité en posant

$$X_1 : X_2 : X_3 = \varphi(x_1, x_2, x_3) : (x_1 - x_3)\psi(x_1, x_2, x_3) : (x_1 - x_2)\psi(x_1, x_2, x_3). \quad (1)$$

Par ces formules, à un point du plan ϖ' correspondent deux points du plan ϖ du réseau $|C|$, formant un groupe de I_2. Inversement, à un point de ϖ correspond un seul point de ϖ'.

Aux droites D_1, D'_1 et à la courbe D_6 correspondent dans ϖ deux droites Δ_1, Δ'_1

$$X_2 = 0 \quad (\Delta_1), \qquad X_3 = 0 \quad (\Delta'_1)$$

et une conique Δ_2

$$X_2X_3 + kX_1^2 = 0. \quad (\Delta_2).$$

Nous allons maintenant former l'équation de la courbe de diramation, dans le plan ϖ', pour la correspondance (1, 2) existant entre les plans ϖ', ϖ, c'est-à-dire de la courbe lieu des points du plan ϖ' auxquels correspondent deux points confondus de ϖ. Des formules (1), on déduit

$$\left.\begin{aligned} (x_1 - x_3)X_3 &= (x_1 - x_2)X_2, \\ X_1\psi &= x_2(b_1x_1 + b_2x_2)X_2 + x_3(c_1x_1 + c_3x_3)X_3. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

La première de ces formules établit une projectivité entre le faisceau de droites de sommet A et le faisceau de droites de sommet $X_2 = X_3 = 0$. La seconde établit une réciprocité entre le plan ϖ' et le réseau de coniques

$$\lambda_1\psi + \lambda_2 x_2 (b_1 x_1 + b_2 x_2) + \lambda_3 x_3 (c_1 x_1 + c_2 x_2) = 0.$$

Le lieu cherché s'obtiendra en exprimant que la droite et la conique du plan ϖ, représentées par les équations (2), sont tangentes. On trouve ainsi l'équation

$$\begin{aligned} &X_1^2[(a_1 + a_2)^2 X_2^2 - 2(a_1^2 + a_1a_2 + a_1a_3 - a_2a_3) X_2X_3 + (a_1 + a_3)^2 X_3^2] \\ &+ 2X_1X_2X_3 \begin{bmatrix} \{a_1(b_1 - c_1) - a_2(b_1 + 2b_2 + c_1) + 2a_3c_3\} X_2 \\ + \{a_1(c_1 - b_1) + 2a_2b_2 - a_3(c_1 + 2c_3 + b_1)\} X_3 \end{bmatrix} \\ &- X_2X_3 \begin{bmatrix} 4c_3(b_1 + b_2)X_2^2 - \{(b_1 + c_1)^2 + 4(b_1c_3 + b_2c_1 + 2b_2c_3)\} X_2X_3 \\ + 4b_2(c_1 + c_3) X_3^2 \end{bmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Cette courbe, que nous représenterons par Δ_4, possède un point double à tangentes distinctes au point $X_2 = X_3 = 0$; elle est, de plus, tangente aux droites $\Delta_1(X_2 = 0)$ et $\Delta_1'(X_3 = 0)$ aux autres sommets du triangle de référence. En ces derniers points, elle touche précisément la conique Δ_2.

Nous représenterons, en abrégé, par

$$F(X_1, X_2, X_3) = 0$$

l'équation de la courbe Δ_4.

3. Notons que la courbe qui, dans le plan ϖ, correspond à la courbe Δ_4 est, comme on sait, la jacobienne du réseau $|C|$. Son équation s'écrit

$$\psi \left[\psi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} \right) - \{a_1(x_2 + x_3) + a_2(x_3 + x_1) + a_3(x_1 + x_2)\}\varphi \right] = 0. \quad (3)$$

Cette courbe comprend donc comme partie la conique D_2, ce qui résulte géométriquement du fait que cette conique est une courbe fondamentale du réseau $|C|$. Les points de la conique D_2 correspondent, d'ailleurs, aux points du plan ϖ', infiniment voisins du point $X_2 = X_3 = 0$.

La courbe J_4, qui, avec D_2, forme la jacobienne (3) de $|C|$, a une équation qui peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} & a_1 b_1 x_1^2 (x_1 - x_3)^2 + a_1 c_1 x_3^2 (x_1 - x_2)^2 \\ & \quad - (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)[a_3 b_2 x_2^2 + a_2 c_3 x_3^3 + a_2 b_2 x_2 x_3 + a_3 c_3 x_2 x_3] \\ & \quad + (x_1 - x_2)(x_3 - x_2)[a_3 c_1 x_1^5 + a_1 c_3 x_3^2 + a_3 c_3 x_1 x_3] \\ & \quad + (x_1 - x_3)(x_2 - x_3)[a_2 b_1 x_1^2 + a_1 b_2 a_2^2 + a_2 b_2 x_1 x_2] = 0. \end{aligned}$$

Cette courbe J_4, du quatrième ordre, possède un point double en A, passe simplement par les six points d'intersection des courbes D_2, D_3. De plus, cette courbe a pour tangente en A_1 la droite D_1, en A_1' la droite D_1'.

4. Soient (y_1, y_2, y_3), (z_1, z_2, z_3) les coordonnées de deux points du plan ϖ formant un couple de l'involution I_2. Ces points se correspondent dans une transformation birationnelle dont il est aisé d'obtenir l'expression.

Tout d'abord, les deux points considérés sont alignés sur le point unitaire A ; on a donc

$$z_1 : z_2 : z_3 = \lambda + y_1 : \lambda + y_2 : \lambda + y_3. \tag{4}$$

En utilisant les formules (2), on voit, d'autre part, que les deux points se trouvent sur la conique

$$\begin{vmatrix} 0 & y_1 - y_2 & y_1 - y_3 \\ \psi(y_1, y_2, y_3) & -y_2(b_1 y_1 + b_2 y_2) & y_3(c_1 y_1 + c_3 y_3) \\ \psi(x_1, x_2, x_3) & -x_2(b_1 x_1 + b_2 x_2) & x_3(c_1 x_1 + c_3 x_3) \end{vmatrix} = 0.$$

Il suffit alors, pour obtenir les valeurs de z_1, z_2, z_3 en fonction de y_1, y_2, y_3, de remplacer dans cette équation x_1, x_2, x_3 par $\lambda + y_1$, $\lambda + y_2$, $\lambda + y_3$, ce qui fournit une valeur de λ

qu'il suffit alors de porter dans les équations (4). On obtient finalement, ρ étant un facteur de proportionnalité,

$$\rho z_1 = \begin{Vmatrix} 0 & y_1 - y_2 & y_1 - y_3 \\ \psi(y_1, y_2, y_3) & -y_2(b_1 y_1 + b_2 y_2) & y_3(c_1 y_1 + c_3 y_3) \\ a_1(y_2 + y_3 - y_1) + a_2 y_3 + a_3 y_2 & -2b_2 y_2 - b_1 y_2 + b_2 y_1 & 2c_3 y_3 + c_1 y_3 - c_3 y_1 \end{Vmatrix},$$

$$\rho z_2 = \begin{Vmatrix} 0 & y_1 - y_2 & y_1 - y_3 \\ \psi(y_1, y_2, y_3) & -y_2(b_1 y_1 + b_2 y_2) & y_3(c_1 y_1 + c_3 y_3) \\ a_1 y_3 + a_2(y_1 + y_3 - y_2) + a_3 y_1 & -(b_1 y_1 + b_2 y_2) & c_1 y_1 + c_3 y_3 + (c_1 + c_3)(y_3 + y_2) \end{Vmatrix},$$

$$\rho z_3 = \begin{Vmatrix} 0 & y_1 - y_2 & y_1 - y_3 \\ \psi(y_1, y_2, y_3) & -y_2(b_1 y_1 + b_2 y_2) & y_3(c_1 y_1 + c_3 y_3) \\ a_1 y_2 + a_2 y_1 + a_3(y_1 + y_2 - y_3) & -(b_1 y_1 + b_2 y_2) - (b_1 + b_2)(y_2 - y_3) & c_1 y_1 + c_3 y_3 \end{Vmatrix}.$$

Nous écrirons ces formules en abrégé sous la forme

$$z_1 : z_2 : z_3 = f_1(y_1, y_2, y_3) : f_2(y_1, y_2, y_3) : f_3(y_1, y_2, y_3). \tag{5}$$

5. Reprenons la surface F et écrivons son équation sous la forme

$$z^2 = \{(1-x)(1-y)[\psi(1, x, y)]^2 + k[\varphi 1, x, y)]^2\}(1-x)(1-y).$$

Cette surface possède trois transformations birationnelles involutives en elle-même, à savoir

1° $\quad x' = x, \quad y' = y, \quad z' = -z;$

2° $\quad x' = \dfrac{f_2(1, x, y)}{f_1(1, x, y)}, \quad y' = \dfrac{f_3(1, x, y)}{f_1(1, x, y)}, \quad z' = z;$

3° $\quad x' = \dfrac{f_2(1, x, y)}{f_1(1, x, y)}, \quad y' = \dfrac{f_3(1, x, y)}{f_1(1, x, y)}, \quad z' = -z.$

Chacune de ces transformations est, d'ailleurs, le produit des deux autres.

Envisageons la troisième de ces transformations et désignons par I_2' l'involution d'ordre deux qu'elle engendre sur F.

Les points de coïncidence de cette involution satisfont aux équations

$$x = \frac{f_2(1, x, y)}{f_1(1, x, y)}, \qquad y = \frac{f_3(1, x, y)}{f_1(1, x, y)}$$

et à l'équation $z = 0$, c'est-à-dire à l'équation

$$(1 - x)(1 - y)\{(1 - x)(1 - y)[\psi(1, x, y)]^2 + k[\varphi(1, x\ y)]^2\} = 0.$$

Ces points appartiennent donc à la jacobienne $D_2 + J_4$ du réseau $|C|$ et à la courbe de diramation $D_1 + D_1' + D_6$ du plan double F. En d'autres termes, les points de coïncidence de I_2' sont les points invariants à la fois pour les deux premières transformations birationnelles considérées. Il résulte de nos recherches antérieures, citées plus haut, que les points de coïncidence de I_2' sont les points communs aux courbes $D_2 + J_4$, $D_1 + D_1' + D_6$, simples pour celles-ci; ces points sont au nombre de quatre et l'involution I_2' est, par suite, de genres zéro et de bigenre un.

Une surface image de l'involution I_2' est précisément (*Mémoire..., loc. cit.*)

$$Z^2 = XY(XY + k)F(1, X, Y),$$

c'est-à-dire précisément un plan double dont la courbe de diramation est du premier type indiqué au début de cet article.

En résumé, *entre les plans doubles de genre zéro et de bigenre un*,

$$\{X, Y, \sqrt{XY(XY + k)F(1, X, Y)}\},$$

$$\{x, y, \sqrt{[(1 - x)(1 - y)\psi^2 + k\varphi^2](1 - x)(1 - y)}\},$$

existe une correspondance (1, 2).

Marcel Hayez, imprimeur, rue de Louvain, 112, Bruxelles.