ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE
Extrait des *Bulletins de la Classe des sciences*. Séance du 2 mai 1922, n° 5
pp. 189-196.

GÉOMÉTRIE. — **Sur les correspondances rationnelles entre deux surfaces de genres 1,**

par L. GODEAUX, professeur à l'École militaire (*).

Dans différents mémoires (**), nous avons étudié les correspondances (1, n) pouvant exister entre deux surfaces de genres 1 ($p_a = P_4 = 1$). Nous avons démontré que n ne peut prendre que les valeurs 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12 ou 16, et nous avons déterminé les caractères des surfaces envisagées. Précisément, si une surface Φ, de genres 1, représente une involution d'ordre n, appartenant à une surface F de genres 1, c'est-à-dire si Φ et F sont en correspondance (1, n), il n'y a sur Φ qu'un nombre fini de points de diramation (nombre que nous avons déterminé dans chaque cas) et chaque point de diramation est équivalent (au point de vue de la géométrie algébrique) à un ensemble de courbes rationnelles de degré — 2, ensemble bien déterminé dans chaque cas. Nous voudrions ajouter deux théorèmes à nos résultats :

THÉORÈME I. — *Si une surface de genres 1 est l'image d'une involution d'ordre 2, appartenant à une surface de genres 1, et si elle contient un système linéaire de courbes de genre impair π, supérieur à 3, la courbe générique ne passant pas par les*

(*) Présenté par M. Neuberg.

(**) *Sur les involutions de genres un existant sur une surface de genres un.* (BULL. DE L'ACAD. ROY. DES SCIENCES DE BELGIQUE, 1913, pp. 310-328.) — *Mémoire sur les involutions appartenant à une surface de genres un.* (ANNALES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, 1914, pp. 357-430; 1919, pp. 51-70.)

points de diramation, cette surface est l'image d'autres involutions d'ordre 2, appartenant à d'autres surfaces de genres 1.

Théorème II. — *Si une surface de genres 1 est l'image d'une involution d'ordre* n *appartenant à une surface de genres 1, et si elle contient un système linéaire de courbes de genre* π *au moins égal à 2, la courbe générique ne passant pas par les points de diramation, cette surface contient en outre* n — 1 *systèmes linéaires de courbes de genre* $\pi - 2$.

I

1. — Soit F une surface de genres 1, image d'une involution d'ordre 2 appartenant à une surface de genres 1. Elle possède huit points de diramation, équivalents chacun à une courbe rationnelle de degré — 2. Soient $C_1, C_2, \ldots, C_8$ ces courbes. Soit, d'autre part, $|C|$ un système linéaire de courbes de genre impair $\pi > 3$, ne passant pas par les points de diramation, c'est-à-dire dont les courbes $C_1, C_2, \ldots, C_8$ sont des courbes fondamentales.

Nous avons démontré (*loc. cit.*) que la condition nécessaire et suffisante pour que F soit l'image d'une involution de l'espèce envisagée est qu'il existe une courbe C_0 telle que

$$2C_0 + C_1 + C_2 + \cdots + C_8 = 2C.$$

La courbe C_0 est de degré $2\pi - 6$, de genre $\pi - 2$ et rencontre une courbe C en $2\pi - 2$ points.

2. Supposons que $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ étant des entiers positifs, on ait

$$\pi - 3 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots \alpha_k^2, \qquad (k \leq 8).$$

Il est toujours possible de trouver une pareille décomposition de $\pi - 3$, car, d'après le théorème de Bachet, tout nombre entier est égal à une somme de quatre carrés au plus, à fortiori à une somme de huit carrés au plus (*).

Observons que, π étant impair, $\pi - 3$ est pair, et, par suite, il y a au plus un nombre pair de nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ impairs. En d'autres termes, la somme de ces nombres est paire et nous poserons

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots \alpha_k = 2\alpha.$$

3. Considérons les courbes

$$\begin{aligned}
C'_1 &= \alpha_1 C - (\alpha_1^2 + 1) C_1 - \alpha_1\alpha_2 C_2 - \cdots - \alpha_1\alpha_k C_k,\\
C'_2 &= \alpha_2 C - \alpha_1\alpha_2 C_1 - (\alpha_2^2 + 1) C_2 - \cdots - \alpha_2\alpha_k C_k,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
C'_k &= \alpha_k C - \alpha_1\alpha_k C_1 - \alpha_2\alpha_k C_2 - \cdots - (\alpha_k^2 + 1) C_k.
\end{aligned}$$

Nous allons démontrer que ces courbes existent et sont rationnelles. A cause de la symétrie, il nous suffira d'ailleurs de faire le raisonnement pour C'_1.

Observons tout d'abord que C'_1 rencontre C en $(2\pi - 2)\alpha_1$ points. Il nous suffira donc de montrer, pour prouver l'existence de C'_1, que le nombre de conditions auxquelles est assujettie une courbe $\alpha_1 C$ devant contenir $(\alpha_1^2 + 1)$ fois C_1, $\alpha_1\alpha_2$ fois $C_2, \ldots, \alpha_1\alpha_k$ fois C_k, n'excède pas la dimension du système linéaire $|\alpha_1 C|$ (certainement existant).

Observons que C_1 est fondamentale pour $|C|$, donc pour $|\alpha_1 C|$. Par suite, contenir une fois C_1 pour $\alpha_1 C$ équivaut à une condition. Les courbes $\alpha_1 C - C_1$ rencontrent C_1 en deux points; donc contenir une fois C_1 pour la courbe $\alpha_1 C - C_1$ équivaut à trois conditions. Plus généralement, $\alpha_1 C - \beta C_1$ rencontre C_1 en 2β points; donc contenir une fois C_1 équivaut, pour la

(*) Voir, au sujet de l'utilisation du théorème de Bachet dans l'étude des surfaces de genres un, un Mémoire de M. Severi, *Le superficie algebriche con curva canonica d'ordine zero.* (Atti del R. Istituto Veneto, 1909, LXVIII, pp. 249-260.)

courbe $\alpha_1 C - \beta C_1$, à $2\beta + 1$ conditions. Il en résulte que contenir $(\alpha_1^2 + 1)$ fois C_1 équivaut, pour $\alpha_1 C$, à

$$1 + 3 + 5 + \cdots + [2(\alpha_1^2 + 1) - 1] = (\alpha_1^2 + 1)^2$$

conditions.

Cela étant, C_2 est fondamentale pour $|\alpha_1 C - (\alpha_1^2 + 1) C_1|$; donc les courbes de ce système qui contiennent $\alpha_1\alpha_2$ fois C_2 satisfont à $\alpha_1^2\alpha_2^2$ conditions. Et ainsi de suite.

En résumé, les courbes $\alpha_1 C$, contenant $(\alpha_1{}^2 + 1)$ fois C_1, $\alpha_1\alpha_2$ fois $C_2, \ldots, \alpha_1\alpha_k$ fois C_k, satisfont à

$$(\alpha_1^2 + 1)^2 + \alpha_1^2\alpha_2^2 + \cdots \alpha_1^2\alpha_k^2 = \alpha_1^2(\pi - 1) + 1$$

conditions. Or, c'est précisément la dimension du système $|\alpha_1 C|$; donc C_1' existe.

Le degré de C_1' est fourni par la relation (*)

$$[C_1'C_1'] = (2\pi - 2)\alpha_1^2 - 2(\alpha_1^2 + 1)^2 - 2\alpha_1^2\alpha_2^2 - \cdots - 2\alpha_1^2\alpha_k^2 = -2\,;$$

donc C_1' est rationnelle.

Il en est de même de $C_2', \ldots, C_k'$.

4. Proposons-nous de déterminer une courbe C', soit

$$C' = \lambda C + \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \cdots + \lambda_k C_k + \lambda_{k+1} C_{k+1} + \cdots + \lambda_8 C_8,$$

telle que $C_1', C_2', \ldots, C_k', C_{k+1}, \ldots, C_8$ soient fondamentales pour le système $|C'|$.

On a tout d'abord

$$[C' C_{k+1}] = -2\lambda_{k+1}, \quad \ldots, \quad [C' C_8] = -2\lambda_8;$$

donc $\lambda_{k+1} = \cdots = \lambda_8 = 0$.

(*) Voir Severi, *Sulla totalità delle curve algebriche tracciate sopra una superficie algebrica*. (Math. Annalen, 1906, Bd LXII, pp. 194-225.)

On trouve ensuite

$$[c'c'_1] = 2(\pi - 1)\alpha_1\lambda + 2(\alpha_1^2 + 1)\lambda_1 + 2\alpha_1\alpha_2\lambda_2 + \cdots + 2\alpha_1\alpha_k\lambda_k = 0,$$

c'est-à-dire

$$(\pi - 1)\alpha_1\lambda + (\alpha_1^2 + 1)\lambda_1 + \alpha_1\alpha_2\lambda_2 + \cdots \alpha_1\alpha_k\lambda_k = 0.$$

. . . .

On a de même

$$(\pi - 1)\,\alpha_2\lambda + \alpha_1\alpha_2\lambda_1 + (\alpha_2^2 + 1)\lambda_2 + \cdots + \alpha_2\alpha_k\lambda_k = 0,$$

. . . .

$$(\pi - 1)\,\alpha_k\lambda + \alpha_1\alpha_k\lambda_1 + \cdots + (\alpha_k^2 + 1)\lambda_k = 0.$$

De ces relations on déduit

$$\frac{\lambda}{\pi - 2} = \frac{\lambda_1}{-(\pi - 1)\alpha_1} = \frac{\lambda_2}{-(\pi - 1)\alpha_2} = \cdots = \frac{\lambda_k}{-(\pi - 1)\alpha_k}. \tag{1}$$

Nous prendrons l'unité pour valeur commune de ces rapports, c'est-à-dire que nous choisirons le système

$$|C'| = |(\pi - 2)C - (\pi - 1)(\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \cdots + \alpha_k C_k)|.$$

On démontre, comme plus haut (n° 3), que ce système existe. Son degré est égal à $2\pi - 2$, son genre et sa dimension à π.

5. Envisageons maintenant le système linéaire

$$\left.\begin{aligned} |C'_0| = |(\pi - 3 - \alpha)C + C_0 - \{\alpha_1(\pi - 1 - \alpha) - 1\}C_1 - \cdots \\ - \{\alpha_k(\pi - 1 - \alpha) - 1\}C_k|. \end{aligned}\right\}$$

Par une méthode analogue à celle qui a été utilisée plus haut (n° 3), on démontre que les courbe C'_0 existent (en partant du système $|(\pi-3-\alpha)C+C_0|$, dont l'existence est certaine). Ces courbes C'_0 sont de degré $2\pi-6$, de genre $\pi-2$ et la dimension de $|C'_0|$ est $\pi-2$. De plus, les courbes C'_0 rencontrent les courbes C' en $2\pi-2$ points.

Comparant les systèmes $|C'|$, $|C'_0|$ et les courbes $C'_1, \ldots, C'_k, C_{k+1}, \ldots, C_8$, on trouve immédiatement la relation fonctionnelle

$$2C'_0+C'_1+C'_2+\cdots+C'_k+C_{k+1}+\cdots+C'_8=2C'.$$

C'est précisément la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une surface de genres 1 contenant une involution d'ordre 2, dont F est l'image, les courbes de diramation étant $C'_1, \ldots, C'_k, C_{k+1}, \ldots, C_8$ (courbes qui peuvent être ramenées, par transformation birationnelle de F, à des points doubles coniques).

On voit donc que F représente deux involutions d'ordre 2, appartenant à des surfaces de genres 1, et ces involutions sont certainement distinctes, puisque les courbes $C'_1, \ldots, C'_k$ sont certainement distinctes des courbes $C_1, \ldots, C_k$. Le théorème I est donc démontré.

Observation I. — A chaque décomposition de $\pi-3$ en somme de $k(\leq 8)$ carrés correspondront plusieurs involutions nouvelles, obtenues en permutant les rôles des courbes $C_1, \ldots, C_8$.

Observation II. — Si nous prenions comme valeur commune des rapports (1) (n° 4) un entier μ, cela reviendrait à remplacer $|C'|$ par $|\mu C'|$ et nous n'obtiendrions pas d'involution nouvelle.

6. Examinons le cas le plus simple, $\pi=5$. Nous avons $\pi-3=1+1$, et, par suite, la surface F représente $1+\binom{8}{2}=29$ involutions d'ordre 2, appartenant à des surfaces de genres 1.

Les courbes rationnelles de diramation de ces diverses involutions sont

1^o C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8;
2^o $C - 2C_1 - C_2$, $C - 2C_2 - C_1$, C_3, C_4, ..., C_8;
. . . . :
29^o C_1, C_2, ..., C_8, $C - 2C_7 - C_8$, $C - 2C_8 - C_7$.

Deux de ces involutions auront toujours deux courbes de diramation différentes.

II

7. Soient Φ, F deux surfaces de genres 1 liées par une correspondance $(1, n)$. Soit, sur Φ, un système linéaire $|\Gamma|$, de genre $\pi(\geq 2)$, de degré $2\pi - 2$ et de dimension π, dont la courbe générique ne passe pas par les points de diramation de la correspondance.

Aux courbes de $|\Gamma|$ correspondent, sur F, des courbes C_0, de genre $n(\pi - 1) + 1$, de degré $2n(\pi - 1)$, formant un système $|C_0|$ de dimension π. On sait que $|C_0|$ appartient à un système $|C|$, complet, de dimension $n(\pi - 1) + 1$, les courbes C, C_0 ayant d'ailleurs mêmes genre, degré et ordre. Les transformations birationnelles de F en elles-mêmes, génératrices de l'involution, déterminées par la correspondance sur F, transformations dont nous avons démontré l'existence dans nos travaux cités, opèrent sur les éléments de $|C|$ comme des homographies. Comme on a $n > 1$, $n(\pi - 1) + 1 > \pi$, il doit exister, dans $|C|$, quelques systèmes partiels $|C_1|$, $|C_2|$, ..., $|C_k|$, distincts de $|C_0|$, et composés avec l'involution envisagée.

Désignons par $|\Gamma_1|$, $|\Gamma_2|$, ..., $|\Gamma_k|$ les systèmes linéaires correspondants sur Φ. Observons que la courbe C_0 générique ne passe pas par les points de coïncidence de l'involution; par suite, les courbes C_1, C_2, ..., C_k rencontrent une courbe C_0 en

$2n(\pi - 1)$ points. Il en résulte que les courbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_k$ rencontrent les courbes Γ en $2\pi - 2$ points.

Soient $r_1, r_2, \ldots, r_k$ les dimensions respectives des systèmes linéaires $|\Gamma_1|, |\Gamma_2|, \ldots, |\Gamma_k|$ (ou $|C_1|, |C_2|, \ldots, |C_k|$). D'après la théorie des homographies, on a

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_k + \pi + k + 1 = n(\pi - 1) + 2,$$

ou

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_k = (n-1)\pi - n - k + 1.$$

D'autre part, la série d'ordre $2\pi - 2$, découpée sur une courbe Γ par les courbes Γ_1, par exemple, est non spéciale, sans quoi les courbes Γ_1 appartiendraient au système $|\Gamma|$, ce qui est absurde. De plus, par un groupe de cette série, il ne passe qu'une courbe Γ_1, sans quoi les courbes Γ appartiendraient à $|\Gamma_1|$, ce qui est absurde.

La série d'ordre $2\pi - 2$ envisagée, étant non spéciale, a la dimension $\pi - 2$; par suite, on a $r_1 \leq \pi - 2$.

De même, on a $r_2 \leq \pi - 2, \ldots, r_k \leq \pi - 2$ et, par suite,

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_k \leq k(\pi - 2).$$

Tenant compte de l'égalité précédemment établie, on en déduit

$$(n-1)\pi - n - k + 1 \leq k(\pi - 2),$$

ou

$$n(\pi - 1) - (\pi - 1) \leq k(\pi - 1);$$

d'où, comme $\pi - 1 > 0$, $k \geq n - 1$.

Par la théorie des homographies, on sait que $k \leqq n - 1$. Par suite, on a $k = n - 1$ et, de plus, $r_1 = r_2 = \cdots = r_k = \pi - 2$.

Un système linéaire complet tracé sur une surface de genres 1 ayant le genre et la dimension égaux, et les systèmes $|\Gamma_1|, \ldots, |\Gamma_k|$ étant nécessairement complets, notre second théorème est complètement établi.

Bruxelles, 22 février 1922.

Bruxelles. — Imprimerie M. Hayez, rue de Louvain, 112.