ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE
Extrait des *Bulletins de la Classe des sciences*. Séance du 5 novembre 1921, n° 11, pp. 653-665.

Géométrie. — Sur une involution rationnelle, douée de trois points de coïncidence, appartenant à une surface algébrique de genre 3

(*Première communication*),

par Lucien Godeaux, professeur à l'École militaire (*).

Lorsque nous avons étudié les involutions d'ordre premier, douées d'un nombre fini de points de coïncidence, appartenant à une surface algébrique (**), nous avons appliqué nos résultats au cas où la surface représente les couples de points d'une courbe de genre 3 (***). Cela nous a conduit au premier exemple d'une involution d'ordre 3, possédant des coïncidences des deux espèces. Il nous restait à étudier une involution d'ordre 7, possédant six points de coïncidence, mais les événements nous avaient forcé à suspendre nos recherches. Nous avons pu les reprendre récemment et avons réussi à déterminer complètement les caractères de l'involution d'ordre 7 en question. Bien que les recherches qui font l'objet de cette note soient relatives à un cas particulier, nous croyons cependant qu'elles présentent suffisamment d'intérêt pour être publiées; elles sont relatives au premier exemple connu d'une involution rationnelle, ayant un nombre fini de points de coïncidence, appartenant à une surface algébrique non rationnelle.

Nous commençons par étudier la surface F, de S_6, intersection d'une hypersurface cubique V_5^3 et d'une variété à trois dimensions V_3^4, d'ordre 4, constituée par les droites projetant une surface de Véronèse d'un point extérieur. Nous montrons qu'une transformée birationnelle de F est une surface du

(*) Présenté par M. Stuyvaert.

(**) *Recherches sur les involutions douées d'un nombre fini de points de coïncidence, appartenant à une surface algebrique.* (Bulletin de la Soc. math. de France, 1919, pp. 1-16. Voir aussi une note dans les *C. R.*, 1916.)

(***) *Sur les surfaces algébriques liées à une courbe de genre 3.* (Bulletin de l'Acad. roumaine, 1916, pp. 271-274, 283-286, 373-378.)

sixième ordre, de S_3, possédant un point triple uniplanaire, et nous en concluons que les genres F sont $p_a = 3$, $p_g = 3$, $P_2 = 6, \ldots, p^{(1)} = 4$. La surface F est un modèle bicanonique normal.

Nous considérons ensuite le cas où F est transformée en elle-même par une homographie de période 7, présentant trois de ses points unis sur F. Cette homographie détermine, sur la surface F, une involution d'ordre 7 présentant trois points de coïncidence non parfaite. Nous construisons un modèle projectif de la surface Φ, image de cette involution; ce modèle est une surface normale d'ordre 6, de S_3, passant doublement par les arêtes d'un trièdre et par une cubique plane. Elle est donc rationnelle.

Nous montrons ensuite que, dans la variété des surfaces F, on trouve la surface de Humbert, c'est-à-dire la surface qui représente les couples de points d'une courbe *a* de genre 3, un point de la surface correspondant à deux couples formant un groupe canonique. Lorsque la courbe *a* est la quartique de Klein, la surface de Humbert possède une involution d'ordre 7, à trois points de coïncidence. Celle-ci est rationnelle. Cela étant établi, il est aisé de démontrer la rationalité de l'involution d'ordre 7, présentant six points de coïncidence, appartenant à la surface représentant, à la manière ordinaire, les couples de points de la quartique de Klein.

§ 1er. — *La surface* F, *de* S_6, *intersection d'une hypersurface cubique et d'un cône projetant une surface de Véronèse d'un point extérieur.*

1. Considérons, dans un espace linéaire à six dimensions, S_6, une hypersurface cubique V_5^3 et un cône V_3^4 projetant une surface de Véronèse d'un point extérieur O_7. Ce cône est une variété à trois dimensions d'ordre 4, contenant ∞^2 cônes quadratiques, les cônes projetant de O_7 les ∞^2 coniques appartenant à la surface de Véronèse. Deux de ces cônes ont une droite en commun, variable avec les cônes considérés.

Supposons que l'hypersurface V_5^3 ne passe pas par O_7 et désignons par F la surface, d'ordre 12, commune aux deux variétés V_5^3, V_3^4.

Soient $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$ les coordonnées ponctuelles homogènes de S_6 par rapport à un 7-èdre de référence O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6, O_7, le sommet O_i correspondant aux valeurs nulles des coordonnées, x_i excepté.

On peut prendre, pour équations d'une surface de Véronèse située dans l'espace $x_7 = 0$ (*),

$$\begin{array}{lll} x_2x_3 = x_4^2, & x_3x_1 = x_5^2, & x_1x_2 = x_6^2, \\ x_1x_4 = x_5x_6, & x_2x_5 = x_6x_4, & x_3x_6 = x_4x_5. \end{array} \tag{1}$$

Les équations (1) seront également les équations du cône V_4^3 projetant la surface de Véronèse du point extérieur O_7.

L'équation d'une hypersurface cubique V_5^3, ne passant pas par O_7, peut s'écrire

$$x_7^3 + x_7^2\varphi_1 + x_7\varphi_2 + \varphi_3 = 0, \tag{2}$$

φ_1, φ_2, φ_3 étant des polynômes homogènes et entiers en x_1, x_2, ..., x_6, de degrés égaux aux indices. Nous supposerons ces polynômes généraux.

La surface F est représentée par les équations (1) et (2).

2. — Pour pouvoir construire une transformée birationnelle de F appartenant à un espace à trois dimensions S_3, nous allons tout d'abord donner une représentation birationnelle du cône V_4^3 sur cet S_3.

A cet effet, nous rapporterons projectivement les hyperplans de S_6 aux quadriques de S_3 passant par un point A_4 et y touchant un plan fixe.

(*) Bertini, *Geometria proiettiva degli iperspazi*. Pisa, 1907. (Voir le chap. XV.)

Soient y_1, y_2, y_3, y_4 les coordonnées homogènes d'un point de S_3 par rapport à un tétraèdre de référence $A_1A_2A_3A_4$, le point A_1 étant donné par $y_2 = y_3 = y_4 = 0$, etc.

Les quadriques de S_3 passant par A_4 et ayant en ce point même plan tangent $y_1 = 0$ ont des équations de la forme

$$\lambda_{11}y_1^2 + \lambda_{22}y_2^2 + \lambda_{33}y_3^2 + \lambda_{23}y_2y_3 + \lambda_{31}y_3y_1 + \lambda_{12}y_1y_2 + \lambda_{14}y_1y_4 = 0.$$

Rapporter projectivement les hyperplans de S_6 aux quadriques considérées revient à poser

$$\frac{x_1}{y_1^2} = \frac{x_2}{y_2^2} = \frac{x_3}{y_4^2} = \frac{x_4}{y_2y_3} = \frac{x_5}{y_3y_1} = \frac{x_6}{y_1y_2} = \frac{x_7}{y_1y_4}. \tag{3}$$

On déduit les formules (3)

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_6} = \frac{y_3}{x_5} = \frac{y_4}{x_7}, \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{y_1}{x_4} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_4}, \\ \frac{y_1}{x_5} = \frac{y_2}{x_4} = \frac{y_3}{x_3}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

En vertu des équations (1), les formules (5) se ramènent aux formules (4). Nous voyons donc que, par les formules (3), à un point de S_3 correspond un et un seul point du cône V_4^3 et que, réciproquement, à un point de V_4^3 correspond un et un seul point de S_3.

Il y a exception pour les points de la conique

$$x_2x_3 = x_4^2, \quad x_1 = x_5 = x_6 = x_7 = 0.$$

A chacun de ces points correspond une droite du plan $y_1 = 0$ passant par A_4.

Il y a également exception pour le point A_4, auquel correspond la section du cône V_4^3 par $x_7 = 0$ (surface de Véronèse).

Les formules (3) définissent donc une représentation birationnelle du cône V_4^3 sur S_3.

3. — Au moyen des formules (3), la surface F est transformée, birationnellement, en une surface F^* d'équation

$$\left.\begin{aligned} y_1^3y_4^3 + y_1^2y_4^2\varphi_1(y_1^2,\ y_2^2,\ y_3^2,\ y_2y_3,\ y_3y_1,\ y_1y_2) + \\ + y_1y_4\varphi_2(y_1^2,\ y_2^2,\ \ldots\ldots\ldots,\ y_1y_2) + \\ + \varphi_3(y_1^2,\ y_2^2,\ \ldots\ldots\ldots,\ y_1y_2) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Recherchons quelles sont les singularités de la surface F^*.

Tout d'abord, l'équation (6) étant du troisième degré en y_4 et du sixième degré séparément en y_1, y_2, y_3, le point A_4 est triple pour F^*. D'autre part, le cône tangent à F^* en A_4 a pour équation le coefficient de y_4^3 égalé à zéro, c'est-à-dire, actuellement, $y_1^3 = 0$. Le point A_4 est donc un point triple uniplanaire pour la surface F^*.

Recherchons si la surface F^* peut posséder d'autres singularités en dehors du plan $y_1 = 0$.

Observons d'abord que la section de F^* par plan $y_4 = 0$,

$$y_4 = 0, \qquad \varphi_3 = 0,$$

ne possède pas de point multiple, la forme φ_3 ayant été supposée générale. La surface F^* ne possède donc pas de courbe multiple.

Un point multiple isolé, distinct de A_4, pour F^* peut se présenter dans trois cas :

a) Il correspond à un point multiple de l'hypersurface V_5^3 situé dans la variété V_4^3;

b) Il correspond à un point de contact des variétés V_4^3 et V_5^3;

c) Il correspond à plusieurs points distincts de F.

Les formes φ_1, φ_2, φ_3 étant générales, on pourra toujours supposer que les deux premiers cas ne se présentent pas. D'autre part, pour que le dernier cas puisse se présenter, le point multiple considéré doit être exceptionnel dans la correspondance définie par les formules (3). Or, nous avons vu qu'il y a, dans S_3, un seul point exceptionnel qui est A_4. Par suite,

La surface F^* *d'ordre* 6 *possède comme seule singularité ponctuelle un point triple uniplanaire* A_4.

4. — Il convient, pour notre but, d'examiner de plus près le point triple A_4.

En premier lieu, l'intersection de la surface F^* avec le plan $y_1 = 0$ se compose de six droites :

$$y_1 = 0, \qquad \varphi_3(0,\ y_2^2,\ y_3^2,\ y_2y_3,\ 0,\ 0) = 0.$$

Désignons par C une courbe, section de la surface F^* par un plan passant par A_4. Pour étudier la singularité de C en A_4, nous pouvons, sans nuire à la généralité, supposer qu'elle est précisément découpée par le plan $y_3 = 0$; nous obtenons alors, pour équation de cette courbe,

$$\begin{aligned} y_1^3y_4^3 + y_1^2y_4^2\varphi_1(y_1^2,\ y_2^2,\ 0,\ 0,\ 0,\ y_1y_2) &+ \\ + y_1y_4\varphi_2(y_1^2,\ y_2^2,\ 0,\ 0,\ 0,\ y_1y_2) &+ \qquad (7) \\ + \varphi_3(y_1^2y_2^2,\ 0,\ 0,\ 0,\ y_1y_3) &= 0. \end{aligned}$$

Cette courbe possède un point triple en A_4, dont les trois tangentes coïncident avec la droite $y_1 = (y_3 =)\ 0$. De plus, si dans l'équation (7) nous faisons $y_1 = 0$, cette équation se réduit à $y_2^6 = 0$. Donc les six intersections de la courbe C avec la tangente au point triple A_4 sont réunies en ce point. En d'autres termes,

Les sections C *de la surface* F^* *par les plans passant par* A_4 *sont des courbes ayant en* A_4 *deux points triples infiniment voisins successifs.*

En particulier, les plans passant par une des six droites communes à F^* et au plan $y_1 = 0$ se décomposent en cette droite et en une courbe du cinquième ordre, ayant deux points doubles infiniment voisins en A_4, c'est-à-dire un tacnode (la tangente tacnodale étant la droite considérée).

5. — Nous sommes maintenant en mesure de calculer les invariants de la surface F^* et, par suite, de la surface F.

Considérons un plan α passant par A_4 et la courbe C située dans ce plan. La série canonique de C est découpée par les cubiques du plan α adjointes à C. Ces cubiques doivent donc passer doublement par chacun des deux points triples infiniment voisins de C en A_4 ; ces cubiques se décomposent donc en la droite-intersection des plans α et $y_1 = 0$ et en des coniques touchant le plan $y_1 = 0$ en A_4.

Comme vérification de ce résultat, ces coniques découpent sur C une série linéaire g_6^3 ; or C, ayant deux points triples, est de genre 4.

De ce qui précède, on conclut que, sur F^*, le système $|C'|$, adjoint au système $|C|$, est découpé par les quadriques touchant le plan $y_1 = 0$ au point A_4.

Les courbes canoniques $C' - C$ de F^* seront découpées sur cette surface par les surfaces qui, jointes à un plan arbitraire passant par A_4, donnent les quadriques considérées. Ce sont évidemment les plans passant par A_4 eux-mêmes. On a donc

$$| C' - C | = | C |.$$

Les courbes C sont les courbes canoniques de F^* et, par conséquent, on a $p_g = 3$ pour cette surface.

Les courbes bicanoniques 2C sont découpées par les quadriques touchant $y_1 = 0$ en A_4 ; donc $P_2 = 7$.

Nous avons déjà remarqué que les courbes C étaient de genre 4 ; donc $p^{(1)} = 4$. Comme vérification de ce point, deux courbes C se rencontrent, en dehors de A_4, en trois points (éventuellement confondus en A_4 dans le plan $y_1 = 0$).

Observons enfin que les quadriques touchant $y_1 = 0$ en A_4 découpent, sur une courbe canonique C, la série canonique g_6^3 *complète ;* par conséquent, la surface est régulière (Enriques, Picard), et l'on a $p_a = 3$.

Les surfaces F^*, F *ont les genres* $p^{(1)} = 4$, $p_a = p_g = 3$, $P_2 = 7$.

Remarque I. — Les surfaces adjointes à la surface F^*, d'ordre 6, sont des quadriques qui, d'après ce qu'on vient de voir, se décomposent en des plans passant par A_4 et en un plan fixe, le plan $y_1 = 0$. Les six droites communes à F^* et à ce plan sont donc exceptionnelles. On le voit immédiatement en remarquant que ces droites correspondent aux six points de F situés sur la conique

$$x_2x_3 = x_4^2, \qquad x_1 = x_5 = x_6 = x_7 = 0,$$

rencontrée plus haut (nº 2).

Remarque II. — Aux courbes bicanoniques 2C de F^* correspondent, sur F, les sections de cette surface par les hyperplans de S_6 (nº 1); donc

La surface F *est une surface bicanonique normale.*

Les courbes canoniques sont découpées, sur F, par les cônes quadratiques contenus dans la variété V_3^4, comme on le voit en utilisant les formules (3). Chacune de ces courbes canoniques est donc contenue dans l'espace à trois dimensions déterminé par le cône quadratique la découpant sur F. D'ailleurs, ces courbes canoniques étant d'ordre 6 et de genre 4 sont par ce fait nécessairement contenues dans des S_3.

§ 2. — *La surface* F *contenant une involution d'ordre 7 douée de trois points de coïncidence.*

6. — Considérons l'homographie H, de période 7, de S_6, définie par les formules

$$\frac{x_1'}{\varepsilon^2 x_1} = \frac{x_2'}{\varepsilon^4 x_2} = \frac{x_3'}{\varepsilon x_3} = \frac{x_4'}{\varepsilon^6 x_4} = \frac{x_5'}{\varepsilon^5 x_5} = \frac{x_6'}{\varepsilon^3 x_6} = \frac{x_7'}{x_7}, \tag{H}$$

où ε est une racine primitive septième de l'unité.

Cette homographie H possède sept points invariants et transforme en elle-même la variété conique V_3^4 représentée par les équations (1).

Cela étant, considérons la surface F découpée, sur V_3^4, par l'hypersurface cubique, également transformée en elle-même par H, d'équation

$$a_1 x_1^2 x_6 + a_2 x_2^2 x_4 + a_3 x_3^2 x_5 + x_7(b_1 x_1 x_5 + b_2 x_2 x_6 + b_3 x_3 x_4 + x_7^2) = 0.$$

Nous désignerons cette surface par F_1.

On voit immédiatement que F_1 passe par les points de coïncidence O_1, O_2, O_3. Nous allons voir que ces coïncidences sont non parfaites, c'est-à-dire qu'il n'y a que deux directions, issues de chacun de ces points, invariantes pour H.

Le plan tangent à F_1, en O_1, a pour équations

$$x_2 = x_3 = x_4 = x_6 = 0.$$

L'homographie H échange entre elles les droites de ce plan et en laisse deux invariantes : O_1O_5, O_1O_7. Par conséquent, le point O_1 est simple pour la surface F_1 et H échange entre elles les directions issues de O_1 en laissant invariantes les directions tangentes à O_1O_5, O_1O_7. Le point O_1 est donc un point de coïncidence non parfaite.

Si, dans les équations de F_1, on fait $x_2 = x_3 = x_4 = x_6 = x_7 = 0$, elles se réduisent à $x_5^2 = 0$; donc F_1 touche O_1O_5 en O_1. Si nous faisons $x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$, ces équations se réduisent à $x_7^3 = 0$; donc F_1 oscule la droite O_1O_7 en O_1.

On vérifie de même que :

En O_2, les deux directions unies sont tangentes aux droites O_2O_6, O_2O_7. La première droite touche F_1 en O_2; la seconde oscule cette surface au même point. De plus, O_2 est simple pour F_1.

En O_3, les deux directions unies sont déterminées par les droites O_3O_4, O_3O_7, la première tangente, la seconde osculatrice à F_1 en O_3. O_3 est simple pour F_1.

En résumé, nous voyons que

L'involution d'ordre 7 I_7, *engendrée sur* F_1 *par l'homographie* H, *possède trois points de coïncidence non parfaite, simples pour* F_1.

7. — Nous allons faire voir, avant de poursuivre l'étude de l'involution I_7, que la surface F_1 possède les mêmes caractères invariants que F. Dans ce but, nous étudierons la surface F_1^* que les formules (3) font correspondre, dans S_3, à F_1.

Cette surface a pour équation

$$y_1^3 y_4^3 + y_1 y_4 (b_1 y_1^3 y_3 + b_2 y_2^3 y_1 + b_3 y_3^3 y_2) + a_1 y_1^5 y_2 + a_2 y_2^5 y_3 + a_3 y_3^5 y_1 = 0.$$

Étudions les singularités de cette surface.

Le point A_4 est triple uniplanaire, le plan tangent étant $y_1 = 0$. L'intersection de la surface F_1^* avec le $y_1 = 0$ se compose actuellement des deux droites $y_1 = y_2 = 0$; $y_1 = y_3 = 0$. Ces deux droites sont simples pour F_1^*; le long de la première d'entre elles, F_1^* a, en chaque point, un contact 5-ponctuel avec le plan $y_1 = 0$.

La section de F_1^* par le plan $y_4 = 0$,

$$y_4 = 0, \qquad a_1 y_1^5 y_2 + a_2 y_2^5 y_3 + a_3 y_3^5 y_1 = 0,$$

ne possède pas de point multiple; donc F_1^* est dépourvue de courbes multiples.

Il résulte de l'analyse faite plus haut pour la surface F^* (n° 3) que F_1^* pourrait présenter, éventuellement, en dehors de A_4, les singularités suivantes :

a) Un point multiple provenant d'un point multiple de V_5^3 situé dans la variété V_3^4;

b) Un point double conique provenant d'un contact ordinaire des variétés V_5^3, V_3^4;

c) Un point triple provenant d'un contact du second ordre des variétés V_5^3, V_3^4.

On vérifie aisément que les dérivées par rapport aux x de l'équation de la variété V_5^3 définissant F_1 ne peuvent être nulles en un point de V_3^4, ce qu'exclut le premier cas *a*).

Le deuxième est sans intérêt pour nous, les points doubles coniques étant, comme on sait, sans influence sur les surfaces adjointes à une surface algébrique de S_3.

Pour éliminer le dernier cas, commençons par remarquer qu'aux points de coïncidence O_1, O_2, O_3 de I_7 correspondent, sur F_1^*, les points A_1, A_2, A_3, qui sont simples pour cette surface. Par conséquent, si F_1^* présente un point triple, elle en présente six autres.

Ces points ne se trouvent certainement pas dans les plans $y_1 = 0$, $y_4 = 0$. D'autre part, leurs coordonnées doivent annuler les dérivées secondes de l'équation de F_1^*. Or, si l'on prend la dérivée seconde de cette équation par rapport à y_4, on trouve $y_1^3 y_4 = 0$. Nous arrivons à une absurdité ; donc F_1^* ne possède pas de points triples en dehors de A_4.

De tout ceci, on conclut que les adjointes à la surface F_1^* se comportent de la même manière que les adjointes à F^*; par suite,

Les surfaces F_1 *et* F *ont les mêmes caractères invariants* $p^{(1)}$, p_a, p_g, P_2.

8. — Considérons le système linéaire d'hyperquadriques de S_6

$$\lambda_1 x_1 x_5 + \lambda_2 x_2 x_6 + \lambda_3 x_3 x_5 + \lambda_4 x_7^2 = 0.$$

Chaque hyperquadrique de ce système est transformée en elle-même par l'homographie H ; par conséquent, ces hyperquadriques découpent, sur F_1, des courbes Γ invariantes pour H. Ou encore, le système $|\Gamma|$ est composé au moyen de l'involution I_7. Il est facile de voir qu'on ne peut amplifier le système $|\Gamma|$ en lui conservant cette dernière propriété.

Les courbes Γ passent par les points O_1, O_2, O_3, unis pour I_7. Voyons de quelle manière :

L'hyperplan tangent à une quelconque des hyperquadriques considérées, en O_1, a pour équation $x_5 = 0$. Par conséquent, cet hyperplan ne contenant pas le plan tangent

$$x_2 = x_3 = x_4 = x_6 = 0$$

en O_1 à F_1, les courbes Γ ont un point simple en O_1. Elles ont même tangente $O_1 O_7$ en ce point, car cette droite est l'intersection du plan tangent à F_1 et de l'hyperplan $x_5 = 0$.

On vérifie de même que les courbes Γ passent simplement par O_2, O_3 en y touchant respectivement $O_2 O_7$, $O_3 O_7$.

Les sections hyperplanes de F_1 étant les courbes bicanoniques de cette surface, les hyperquadriques découperont des courbes quadricanoniques. Les courbes Γ ont donc le genre 31 et le degré virtuel 48. Le degré effectif de $|\Gamma|$ sera, ces courbes se touchant en trois points, égal à $48 - 3 \times 2 = 42 = 7 \times 6$.

Si nous rapportons projectivement les courbes Γ aux plans d'un espace S_3, nous obtiendrons donc une surface Φ, image de I_7 et cette surface sera d'ordre 6.

L'involution I_7 détermine, sur une courbe Γ, une involution cyclique d'ordre 7 ayant trois points de coïncidence O_1, O_2, O_3. Cette involution a donc le genre 4, et, par suite, les sections planes de la surface Φ auront le genre 4.

9. — Pour obtenir l'équation de la surface Φ dont les coordonnées homogènes ponctuelles par rapport à un tétraèdre de référence $B_1 B_2 B_3 B_4$ sont z_1, z_2, z_3, z_4, nous devons poser, d'après ce qui vient d'être dit,

$$\frac{z_1}{x_1 x_5} = \frac{z_2}{x_2 x_6} = \frac{z_3}{x_3 x_4} = \frac{z_4}{x_7^2}.$$

Moyennant ces formules, les équations de F_1 se transforment en l'équation

$$(a_1 z_1^2 z_2 + a_2 z_2^2 z_3 + a_3 z_3^2 z_1)^2 = z_1 z_2 z_3 z_4 (b_1 z_1 + b_2 z_2 + b_3 z_3 + z_4)^2$$

de la surface Φ.

Nous voyons donc que Φ est une surface irréductible, d'ordre 6, possédant trois droites doubles $B_1 B_4$ $(z_2 = z_3 = 0)$, $B_2 B_4$ $(z_3 = z_1 = 0)$, $B_3 B_4$ $(z_1 = z_2 = 0)$ et une cubique plane double

$$a_1 z_1^2 z_2 + a_2 z_2^2 z_3 + a_3 z_3^2 z_1 = 0, \qquad b_1 z_1 + b_2 z_2 + b_3 z_3 + z_4 = 0.$$

Les surfaces adjointes sont des quadriques devant passer par ces trois droites et cette cubique; elles sont donc inexistantes, et l'on a $p_g = 0$.

Les surfaces biadjointes doivent être du quatrième ordre et passer doublement par les courbes doubles de Φ; ces surfaces sont donc inexistantes, et l'on a $P_2 = 0$.

D'autre part, Φ étant l'image d'une involution appartenant à une surface régulière F_1, est régulière, et l'on a $p_a = p_g = 0$.

La surface Φ présente donc les caractères $p_a = P_2 = 0$, et est pas suite, rationnelle.

Observons d'ailleurs que les sections planes de Φ présentent six points doubles et sont donc de genre 4.

L'involution I_7, *déterminée sur* F_1 *par l'homographie* H. *est rationnelle.*

10. — Il importe d'observer que ce résultat subsiste lorsque l'involution I_7 est définie par le fait d'être marquée, sur une surface F, par une homographie présentant sept points unis. En effet, deux telles homographies, ayant les invariants égaux, sont projectivement identiques. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Une involution d'ordre 7, possédant trois points de coïncidence et déterminée par une homographie présentant sept points unis et sept seulement, sur une surface-intersection d'une hypersurface cubique de S_6 *et du cône projetant une surface de Véronèse d'un point extérieur, est rationnelle.*