ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

Extrait des *Bulletins de la Classe des sciences.* Séance du 3 décembre 1921, n° 12, pp. 694-702.

GÉOMÉTRIE. — Sur une involution rationnelle douée de trois points de coïncidence, appartenant à une surface algébrique de genre 3.

(Deuxième communication),

par LUCIEN GODEAUX, professeur à l'École militaire (*).

§ 3. — *La surface de Humbert comme surface* F *particulière.*

11. — Étant donnée une courbe A, de genre 3, nous appelons surface de Humbert la surface F_2 telle que, à un couple de points de A corresponde un point de F_2, et inversement, à un point de F_2 correspondent deux couples de points de A, formant un groupe canonique de cette courbe.

On peut prendre comme modèle projectif de la surface de Humbert F_2 une surface normale, simple, de S_6, d'ordre 12, dont les sections planes, de genre 10, sont les courbes bicanoniques de la surface (**). Nous continuerons à désigner par F_2 ce modèle projectif et nous allons montrer que c'est une surface F particulière.

La surface F_2 possède les genres $p^{(1)} = 4$, $p_a = p_g = 3$, $P_2 = 7, \ldots$ égaux à ceux de F. Elle possède de plus vingt-huit points doubles coniques.

12. — La surface F_2 est située sur une variété V_3^4, à trois dimensions et d'ordre 4, de S_6, dont les sections hyperplanes sont des surfaces de Véronèse.

(*) Présentée par M. Stuyvaert. — Voir *Bulletin* de novembre 1921, p. 653.

(**) Pour les propriétés de la surface F_2 utilisées ici, voir notre note : *Sur une surface algébrique considérée par M. G. Humbert.* (BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES, 1921.)

Désignons, en effet, par C les courbes canoniques de F_2. Elles sont d'ordre 6, de genre 4, en général dépourvues de points multiples, et forment un réseau $|C|$ de degré 3.

On sait qu'une courbe, sans point multiple, d'ordre 6 et de genre 4, est nécessairement située dans un S_3 et qu'elle est l'intersection d'une quadrique et d'une surface cubique. Les courbes C déterminent donc chacune un S_3 et une quadrique dans cet S_3.

D'autre part, les hyperquadriques de S_6 sont ∞^{27} et découpent, sur F_2, le système quadricanonique $|4C|$. Celui-ci a le degré 48, le genre 31 et, par suite, d'après le théorème de Riemann-Roch, la dimension 21. Il y a donc ∞^5 hyperquadriques de S_6 contenant F_2.

Considérons une courbe C, l'espace S_3 qui la contient et la quadrique Q de cet S_3 qu'elle détermine. Il y a ∞^5 hyperquadriques passant par cette courbe C et, par suite, ces ∞^5 hyperquadriques contiennent toutes la quadrique Q. Il y en a ∞^4 qui contiennent l'espace S_3. Nous voyons donc que les ∞^5 hyperquadriques passant par F_2 ont en commun une variété V lieu de ∞^2 quadriques.

Deux courbes C ont en commun trois points, et ces trois points sont en ligne droite. En effet, s'il en était autrement, les deux S_3 contenant les courbes C considérées auraient un plan en commun et, par suite, seraient contenus dans un S_4. Il y aurait donc ∞^1 hyperplans de S_6 rencontrant F_2 suivant deux courbes C; cela est impossible, puisque deux courbes C déterminent une courbe bicanonique de F_2, donc une section hyperplane unique de cette surface.

Les deux S_3 contenant deux courbes C ont donc une droite en commun, et cette droite est commune aux deux quadriques déterminées par les courbes C considérées. On en conclut que la variété V est le lieu de ∞^2 droites et est, par suite, une variété à trois dimensions V_3.

Considérons un hyperplan de S_6 ne contenant pas une courbe C, ce qui est toujours possible. Cet hyperplan rencontre V_3 suivant une surface contenant ∞^2 coniques ayant deux à deux un point commun. C'est donc une surface de Véronèse. Par suite, la variété V_3 est d'ordre 4. Nous la désignerons par V_3^4. Toutes les sections hyperplanes de V_3^4 sont des surfaces de Véronèse (éventuellement dégénérées en deux quadriques ayant une droite en commun).

13. — Nous allons montrer que la variété V_3^4, définie par cette propriété, est conique, c'est-à-dire que les ∞^2 droites, communes aux ∞^2 quadriques Q contenues dans V_3^4, passent par un point fixe.

Considérons trois espaces S_1', S_3'', S_3''' déterminés par trois courbes C quelconques. Soient d''' la droite commune à S_3', S_3'' ; d'' la droite commune à S_3''', S_3' ; d' la droite commune à S_3'', S_3'''. Les trois droites d', d'', d''' appartiennent donc à V_3^4.

S_3' et S_3'' sont situés dans un hyperplan S_5 de S_6. Cet hyperplan est rencontré, par S_3''', en un plan qui contient donc les droites d' et d''. Ces droites sont donc concourantes. De même, d''' rencontre d' et d''. Cette rencontre doit nécessairement avoir lieu au point commun à d' et d'', car autrement, ces trois droites seraient dans un plan nécessairement commun aux trois espaces S_3', S_3'', S_3''', ce qui est absurde.

Faisant varier les espaces S_3', S_3'', S_3''', on voit que les ∞^2 droites contenues dans V_3^4 concourent en un même point. En d'autres termes, V_3^4 est la projection d'une surface de Véronèse faite d'un point extérieur.

14. — Les hypersurfaces cubiques de S_6 sont en nombre ∞^{83}. Elles découpent, sur F_2, le système 6-canonique $|\,6\,C\,|$, de degré 108, de genre 64 et, par suite, de dimension 30. Par suite, il y a ∞^{52} hypersurfaces cubiques contenant F_2.

Parmi ces ∞^{52} hypersurfaces cubiques, il y en a ∞^{33} contenant la variété V_3^4. En effet, pour avoir l'équation d'une hypersurface cubique ne contenant pas V_3^4, il suffit de tenir compte des équations (1) de cette variété. Cette équation peut donc s'écrire en négligeant les termes contenant x_4^2, x_5^2, x_6^2, x_4x_5, x_5x_6, x_6x_4. Il reste 50 termes; donc il y a ∞^{49} hypersurfaces cubiques de S_6 ne contenant pas V_3^4 et, par suite, ∞^{33} contenant cette variété.

On en conclut qu'il y a ∞^{18} hypersurfaces cubiques contenant F_2 sans contenir V_3^4. Une de ces hypersurfaces rencontre V_3^4 suivant une surface d'ordre 12 coïncidant nécessairement avec F_2. Donc

La surface de Humbert F_2 est une surface F particulière.

La surface de Humbert possédant 28 points doubles coniques, l'hypersurface cubique V_5^3 qui la découpe sur V_3^4 doit toucher cette variété en 28 points; par suite,

La surface de Humbert est l'intersection d'une variété V_3^4 projetant une surface de Véronèse d'un point extérieur, et d'une hypersurface cubique touchant cette variété en 28 points.

§ 4. — *L'involution d'ordre 7 appartenant à la surface représentant les couples de points d'une quartique de Klein.*

15. — Considérons la quartique de Klein (plane, de genre 3) d'équation

$$\alpha_1^3\alpha_2 + \alpha_2^3\alpha_3 + \alpha_3^3\alpha_1 = 0. \tag{K}$$

Elle est transformée en elle-même par l'homographie de période 7 :

$$\frac{\alpha_1'}{\alpha} = \frac{\alpha_2'}{\varepsilon\alpha_2} = \frac{\alpha_3'}{\varepsilon^5\alpha_3}, \tag{h}$$

où ε est une racine primitive septième de l'unité.

Soit Ψ une surface algébrique représentant les couples de points de la quartique de Klein de manière qu'à un couple de points de la quartique corresponde un point de Ψ et, inversement, à un point de Ψ corresponde un seul couple de points de la courbe.

La surface Ψ possède deux transformations birationnelles en elle-même (*) :

L'une, T, involutive, fait correspondre entre eux les points de la surface qui correspondent à des couples de points de la quartique K formant un groupe canonique de celle-ci. Cette transformation engendre une involution d'ordre 2, possédant vingt-huit points de coïncidence, qui a pour image la surface de Humbert F_4 relative à la quartique K.

L'autre, θ, fait correspondre deux points représentant des couples de points de K transformés l'un dans l'autre par l'homographie h. Cette transformation a, de même que h, la période 7. Elle engendre une involution J_7.

Un point de coïncidence de J_7 représente un couple de points de K invariant pour h. Ceci peut se présenter si les points de ce couple sont distincts et invariants pour h, ou si ces points sont confondus en un seul point invariant pour h.

L'homographie h possède trois points Q_1, Q_2, Q_3 invariants; donc l'involution J_7 possède six points de coïncidence P_{11}, P_{22}, P_{33}, P_{12}, P_{23}, P_{31}. Nous supposerons que le point P_{ik} représente le couple Q_iQ_k $(i, k = 1, 2, 3)$.

La droite Q_1Q_3 est une tangente d'inflexion en Q_1 à la quartique K. Les droites Q_3Q_2, Q_2Q_1 jouissent des mêmes propriétés en Q_3, Q_2 respectivement. Par conséquent, T transforme P_{11} en P_{13}, P_{33} en P_{32}, P_{22} en P_{12}.

On vérifie aisément que les transformations T et θ sont permutables et que, par suite, les vingt-huit points invariants pour T forment quatre groupes de J_7.

16. — On sait que les courbes canoniques de Ψ sont les lieux des points qui représentent les couples de points de K,

(*) L. Godeaux, *Sur les Surfaces...* (loc. cit.)

alignés sur les points du plan de cette courbe. Il y a ∞^1 courbes canoniques dégénérées; elles correspondent au cas où le point du plan de K appartient à cette courbe. Désignons par D une courbe qui représente les couples de points de K contenant un point fixe de cette courbe, par D' la courbe que T lui fait correspondre. On sait que la courbe $D + D'$ est une courbe canonique et que ces courbes engendrent des systèmes $\{D\}$, $\{D'\}$ de degré 1 et d'indice 2 (*).

La courbe D_1, lieu des points qui représentent les couples de points de K contenant Q_1, et sa transformée D'_1 sont invariantes pour θ. D_1 passe par P_{11}, P_{12} et P_{13}; D'_1 passe par P_{11}, P_{13} et P_{22}.

Définissons de même les courbes D_2, D'_2, D_3, D_3 en relation avec les points Q_2, Q_3. D_2 passe par P_{22} et y touche D_1; elle passe également par P_{12}, P_{23}. D'_2 passe P_{12} en y touchant D_1, par P_{22} et par P_{33}. D_3 passe par P_{33} en y touchant D'_2, par P_{23} et par P_{13} en y touchant D'_1. Enfin, D'_3 touche D_1 en P_{11}, D_2 en P_{23} et passe par P_{33}.

Considérons le modèle bicanonique F_4 de la surface de Humbert relative à la quartique K, situé dans S_6 : Puisque θ et T sont permutables et que F_4 représente l'involution engendrée sur Ψ par T, il correspond à θ une transformation de F_4 en elle-même, de période 7 et cette transformation permute entre elles les courbes bicanoniques, c'est-à-dire les sections hyperplanes de F_4. Par suite, cette transformation est une homographie H_1, de période 7. Nous allons démontrer, en nous basant sur les résultats des paragraphes 2 et 3, que l'involution I'_7, engendrée sur F_4 par H_1, est rationnelle.

17. — Nous savons tout d'abord (paragraphe 3) que F_4 est une surface F particulière. Il nous suffira de démontrer que H_1

(*) Voir à ce sujet : F. Severi, *Sulle superficie che rappresentano le coppie di punti di una curva algebrica*. (Atti R. Accad.) Torino, 1903. — *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e sopra certe classi di superficie*. (Mem. R. Accad.) Torino, 1903.

possède sept points invariants et sept seulement, et que trois de ces points se trouvent sur F_4.

Tout d'abord, I'_7 ne possède que trois points de coïncidence : R_1, qui correspond à P_{11} et P_{13}; R_2, qui correspond à P_{22} et P_{21}; R_3, qui correspond à P_{33} et P_{32}.

Au couple de courbes D_1, D'_3 correspond, sur F_4, une courbe canonique C_1, de genre 3, ayant un point double en R_2 et un point simple en R_3. A D_2, D'_2 correspond une courbe canonique C_2 passant doublement par R_3 et simplement par R_1. A D_3, D'_3 correspond une courbe canonique C_3 passant doublement par R_1 et simplement par R_2. De plus, C_1 touche une branche de C_2 en R_3, C_2 une branche de C_3 en R_1, C_3 une branche de C_1 en R_3.

La courbe C_1, d'ordre 6 et de genre 3, ayant un point double R_2 et invariante pour H_1, est située dans un S'_3 nécessairement invariant pour H_1. Il en résulte que les tangentes à C_1 en R_3, certainement situées dans S'_3, sont transformées en elles-mêmes par H_1. Ces tangentes ne peuvent être des lieux de points invariants pour H_1, car alors, les plans de S'_3 passant par l'une d'elles au moins seraient transformés en eux-mêmes par H_1 et ils devraient, par suite, découper, sur C_1, des groupes de points transformés en eux-mêmes par H_1. Cela est impossible, puisque C_1 est d'ordre 6, inférieur à la période 7 de H_1.

On en conclut qu'il y a, sur chacune de ces tangentes, un second point, et un seul, invariant pour H_1. Nous désignerons par R'_3 celui de ces points situé sur la tangente commune à C_1 et à C_2; par R_6 l'autre.

D'une manière analogue, on trouverait deux points R'_1, R_5 invariants pour H_1 dans l'espace S''_3 contenant C_2, deux points R'_2, R_4 dans l'espace S'''_3 contenant C_3.

Il résulte de l'analyse faite au § 2 de la variété V_3^4 contenant F_4 que les droites $R_1R'_1$, $R_2R'_2$, $R_3R'_3$ appartiennent à cette variété et concourent en un même point, R_7, nécessairement invariant pour H_1. Cette homographie ne pouvant posséder que sept points invariants isolés, il faut nécessairement que R'_1, R'_2, R'_3 coïncident avec R_7.

Nous voyons donc que H_1 possède sept points invariants isolés, dont trois se trouvent sur F_4. Par suite (§ 2), l'involution I'_7 est rationnelle.

L'involution d'ordre 14, *engendrée sur* Ψ *par* T *et* θ, *est rationnelle.*

18. — Soit maintenant Ψ^* une surface image de l'involution J_7 appartenant à la surface Ψ. Puisque T et θ sont permutables, il correspond à T une transformation birationnelle involutive T^* de Ψ^* en elle-même. Cette transformation T^* engendre une involution I_2, d'ordre 2, dont une surface image Φ_1 est en même temps une surface image de l'involution I'_7 appartenant à F_4.

L'involution I_2 possède quatre points de coïncidence, correspondant aux quatre groupes de J_7 formés avec les 28 points invariants pour T sur Ψ.

Nous venons de démontrer que l'involution I'_7 et, par suite, la surface Φ_1 sont rationnelles. Entre la surface rationnelle Φ_1 et la surface Ψ^*, il existe donc une correspondance (1, 2) présentant quatre coïncidences sur Ψ^*, c'est-à-dire quatre points de diramation sur Φ_1.

Transformons la surface Φ_1 en un plan (birationnellement). Alors, aux quatre points de diramation correspondent quatre courbes rationnelles que nous pouvons toujours supposer être des droites. Il en résulte que Ψ^* se transforme en un plan double ayant une courbe de diramation formée de quatre droites. La surface Ψ^* est donc rationnelle ou réglée (*). Ce dernier cas ne peut se représenter, car il résulte d'une formule sur les surfaces

(*) Castelnuovo et Enriques. *Sulle condizioni di razionalità dei piani doppi.* (Rend. Circolo Matem di Palermo. 1900.)

doubles (*) qu'entre le genre arithmétique $\pi_a = 0$ de Φ_1 et celui p_a de Ψ^*, nous avons

$$12 p_a = 24 \pi_a - 3 \,.\, 4 + 12;$$

d'où $p_a = 0$. Donc

La surface qui représente les couples de points d'une quartique de Klein

$$x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1 = 0$$

possède une involution rationnelle d'ordre 7, présentant six points de coïncidence.

(*) L. Godeaux. *Mémoire sur les surfaces doubles douées d'un nombre fini de points de diramation.* (Annales de la Fac. des Sciences de Toulouse, 1914.)