Bulletin de la Classe des sciences

Détermination de la structure d'un point uni d'une involution cyclique appartenant à une surface algébrique

Lucien Godeaux

Résumé

Détermination de la structure d'un point uni d'une involution cyclique d'ordre premier p = 9v² + 3v + 1, appartenant à une surface algébrique, auquel sont attachés les nombres a = 3v² + 2v -f 1 et β = 9v² + 2.

Détermination de la structure d'un point uni d'une involution cyclique appartenant à une surface algébrique

(première note)

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie

Résumé. — Détermination de la structure d'un point uni d'une involution cyclique d'ordre premier $p = 9\nu^2 + 3\nu + 1$, appartenant à une surface algébrique, auquel sont attachés les nombres $\alpha = 3\nu^2 + 2\nu + 1$ et $\beta = 9\nu^2 + 2$.

Soit F une surface algébrique contenant une involution cyclique I d'ordre premier p n'ayant qu'un nombre fini de points unis, simples pour la surface. On peut classer ces points unis en deux espèces suivant que la transformation birationnelle de F en soi génératrice de l'involution détermine l'identité dans le voisinage du point uni (première espèce) ou détermine une involution binaire (seconde espèce). Si 0 est un point uni de seconde espèce, il y a en ce point deux tangentes à F unies a et b. Considérons un système linéaire $|C|$ privé de points-base et appartenant à l'involution I. Les courbes C passant par 0 acquièrent en ce point une certaine multiplicité et ont comme tangentes a et b. Sur une courbe C passant par 0, ce point est l'origine de certaines branches dont deux sont linéaires, l'une tangente à a et l'autre à b. Une de ces branches contient $\alpha - 1$ points infiniment voisins successifs de 0 et ces points appartiennent à toutes les courbes C passant par 0. De même l'autre branche contient $\beta - 1$ points infiniment voisins successifs de 0 appartenant à toutes les courbes C passant par 0. La connaissance des nombres α, β suffit pour déterminer la structure du point uni 0 et du point de diramation correspondant sur une surface image de l'involution. D'ailleurs $\alpha\beta - 1$ est multiple de p.

Dans des travaux antérieurs (¹), nous avons eu à considérer des involutions cycliques d'ordre $p = 9\nu^2 + 3\nu + 1$ dont les points unis étaient caractérisés par

$$\alpha = 3\nu^2 + 2\nu + 1, \ \beta = 9\nu^2 + 2.$$

L'étude complète de la structure de ces points n'était pas nécessaire pour notre objet. C'est cette étude que nous nous proposons de faire dans cette note et dans celles qui lui feront suite. La structure du point uni considéré présente un certain intérêt, elle diffère complètement de celle des points unis que nous avons eu l'occasion d'étudier jusqu'à présent.

Dans l'étude actuelle, nous supposerons connus les résultats que nous avons exposés dans notre *Théorie des involutions cycliques* qui vient d'être citée et nous en adopterons les notations.

1. Soit F une surface algébrique normale dans un espace S_r à r dimensions transformée en soi par une homographie H de période p, possédant p axes ponctuels $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{p-1}$ de dimensions respectives $r_0, r_1, \ldots, r_{p-1}$, dont le premier seul rencontre la surface, en un nombre fini de points, simples. Sur F, H engendre une involution I d'ordre p possédant un nombre fini de points unis, les points de rencontre avec σ_0.

Désignons par $|C|$ le système des sections hyperplanes de F et par C_i les courbes découpées par les hyperplans passant par les axes de H sauf par σ_i.

Le système $|C_0|$ est dépourvu de points-base et comme r et r_0 peuvent être choisis aussi grands qu'on le veut, en rapportant projectivement les courbes C_0 aux hyperplans d'un espace à r_0 dimensions, on obtient une surface Φ, normale, image de l'involution I. Nous désignerons par Γ_i les courbes qui correspondent sur Φ aux courbes C_i. Elles forment des systèmes complets et $|\Gamma_0|$ est le système des sections hyperplanes de Γ.

Soit 0 un point uni de l'involution I que nous supposerons de

(¹) *Sur quelques surfaces algébriques representant des involutions cycliques* (Bulletin de l'Académie royale de Belgique, pp. 819-835, 938-949, 1106-1119). *Construction d'une surface algébrique dont le système canonique possède des composantes fixes* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1952, pp. 49-56). *Théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications* (Rome, Editions Cremonese, 1963).

seconde espèce, c'est-à-dire que le plan tangent à F en 0 rencontre en un point deux espaces $\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_{p-1}$. Si nous désignons par x_0 x_1,x_2 les coordonnées des points du plan tangent, $x_1 = x_2 = 0$ étant celles du point 0, nous supposerons que dans ce plan, H détermine une homographie qui peut être représentée par

$$x'_0 : x'_1 : x'_2 = x_0 : \varepsilon x_1 : \varepsilon^\alpha x_2,$$

ou par

$$x'_0 : x'_1 : x'_2 = x_0 : \eta^\beta x_1 : \eta x_2,$$

où ε et $\eta = \varepsilon^\alpha$ sont des racines primitives d'ordre p de l'unité et où l'on a

$$p = 9\nu^2 + 3\nu + 1,\ \alpha = 3\nu^2 + 2\nu + 1,\ \beta = 9\nu^2 + 2,$$

Nous supposerons que ν est choisi de telle sorte que p soit premier.

Les courbes C_0 passant par 0 acquièrent en ce point certaines multiplicités et nous désignerons par $|C^1|, |C^2|, \ldots, |C^n|, |C^{n+1}|$ les systèmes formés par ces courbes et ayant en 0 des multiplicités croissantes, où $n = 3\nu(3\nu + 1) : 2$. Les courbes de ces systèmes ont en 0 des tangentes fixes qui coïncident avec $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$ sauf le système $|C^{n+1}|$ dont les courbes ont en 0 un point multiple d'ordre p à tangentes variables.

Au point O correspond sur Φ un point de diramation O'. Nous désignerons par $|\Gamma^1|, |\Gamma^2|, \ldots, |\Gamma^n|, |\Gamma^{n+1}|$ les systèmes de courbes qui correspondent sur Φ aux systèmes $|C^1|, |C^2|, \ldots, |C^n|, |C^{n+1}|$. Nous désignerons par $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n, \Phi_{n+1}$ les surfaces projections de Φ ayant pour sections hyperplanes les courbes $\Gamma^1, \Gamma^2, \ldots, \Gamma^n, \Gamma^{n+1}$.

2. Les multiplicités en 0 des courbes $C^1, C^2, \ldots, C^n$ dépendent des solutions en nombres entiers positifs des congruences

$$\lambda + \alpha\mu \equiv 0,\ \mu + \beta x \equiv 0, \qquad \text{(mod. p)}$$

telles que $\lambda + \mu$ soit inférieur à p. D'une manière précise la multiplicité des courbes C_i en 0 dépend de la solution λ_i, μ_i.

La solution des congruences donnant la valeur minimum pour $\lambda + \mu$ est

$$\lambda_1 = 1,\ \mu_1 = 3\nu - 1.$$

On a

$$\lambda_1 + \alpha\mu_1 = \nu p,\ \mu_1 + \beta\lambda_1 = p$$

et le point 0 est ce que nous avons appelé un point de seconde catégorie dans notre ouvrage cité plus haut. En reprenant les notations de celui-ci (n° 47), nous avons $a = 2$, $b = 3\nu^2 - \nu - 1$,

$$r(3\nu^2 - \nu - 1) < 3\gamma^2 + 2\nu + 1 < (r + 1)(3\nu^2 - \nu - 1),$$

d'où $r = 1$. Ensuite

$$m(3\nu + 2) < 3\nu^2 - \nu - 1 < (m + 1)(3\nu + 2)$$

d'où $m = \nu - 1$.

Il en résulte que les courbes C^1 ont la multiplicité $\nu + 2$ en 0, une tangente étant confondue avec $x_2 = 0$ et les autres avec $x_1 = 0$. Elles passent une fois par les points $(\alpha,1)$, $(\alpha,2)$, ..., $(\alpha,9\nu^2 + 1)$, $3\nu - 1$ fois par les points $(\beta,1)$, $(\beta,2)$, ..., $(\beta,\nu - 1)$, 2ν fois par le point (β,ν), 2 fois par les points $(\beta,\nu + 1)$, ..., $(\beta,3\nu^2 + \nu)$, $\nu - 1$ fois par les points $(\beta,\nu,1)$, $(\beta,\nu,1,1)$. Le point de diramation $0'$ est multiple d'ordre $\nu + 2$ pour la surface Φ, le cône tangent se décomposant en un plan, un cône d'ordre $\nu - 1$ et un cône du second ordre.

Sur la surface Φ_1, il correspond aux domaines des points $(\alpha,9\nu^2 + 1)$, $(\beta,\nu,1,1)$, $(\beta,3\nu^2 + 2\nu)$ respectivement une droite γ_1, une courbe rationnelle τ d'ordre $\nu - 1$ et une conique ρ_1. On a

$$\Gamma \equiv \Gamma^1 + \gamma_1 + \tau + \rho_1,$$

ce qui montre que γ_1 est de degré virtuel -2, τ de degré virtuel $-(\nu + 1)$ et ρ_1 de degré virtuel -3.

3. Nous pouvons trouver des solutions des congruences en supposant que les courbes correspondantes passent toujours deux fois par $(\beta,3\nu^2 + \nu)$ mais $\nu - 2$ fois, $\nu - 3$ fois par le point $(\beta,\nu,1,1)$.

Supposons qu'une courbe C^x passe $\nu - 2$ fois par le point $(\beta,\nu,1,1)$, donc $\nu - 2$ fois par le point (β,ν_1), $2\nu - 2$ fois par le point (β,ν), $3\nu - 4$ fois par les points $(\beta,\nu - 1)$, ..., $(\beta,1)$. On a alors $\mu = 3\nu - 4$ et $\lambda = 3\nu + 3$. Nous désignerons ces nombres par λ'_1,μ'_1. Les courbes C correspondantes passent $6\nu - 1$ fois par 0.

Plus généralement, supposons que les courbes envisagées passent $\nu - i - 1$ fois par $(\beta,\nu,1,1)$. Un raisonnement analogue montre que l'on est conduit à la solution

$$\lambda'_i = 3i\nu + 2i + 1, \ \mu'_i = 3\nu - 3i - 1$$

qui donne des courbes passant $3\nu - 3i - 1$ fois par $(\beta,1), \dots, (\beta,\nu - 1)$, $2\nu - 2i$ fois par (β,ν), deux fois par $(\beta,\nu + 1). \dots, (\beta,3\nu^2 + \nu)$ et $\nu - i - 1$ fois par les points $(\beta,\nu,1), (\beta,\nu,1,1)$. Ces courbes ont la multiplicité $3(i + 1)\nu - i$ au point 0.

La valeur maximum de i est évidemment $\nu - 1$. On a alors $\mu' = 2$ et $\lambda' = 3\nu^2 - \nu - 1$. Les courbes correspondantes passent deux fois par $(\beta,1), \dots, (\beta,3\nu^2 + \nu)$ mais ne passent plus par $(\beta,\nu,1), (\beta,\nu,1,1)$. Elles ont la multiplicité $3\nu^2 - \nu + 1$ en 0.

4. On peut obtenir d'autres solutions des congruences en prenant des multiplicités des solutions précédentes ou des sommes de ces solutions.

On voit par exemple que $\lambda = k, \mu = 3k\nu - k$ est une solution des congruences, les courbes correspondantes ont en 0 la multiplicité $3k\nu$.

On peut également considérer les solutions

$$\lambda'_i + \lambda'_k, \ \mu'_i + \mu'_k.$$

Les multiplicités des courbes $C^1, C^2, \dots$ en 0 vont en croissant. On voit ainsi que les courbes C^2 sont données par $\lambda_2 = \lambda'_1, \mu_2 = \mu'_1$.

On a ensuite $\lambda_3 = \lambda''_2, \mu_3 = \mu''_2$ et les courbes C^3 ont la multiplicité 6ν en 0.

Les courbes C^4 correspondent aux valeurs $\lambda_4 = \lambda'_2 = 6\nu + 5$, $\mu_4 = \mu'_2 = 3\nu - 7$.

Les courbes C^5 correspondent aux valeurs $\lambda_5 = \lambda_1 + \lambda'_1 = 3\nu + 4$, $\mu_5 = \mu_1 + \mu'_1 = 6\nu - 5$ et ont la multiplicité $9\nu - 1$ en 0.

Les courbes C^6 correspondent aux valeurs $\lambda_6 = 3, \mu_6 = 9\nu - 3$.

D'une manière générale, on voit qu'aux solutions λ'_i, μ'_i correspondent des courbes ayant la multiplicité $3\nu(i + 1) - i$ en 0 et qu'aux nombres $\lambda''_{i+1}, \mu''_{i+1}$ correspondent des courbes ayant la multiplicité $3(i + 1)\nu$ en 0. Entre ces deux systèmes de courbes se trouvent $i - 1$ systèmes dont les courbes ont la multiplicité $3(i + 1)\nu - i + 1$, $3(i + 1)\nu - i + 2, \dots, 3(i + 1)\nu - 1$ en 0. Il est facile de voir que ces systèmes correspondent aux valeurs $\lambda_1 + \lambda'_{i-1}, \mu_1 + \mu'_{i-1}, 2\lambda_1 + \lambda'_{i-2}$ $2\mu_1 + \mu'_{i-1}, \dots, (i - 1)\lambda_1 + \lambda'_1, (i - 1)\mu_1 + \mu'_1$.

Le système qui correspond à λ'_i, μ'_i a le numéro $(i^2 - i + 2) : 2$.

En particulier, le système correspondant à $\lambda = 3\nu^2 - \nu - 1, \mu = 2$ que nous avons rencontré plus haut porte le numéro $(\nu^2 - 3\nu + 4) : 2$.

Les courbes des systèmes envisagés jusqu'à présent passent doublement par le point $(\beta, 3\nu^2 + 2\nu)$ et par conséquent, sur les surfaces $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_k$ où $k = (\nu^2 - 3\nu + 4) : 2$ existe une conique ρ_1.

5. Le système $| kC |$ se comporte comme le système $| C |$ aux points unis de l'involution. Il contient un système privé de points-base appartenant à l'involution et que nous représenterons par $| (kC)_0 |$. Les courbes du système $| (pC)_0 |$ passant par 0 ont le même comportement que les courbes C^1. On peut les représenter par $C^1 + ((p-1)C)_0$.

Les courbes du système $| (pC)_0 |$ coupent le plan tangent en 0 à F suivant les courbes

$$\begin{aligned} l_0 x_0^p + l_1 x_0^{p-3\nu} x_1 x_2^{3\nu-1} + l_2 x_0^{p-6\nu+1} x_1^{3\nu+3} x_2^{3\nu-4} + l_3 x_0^{p-6\nu-2} x_1^2 x_2^{6\nu-2} \\ + l_4 x_0^{p-9\nu+2} x_1^{6\nu+5} x_2^{3\nu-\nu} + l_5 x_0^{p-9\nu-1} x_1^{3\nu+4} x_2^{6\nu-5} \qquad (1) \\ + l_6 x_0^{p-9\nu} x_1^3 x_2^{9\nu-3} + l_7 x_0^{p-12\nu-3} x_1^{9\nu+7} x_2^{3\nu-10} + \cdots + l_{n+1} x_1^p + l_{n+2} x_2^p = 0 \end{aligned}$$

Le comportement en 0 des courbes C^1 est le même que celui des courbes précédentes pour $l_0 = 0$. Celui des courbes C^2 sera le même que celui des courbes précédentes pour $l_0 = l_1 = 0$.

Opérons la transformation

$$x_0 : x_1 : x_2 = y_0^2 : y_1 y_2 : y_0 y_2. \qquad (T_1)$$

On obtient une courbe qui, après simplification par $y_2^{6\nu-1}$, a pour équation

$$\begin{aligned} l_2 y_0^{2p-9\nu-2} y_1^{3\nu+3} + l_3 y_0^{2p-6\nu-2} y_1^2 y_2 + \cdots \\ + l_{n+1} y_1^p y_2^{p-6\nu+1} = 0. \end{aligned}$$

Il en résulte que le point $(\alpha,1)$ est triple pour les courbes C^2, le point $(\alpha,2)$ double et le point $(\alpha,1,1)$ simple. On en déduit que les courbes C^2 passent deux fois par les points $(\alpha,2), (\alpha,3), \ldots, (\alpha,\alpha_1)$ où $\alpha_1 = (9\nu^2 - 3\nu) : 2$, une fois par les points $(\alpha,\alpha_1 + 1)$, $(\alpha,\alpha_1 + 1,1)$, et enfin une fois par les points $(\alpha,1,1), (\alpha,1,2), \ldots, (\alpha, 1, 3\nu)$.

Aux domaines des points $(\alpha,\alpha_1 + 1,1)$ et $(\alpha,1,3\nu)$ correspondent sur la surface Φ_2 une droite γ_2 et une droite γ_n, ces deux droites se rencontrant en un point. La surface Φ_2 est la projection de Φ_1 à partir du point $0'_1$ commun à γ_1 et à τ, point qui est double biplanaire pour Φ_1.

Sur la surface Φ_2 on a en outre une conique ρ_1 et une courbe τ d'ordre $\nu - 2$.

Si N est l'ordre de la surface Φ, les surface Φ_1 et Φ_2 sont respectivement d'ordres $N - \nu - 2$ et $N - \nu - 4$.

6. Recherchons maintenant la singularité en 0 des courbes C^3, c'est-à-dire celle des courbes (1) où l'on pose $l_0 = l_1 = l_2 = 0$.

Les courbes C^3 passent 6ν fois par 0, deux fois par les points $(\alpha,1)$ $(\alpha,2), \ldots, (\alpha,\alpha_1)$ et une fois par les points $(\alpha,\alpha_1 + 1), (\alpha,\alpha_1 + 1,1)$.

Opérons sur l'équation (1) la transformation

$$x_0 : x_1 : x_2 = y_0^2 : y_0 y_1 : y_1 y_2. \qquad (T_2)$$

Nous obtenons, après avoir divisé par $y_1^{6\nu}$ l'équation

$$l_3 y_0^{2p-12\nu+2} y_2^{6\nu-2} + l_4 y_0^{2p-12\nu+9} y_1^{3\nu-2} y_2^{3\nu-y} + \cdots$$
$$+ l_{n+1} y_0^p y_1^{p-6\nu} = 0.$$

On en déduit que les courbes C^3 passent $6\nu - 9$ fois par le point $(\beta,1)$, Elles passent en outre deux fois par les points $(\beta,3\nu^2 + \nu), \ldots, (\beta,\nu + 1)$, $\nu - 3$ fois par les points $(\beta,\nu,1,1)$, $(\beta,\nu,1)$,$2\nu - 4$ fois par (β,ν), $3\nu - 7$ fois par les points $(\beta,\nu - 1), \ldots, (\beta,2)$.

On peut arriver à ce résultat par une autre méthode.

Les courbes C^3 passent deux fois par les points $(\beta,\nu + 1), \ldots, (\beta,3\nu^2 + \nu)$, donc la somme des multiplicités des points $(\beta,1), \ldots, (\beta,\nu)$ pour ces courbes doit être égale à $3\nu^2 - 5\nu + 1$.

Supposons que les courbes C^3 passent $\nu - 2$ fois par les points $(\beta,\nu,1,1)$. $(\beta,\nu,1)$ et qu'elles passent $6\nu - 2$ fois par les points $(\beta,1), \ldots, (\beta,x')$, $3\nu - 4 + y$ fois par $(\beta,x' + 1)$. Alors, elles passent $2\nu - 2$ fois par (β,ν) et on doit avoir $(3\nu + 2)x' + y = -1$, ce qui est absurde, Les courbes C^3 doivent donc passer $\nu - 3$ fois par les points $(\beta,\nu,1,1)$ $(\beta,\nu,1)$. Dans ces conditions, elles passent $2\nu - 4$ fois par (β,ν) $3\nu - 7$ fois par $(\beta,\nu - 1)$. Supposons qu'elles passent $6\nu - 2$ fois par $(\beta,1), \ldots, (\beta,x')$, $3\nu - 7x + y$ fois par $(\beta,x + 1)$, $3\nu - 7$ fois par les points suivants. On doit avoir

$$(3\nu + 5)x' + y = 3\nu - 2,$$

d'où $x' = 0$ et $y = 3\nu - 2$. Les courbes C^3 passent donc bien $6\nu - 9$ fois par $(\beta,1)$ et $3\nu - 7$ fois par $(\beta,2)$.

D'autre part, les courbes C^3 ont $6\nu - 2$ tangentes confondues avec $x_1 = 0$, donc elles doivent passer $6\nu - 2 - (6\nu - 9) = 7$ fois par le point $(\beta,1,1)$. Elles passent ensuite par une suite de points $(\beta,1,1), \ldots$

qui se termine en un point simple pour les courbes car p étant premier, les nombres $3\nu - 2$ et 7 sont premiers entre eux. Nous désignerons ce point par $(\beta,1,1,\dots,x)$.

Sur la surface Φ_3, il correspond aux domaines des points $(\alpha,\alpha_1 + 1,1)$ et $(\beta,1,1,\dots,x)$ respectivement deux droites γ_2 et ρ_2. On a en outre sur cette surface une conique ρ_1 et une courbe τ d'ordre $\nu - 3$.

La surface Φ_3 est la projection de la surface Φ_2 à partir d'un point $0'_2$ commun à la droite ν_2 et à la courbe τ. On en conclut que sur la surface Φ_2, τ rencontre γ_n mais ne rencontre pas γ_2. Le point $0'_2$ est simple pour la surface Φ_2 et la droite ρ_2 est exceptionnelle.

Sur la surface Φ_2, on a

$$\Gamma^1 \equiv \Gamma^2 + \gamma_n + \gamma_2$$

et par suite

$$\Gamma \equiv \Gamma^2 + \rho_1 + \tau + \gamma_n + \gamma_2 + \gamma_1,$$

ce qui montre que le degré virtuel de γ_n est -3 et celui de γ_2, -2.

7. Envisageons maintenant les courbes C^4 qui ont le même comportement en 0 que les courbes (1) où l'on pose $l_0 = l_1 = l_2 = l_3 = 0$.

Effectuons sur l'équation la transformation T_1. On voit que les courbes C^4 passent 5 fois par le point $(\alpha,1)$, 3 fois par $(\alpha,2)$ et 2 fois par $(\alpha,1,1)$, le terme de degré le plus élevé en y_0 ayant le coefficient l_6.

Observons tout de suite que si l'on fait $l_4 = 0$, dans l'équation (1), on trouve que les courbes C^5 passent quatre fois par le point $(\alpha,1)$, trois fois par le point $(\alpha,2)$ et une fois par le point $(\alpha,1,1)$.

Les courbes C^4 passent $9\nu - 2$ fois par 0,5 fois par $(\alpha, 1)$, trois fois par $(\alpha, 2), \dots, (\alpha, \alpha_2)$, où $\alpha_2 = 3\nu^2 - 2\nu$, une fois par le point $(\alpha, \alpha_2 + 1)$ et par les points $(\alpha, \alpha_2 + 1, 1)$, $(\alpha, \alpha_2 + 1, 2)$ et deux fois par les points $(\alpha, 1, 1), \dots, (\alpha, 1, 3\nu)$.

Les courbes C^4 passent également $3\nu - 7$ fois par $(\beta, 1), \dots, (\beta, \nu - 1)$, $2\nu - 4$ fois par (β, ν), deux fois par $(\beta, \nu + 1, \dots, (\beta, 3\nu^2 + \nu)$ et enfin $\nu - 3$ fois par $(\beta, \nu, 1)$, $(\beta, \nu, 1, 1)$.

Sur la surface Φ_4, il correspond au domaine du point $(\alpha,\alpha_2 + 1,2)$ une droite γ_3 et au domaine du point $(\alpha,1,3\nu)$ une conique qui correspond à la droite γ_n et que nous désignerons encore par γ_n. Il y a outre ces courbes, une courbe τ d'ordre $\nu - 3$ et la conique ρ_1.

Le nombre des points d'intersection de deux courbes C^4 absorbés en 0 est $(\nu + 8)p$ de sorte que la surface Φ_4 est d'ordre $N - \nu - 8$. Cette surface est la projection de Φ_3 à partir d'un point 0_3 commun aux droites ρ_2 et γ_2. Ce point $0'_3$ est triple pour Φ_4, le cône tangent projetant la droite γ_3 et la conique γ_n.

Sur Φ_3 on a $\Gamma^2 \equiv \Gamma^3 + \rho_2$, ce qui montre que ρ_2 a le degré virtuel -1 et est bien exceptionnelle. Sur Φ_3, on a

$$\Gamma \equiv \Gamma^4 + \rho_1 + \rho_2 + \tau + 2\gamma_n + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3.$$

8. Les courbes C^5 passent $9\nu - 1$ fois par 0 et d'après ce que l'on a vu plus haut, quatre fois par $(\alpha,1)$, trois fois par $(\alpha,2), \ldots, (\alpha,\alpha_2)$, une fois par $(\alpha,\alpha_2 + 1)$, $(\alpha,\alpha_2 + 1,1)$, $(\alpha,\alpha_2 + 1,2)$, enfin une fois par les points $(\alpha,1,1), \ldots, (\alpha,1,3\nu)$.

Supposons que les courbes C^5 passent encore $\nu - 3$ fois par $(\beta,\nu,1,1)$ et qu'elles passent $6\nu - 5$ fois par les points $(\beta,1), \ldots, (\beta,x)$, $3\nu - 7 + y$ fois par $(\beta,x + 1)$, $3\nu - 7$ fois par $(\beta,x' + 2)$ et comme les courbes C^4 aux points suivants. On obtient, en exprimant que la somme des multiplicités de ces points est égale à $9\nu^2 - 6\nu + 2$, l'équation $(3\nu + 2)x' + y = -1$, ce qui est absurde. Comme les courbes C^7 passent $\nu - 4$ fois par $(\beta,\nu,1,1)$, les courbes C^5 passent le même nombre de fois par ce point. En répétant le raisonnement précédent, $3\nu - 7$ étant remplacé par $3\nu - 10$, on obtient l'équation

$$(3\nu + 5)x' + y = 3\nu - 2,$$

d'où $x' = 0$ et $y = 3\nu - 2$. Les courbes C^5 passent donc $6\nu - 12$ fois par $(\beta,1)$ et $3\nu - 10$ fois par le point $(\beta,2)$ et les suivants.

Comme on a $\mu = 6\nu - 5$, les courbes C' doivent passer $6\nu - 5 - (6\nu - 12) = 7$ fois par le point $(\beta,1,1)$ et par les points $(\beta,1,1)$, ... Comme p étant premier, par suite premier avec 7, on arrivera à la conclusion que les courbes C^5 passent simplement par le point $(\beta,1,1,\ldots x)$, uni de première espèce pour l'involution. Ce point appartient également aux courbes C^3.

Sur la surface Φ_5, il correspond au domaine du point $(\beta,1,1,\ldots,x)$ la droite ρ_2 et on a de plus sur cette surface une droite γ_n, une droite γ_3, une courbe τ d'ordre $\nu - 4$ et une conique ρ_1. Cette surface est la projection de Φ_4 à partir du point 0_4 commun à la courbe τ et à la conique γ_n. Ce point est simple pour la surface Φ_4 et Φ_5 est d'ordre $N - \nu - 9$.

On a $\Gamma^4 \equiv \Gamma^5 + \rho_1$, d'où

$$\Gamma \equiv \Gamma^5 + \rho_1 + 2\rho_2 + \tau + 2\gamma_n + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3.$$

9. Les courbes C^6 passent 9ν fois par 0 et trois fois par les points $(\alpha,1)$, $(\alpha,2)$, ..., (α,α_2), une fois par les points $(\alpha,\alpha_2 + 1)$, $(\alpha,\alpha_2+1,1)$, $(\alpha,\alpha_2 + 1,2)$.

Le point $(\beta,\nu,1,1)$ est multiple d'ordre $\nu - 4$ pour les courbes C^6. Comme on a $\mu = 9\,\nu - 3$, nous supposerons que les points $(\beta,1)$, ..., (β,x') sont multiples d'ordre $9\nu - 3$, le point $(\beta,x' + 1)$ multiple d'ordre $3\nu - 10 + y$, les points $(\beta,x' + 2)$, ..., $(\beta,\nu - 1)$ multiples d'ordre $3\nu - 10$, le point (β,ν) multiple d'ordre $2\nu - 6$. En reprenant le raisonnement fait plus haut, on obtient la relation

$$(6\nu + 7)x' + y = 3\nu - 3,$$

d'où $x' = 0$ et $y = 3\nu - 3$. Les courbes C^6 passent donc $6\nu - 13$ fois par $(\beta,1)$ et $3\nu - 10$ fois par $(\beta,2)$,...

Comme on a $\mu - (6\nu - 13) = 3\gamma + 10$, les courbes C^6 doivent passer $3\nu - 3$ fois par le point $(\beta,1,1)$, 13 fois par le point $(\beta,1,2)$ et par les points $(\beta,1,2,1)$, ... Comme p est premier, $3\nu - 3$ et 13 sont premiers entre eux et la branche superlinéaire d'origine 0 passant par les points précédents passe par un point simple au domaine duquel correspond sur la surface Φ_6 une droite ρ_3.

La surface Φ_6 est la projection de la surface Φ_5 à partir d'un point $0'_5$ commun à la droite γ_n et à la droite ρ_3. Ce point est simple pour la surface Φ_5 et la droite ρ_3 est exceptionnelle.

10. On peut voir par des raisonnements analogues que les courbes C^{10} qui passent 12ν fois par 0, passent quatre fois par les points $(\alpha,1)$, ..., (α,x) et y fois par le point $(\alpha,x + 1)$ moyennant

$$4x + y = 9\nu(\nu - 1) + 1.$$

Si $\nu = \nu'$, on a $x = 9\nu'(4\nu' - 1)$ et $y = 1$. Les courbes passent une fois par les points $(\alpha,x + 1,1)$, $(\alpha,x + 1,2)$, $(\alpha,x + 1,3)$.

Si $\nu = 4\nu' + 1$, on a $x = 9\nu'(4\nu' + 1)$ et $y = 1$. Les courbes passent une fois par les points $(\alpha,x + 1,1)$, $(\alpha,x + 1,2)$, $(\alpha,x + 1,3)$.

Si $\nu = 4\nu' + 2$, on a $x = 9\nu'(4\nu' + 3) + 4$ et $y = 3$. Les courbes C^{10} passent une fois par les points $(\alpha,x + 1,1)$, $(\alpha,x+1,1,1)$, $(\alpha,x+1,1,2)$

Si $\nu = 4\gamma' + 3$, on a $x = 9\nu'(4\nu' + 5) + 13$ et $y = 3$. Les courbes C^{10} passent une fois par les points $(\alpha, x + 1, 1)$, $(\alpha, x + 1, 1, 1)$ et $(\alpha, x + 1, 1, 2)$.

Dans tous les cas, il correspond sur la surface Φ_n au domaine du point $(\alpha, x + 1, 3)$ ou $(\alpha, x + 1, 1, 2)$ une droite γ_4.

L'analyse du comportement des courbes C^{10} aux points $(\beta, 1), \ldots$ se fait comme dans les cas précédents. On trouve que ces courbes passent $9\nu - 17$ fois par $(\beta, 1)$, $3\nu - 13$ fois par $(\beta, 2), \ldots, (\beta, \nu - 1)$, $2\nu - 8$ fois par (β, ν), $\nu - 5$ fois par les points $(\beta, \nu, 1)$, $(\beta, \nu, 1, 1)$, deux fois par les points $(\beta, \nu + 1), \ldots, (\beta, 3\nu^2 + \nu)$, $3\nu - 4$ fois par le point $(\beta, 1, 1)$, 17 fois par le point $(\beta, 1, 2)$ et par les points $(\beta, 1, 2, 1, \ldots)$. p étant premier, on arrive à un point simple commun à toutes les courbes C^{10} et au domaine duquel correspond sur la surface Φ_{10} une droite ρ_4.

Sur la surface Φ_{10}, on a en outre une courbe τ d'ordre $\nu - 5$ et une conique ρ_1.

11. Retournons aux courbes C^7, qui passent $12\nu - 3$ fois par 0.

On sait que ces courbes passent $3\nu - 10$ fois par les points $(\beta, 1)$, $\ldots, (\beta, \nu - 1)$, $2\nu - 6$ fois par (β, ν), $\nu - 4$ fois par les points $(\beta, \nu, 1)$, $(\beta, \nu, 1, 1)$ et deux fois par les points $(\beta, \nu + 1), \ldots, (\beta, 3\nu^2 + \nu)$.

En utilisant la transformation T_1, on voit que les courbes C^7 passent 7 fois par le point $(\alpha, 1)$, 4 fois par les points $(\alpha, 2), \ldots, (\alpha, x)$, où x a la valeur donnée au numéro précédent, une fois par $(\alpha, x + 1)$ et une fois par les points infiniment voisins de ce dernier point et appartenant à toutes les courbes C^{10}. Au dernier de ces points correspond sur la surface Φ_p la droite γ_p. Les courbes C^7 passent de plus trois fois par les points $(\alpha, 1, 1), \ldots, (\alpha, 1, 3\nu)$.

Sur la surface Φ_7, on a une droite γ_4, une cubique gauche γ_n, une courbe τ d'ordre $\nu - 4$ et une conique ρ_1.

12. Au domaine du point $(\alpha, 1, 3\nu)$ correspond une courbe γ_n qui est une droite sur la surface Φ_1, une conique sur la surface Φ_4 et une cubique gauche sur la surface Φ_7. On peut se demander s'il existe des courbes C^x passant une fois par les points $(\alpha, 1), (\alpha, 1, 1), \ldots,$ $(\alpha, 1, 3\nu)$. Pour de telles courbes, on aura $\lambda = 3\nu + 1$ et on trouve facilement que l'on a $\mu = 9\nu^2 - 1$. Les courbes C^x passent $9\nu^2 + 3\nu$ fois par 0 et sont par suite les courbes C^n.

Les courbes C^n passent une fois par les points $(\beta,1)$, $(\beta,1,1)$, ..., $(\beta,1,9v^2-2)$.

Sur la surface Φ_n on a deux droites γ_n et ρ' représentant le domaine du point $(\beta,1,9v^2-2)$.

13. Posons $q=(i^2-i+2):2$ et considérons les courbes C^{q-1} dont les nombres associés sont

$$\lambda_{q-1}=i,\ \mu_{q-1}=3iv-i.$$

Ces courbes passent $3iv$ fois par 0, i fois par x points $(\alpha,1)$, ..., (α,x), y fois par le point $(\alpha,x+1)$ et on doit avoir

$$i(3v+x)+y=p.$$

Il en résulte que i et y sont premiers entre eux et que les courbes C^{q-1} passent par le point $(\alpha,x+1,1)$ et par une suite de points infiniment voisins successifs dont le dernier, P_{q-1}, est simple pour les courbes.

On a

$$ix+y=9v^2-3(i-s)v+1$$

et au domaine du point P_{q-1} correspond sur la surface Φ_{q-1} une droite γ_q.

Les courbes C^{q-1} passent $v-i-1$ ou $v-i$ fois par le point $(\beta,v,1,1)$. Dans le second cas, elles passent $2v-2i+2$ fois par le point (β,v) et $3v-3i+2$ fois par le point $(\beta,v-1)$. Supposons qu'elles passent $3iv-i$ fois par les points $(\beta,1)$, ..., (β,x'), $3v-3i+2+y$ fois par le point $(\beta,x'+1)$, $3v-3i+2$ fois par les points $(\beta,x'+2)$,... En exprimant que la somme des multiplicités des courbes C^{q-1} en 0 et aux points $(\beta,.)$ est égale à p, on trouve l'équation $(i-1)(3v+2)x'+y=1-i$, ce qui est impossible puisque $i>1$. Il en résulte que les courbes C^{q-1} passent $v-i-1$ fois par $(\beta,v,1,1)$, $2v-2i$ fois par (β,v) et $3v-3i-1$ fois par le point $(\beta,v-1)$. En reprenant la raisonnement précédent, on arrive à l'équation

$$[3(i-1)v+2i+1]x'+y=3v-i,$$

d'où $x'=0$, $y=3v-i$.

Les courbes C^{q-1} passent $6v-4i-1$ fois par le point $(\beta,1)$, $3v-3i-1$ fois par $(\beta,2)$, ..., $3v-i$ fois par $(\beta,1,1)$.

La tangente en 0 passant par $(\beta,1)$ compte pour $3iv-i$ fois parmi les tangentes aux courbes C^{q-1}, donc ces courbes doivent passer $3(i-2)v+3i-1$ fois par les points $(\beta,1,1),\ldots$ Observons que l'on a

$$3(i-2)v+3i+1=(i-2)(3v-i)+i^2+i+1$$

et que par conséquent les courbes C^{q-1} passent $3v-i$ fois par les points $(\beta,1,1),\ldots,(\beta,1,i-2)$, i^2+i+1 fois par le point $(\beta,1,i-1)$ et par une suite de points infiniment voisins successifs commençant à $(\beta,1,i-1,1)$. Cette suite se termine par un point R_{q-1} qui est simple pour les courbes. En effet, si l'on avait

$$3iv+i+1=h(3v-i)+i^2+i+1,$$

en portant cette valeur dans p, on trouverait que p est multiple de i^2+i+1.

14. Nous allons maintenant examiner le comportement en 0 des courbes $C^q, C^{q+1},\ldots,C^{q+i}$ dont les nombres correspondant sont

$$\begin{array}{lll}
\lambda_q=3iv+2i+1, & \mu_q=3v-3i-1, & \lambda_q+\mu_q=3(i+1)\gamma-i,\\
\lambda_{q+1}=3(i-1)v+2i, & \mu_{q+1}=3(1+1)v-3i+1, & \lambda_{q+1}+\mu_{q+1}=3(i+1)v-i+1,\\
\lambda_{q+2}=3(i-2)v+2i-1, & \mu_{q+2}=3(1+2)v-3i+3, & \lambda_{q+2}+\mu_{q+2}=3(i+1)v-i+2,\\
\ldots\ldots\ldots & & \\
\lambda_{q+k}=3(i-k)v+2i-k+1, & \mu_{q+k}=3(1+k)v-3i+2k-1, & \lambda_{q+k}+\mu_{q+k}=3(i+1)v-i+k,\\
\ldots\ldots\ldots & & \\
\lambda_{q+i-1}=3v+i+2, & \mu_{q+i-1}=3iv-i-3, & \lambda_{q+i-1}+\mu_{q+i-1}-3(i+1)v-1\\
\lambda_{1+i}=i+1, & \mu_{q+i}=3(i+1)v-i-1, & \lambda_{q+i}+\mu_{q+i}=3(i+1)v
\end{array}$$

Envisageons le système $|\, C^q \,|$.

Les courbes de ce système passent $3(i+v)1-i$ fois par $0, 3(\gamma-i)-1$ fois par $(\beta,1),\ldots,(\beta,v-1)$, $2(v-i)$ fois par (β,v), deux fois par les points $(\beta,v+1),\ldots,(\beta,3v^2+v)$, $v-i-1$ fois par les points $(\beta,v,1)$, $(\beta,v,1,1)$.

Examinons maintenant le comportement des courbes en $(\alpha,1)$, $(\alpha,2)\ldots$

Écrivons l'équation de la courbe

$$\sum_{k=0}^{i-1}\lambda_k x_0^{p-3(i+1)v-i+k}x_1^{3(i-k)v+2i-k+1}x_2^{3(1+k)v-3i+2k-1}$$

$$+\lambda_i x_0^{p-3(i+1)}x_1^{i+1}x_2^{3(i+1)v-i-1}+\cdots=0$$

En effectuant la transformation T_1, nous obtenons, après réduction par $y_2^{3(i+1)\nu-i}$, une équation dont le terme de degré le plus élevé en y_0 est

$$y_0^{2p-(i+1)(3\nu-1)}y_1^{i+1}y_2^i.$$

Il en résulte que les courbes C^q passent $2i + 1$ fois par $(\alpha,1)$, $i + 1$ fois par $(\alpha,2)$ et i fois par $(\alpha,1,1)$.

Supposons que ces courbes passent $i + 1$ fois par les points $(\alpha,2)$, ..., (α,x,y) fois par le point $(\alpha,x + 1)$. On doit avoir

$$(i + 1)(3\nu + i)x + y = p,$$

ce qui montre que $i + 1$ et y sont premiers entre eux et que les courbes C^q passent par le point $(\alpha,x + 1,1)$ et par une suite de points qui se termine par un point P_{q+1} simple pour les courbes. Nous désignerons par γ_{q+1} la courbe qui correspond sur Φ_{q+1} au domaine de ce point.

Les courbes C^q passent i fois par les points $(\alpha,1,1)$, ..., $(\alpha,1,3\nu)$.

Sur la surface Φ_q on a une conique ρ_1, une courbe τ d'ordre $\nu - i - 1$, une droite γ_{q+1} et enfin une courbe qui représente le domaine du point $(\alpha,1,3\nu)$ et qui est d'ordre i. Nous continuerons à la désigner par γ_n.

La surface Φ_q est la projection de la surface Φ_{q-1} à partir d'un point O_{q-1} intersection des droites ρ_{q-1} et γ_q. Ce point est multiple d'ordre $i + 1$ pour Φ_{q-1}.

15. Passons à l'examen des courbes C^{q+1}, qui passent $3(i + 1)\nu - i + 1$ fois par 0.

Le raisonnement fait plus haut pour les courbes C^q appliqué dans le cas actuel montre que les courbes C^{q+1} passent $2i$ fois par $(\alpha,1)$, $i + 1$ fois par $(\alpha,2)$, ..., (α,x), y fois par $(\alpha,x + 1)$, ..., une fois par P_{q+1}. D'autre part, elles passent $i - 1$ fois par les points $(\alpha,1,1)$, ..., $(\alpha,1,3\nu)$.

Supposons que les courbes C^{q+1} passent $\nu - i - 1$ fois par $(\beta,\nu,1,1)$. Le raisonnement fait plus haut conduit à la relation $3x' + y = -1$, ce qui est absurde. Ces courbes passent donc $i - i - 2$ fois par $(\beta,\nu,1,1)$, car les courbes C^{q+i} ont ce comportement en ce point. On est conduit cette fois, à la relation

$$x'(3i\nu + 5) + y = 3\nu - 2,$$

d'où $x' = 0$ et $y = 3\nu - 2$.

Les courbes C^{q+1} passent $6\nu - 3i - 6$ par $(\beta,1)$, $3\nu - 3i - 4$ fois

$(\beta,2), \ldots, 3\nu - 2$ fois par $(\beta,1,1)$. La droite issue de 0 et passant par $(\beta,1)$ compte pour $3(i + 1)\nu - 3i + 1$ parmi les tangentes aux courbes C^{q+1} en 0, donc la somme des multiplicités aux points infiniment voisins de $(\beta,1)$ dans le sens de $(\beta,1,1)$ doit valoir $3(i - 1)\nu + 7$. On a

$$3(i - 1)\nu + 7 = (i - 1)(3\nu - 2) + 2i + 5,$$

de sorte que les courbes C^{q+1} passent $3\nu - 2$ fois par les points $(\beta,1), \ldots, (\beta,1,i - 1)$, $2i + 5$ fois par $(\beta,1,i)$ et par les points $(\beta,1,i,1),\ldots$ Nous désignerons par R_{q+1} le dernier de ces points et par m_{q+1} sa multiplicité pour les courbes C^{q+1}. Nous désignerons en outre par ρ_{q+1} la courbe qui représente sur Φ_{q+1} le domaine du point R_{q+1}, courbe d'ordre m_{q+1}. Cette surface est la projection de la surface Φ_q à partir d'un point $0'_q$ appartenant à la courbe τ et à la courbe γ_q.

16. Les courbes C^{q+2} passent $3(i + 1)\nu - i + 2$ fois par 0 et par le raisonnement fait plus haut, au n° 14, ces courbes passent $2i - 1$ fois par $(\alpha,1)$, $i + 1$ fois par $(\alpha,2), \ldots, (\alpha,x)$, y fois par $(\alpha,x + 1), \ldots$, une fois par P_q et $i - 2$ fois par les points $(\alpha,1,1), \ldots, (\alpha,1,3\nu)$.

Ces courbes passent d'autre part $\nu - i - 2$ fois par le point $(\beta,\nu,1,1)$ et en reprenant le raisonnement fait au n° précédent, on arrive à l'équation

$$x'[3(i + 1)x' + 7] + y = 3\nu - 3,$$

d'où $x' = 0, y = 3\nu - 3$,

La droite joignant le point 0 au point $(\beta,1)$ compte pour $3(i + 2\nu) - 3i + 3$ parmi les tangentes en 0 aux courbes C^{q+2}, donc ces courbes doivent passer par des points infiniment voisins de $(\beta,1)$ de manière que la somme de leurs multiplicités en ces points soit égale à $3i\nu + 11$. On a

$$3i\nu + 11 = i(3\nu - 3) + 3i + 11$$

et les courbes C^{q+2} passent $3\nu - 3$ fois par les points $(\beta,1,1), \ldots (\beta,1,i)$, $3i + 11$ fois par $(\beta,1,i + 1)$ et par les points $(\beta,1,i + 1,1), \ldots$ pour se terminer par un point R_{q+2}. Nous désignerons par ρ_{q+2} la courbe qui représente le domaine de ce point sur la surface Φ_{q+2}.

Sur cette surface, qui est la projection de Φ_{q+1} à partir d'un point $0'_{q+1}$ appartenant à la courbe γ_n, et éventuellement à la courbe ρ_{q+2} nous avons une conique ρ_1, une courbe τ d'ordre $\gamma - i - 2$, une courbe γ_n d'ordre $i - 2$ et une courbe ρ_{q+1} d'ordre m_{q+1}. Il en résulte que les courbes C^{q+2} doivent passer par $(\beta,1,i,1)$ et par suite plus de $3\nu - 3$ fois par le point $(\beta,1,1)$, ce qui est impossible. Par suite, on a $m_{q+1} = 1$ et sur Φ_{q+1}, la droite ρ_{q+1} passe par le point 0_{q+1}. Ce point est donc simple pour la surface Φ_{q+1}. La droite ρ_{q+1} est exceptionnelle.

Observons qu'on démontrerait de même, en considérant les courbes C^{q+3}, que le point R_{q+2} est simple pour les courbes C^{q+2} et que ρ_{q+2} est une droite. Sur Φ_{q+2}, la courbe γ_n et la droite ρ_{q+2} se rencontrent en un point 0_{q+2} simple pour la surface.

17. Les courbes C^{q+k} passent $3(i+1)\nu - i + k$ fois par 0. Elles passent $2i + 1 - k$ fois par $(\alpha,1)$, $i + 1$ fois par $(\alpha,2), \ldots, (\alpha,x)$, y fois par $(\alpha,x+1), \ldots$, une fois par P_q et $i - k$ fois par les points $(\alpha,1,1), \ldots, (\alpha,1,3)$, comme on le voit en reprenant le raisonnement fait pour les courbes C^q, C^{q+1}, C^{q+2}.

D'autre part, les courbe C^{q+k} passent nécessairement $\nu - i - 2$ fois par $(\beta,\nu,1,1)$ et en supposant que les courbes passent μ_{q+k} fois par les points $(\beta,1), \ldots, (\beta,x')$, $3\nu - 3i - 4 + y$ fois par $(\beta,x'+1)$, $3\nu - 3i - 4$ fois par $(\beta,x'+2), \ldots$, on arrive à la condition

$$[3(i+k-1)\nu + 2k + 3]x' + y = 3\nu - k - k - 1,$$

d'où $x' = 0$ et $y = 3\nu - k - 1$. Les courbes C^{q+k} passent donc $6\nu - 3i - k - 5$ fois par $(\beta,1)$, $3\nu - 3i - 4$ fois par $(\beta,2), \ldots$ et $3\nu - k + 1$ fois par $(\beta,1,1)$. Elles passent en outre par une suite de points infiniment voisins successifs de ce dernier point dont la somme des multiplicités vaut $3(i+k-2)\nu + 3k + 4$. On a

$$3(i+k-2)\nu+3k+4=(i+k-2)(3\nu-k-1)+(k+1)(i+k-2)+1,$$

donc les courbes C^{q+k} passent $3\nu - k - 1$ fois par les points $(\beta,1,1)$, $\ldots, (\beta,1,1,i+k-2)$, $(k+1)(i+k+1)+1$ fois par $(\beta,1,i+k-1,1), \ldots$ Le dernier point sera désigné par R_{q+k} et la courbe qui correspond au domaine de ce point sur la surface Φ_{q+k} par ρ_{q+k}. En considérant les courbes C^{q+k+1}, on peut voir qie ρ^{q+k} est une droite d'ailleurs exceptionnelle.

La surface Φ_{q+k} est la projection de la surface Φ_{q+k-1} à partir d'un point 0_{q+k-1} commun à la courbe γ_q et à la droite ρ_{q+k-1}.

La surface Φ_{q+k} contient une conique ρ_1, une courbe γ_q d'ordre $i - k$, une courbe τ d'ordre $\nu - i - 2$, une droite γ_q et une droite (exceptionnelle ρ_{q+k}).

18. Les courbes C^{q+i-1} passent $3(i+1)\nu - 1$ fois par 0, $i+2$ fois par $(\alpha,1)$, $i+1$ fois par $(\alpha,2), \ldots, (\alpha,x)$, y fois par $(\alpha,x+1), \ldots, \ldots$, une fois par P_q, une fois par $(\alpha,1,1), \ldots, (\alpha,1,3\nu)$, x et y ayant la valeur donnée au n° 14.

Ces courbes passent $6\nu - 4i - 4$ fois par $(\beta,1)$, $3\nu - 3i - 4$ fois par $(\beta,2), \ldots, 3\nu - i$ fois par $(\beta,1,1), \ldots, (\beta,2i-3)$, $2i^2+1$ fois par $(\beta,1,2i-2), \ldots$, et par un point R_{q+i-1} multiple d'ordre m_{q+i-1} pour les courbes.

Les courbes C^{q+i} passent $3(i+1)\nu$ fois par 0 et en raisonnant comme on l'a fait pour les courbes C^{q-1} passent $3(i+1)\nu$ fois par 0 et cn raisonnant comme on l'a fait pour les courbes Cs^{-1}, $i+1$ fois par $(\alpha,1), \ldots, (\alpha,x)$, y fois par $(\alpha,x+1), \ldots$ et finalement par un point simple P_{q+i}, les nombres x et y satisfaisant cette fois à l'équation

$$(i+1)(3\nu + x) + y = p,$$

D'autre part, les courbes C^{q+1} passent $6\nu - 4i - 5$ fois par $(\beta,1)$, $3\nu - 3i - 4$ fois par $(\beta,2), \ldots, 3\nu - i - 1$ fois par $(\beta,1,1), \ldots, (\beta,1,i-1)$, $i^2 = 3i + 2$ fois par $(\beta,1,i), \ldots$, enfin une fois par un point R_{q+i} simple pour les courbes.

Sur la surface Φ_{q+i-1} nous avons une conique ρ_1, une courbe τ d'ordre $\nu - i - 2$, une droite γ_q, une droite γ_n et une courbe ρ_{q+i-1} d'ordre m_{q+i-1} qui représente le domaine du point R_{q+i-1}.

Sur la surface Φ_{q+i} nous avons une conique ρ_1, une courbe τ d'ordre $\nu - i - 2$, une droite ρ_{q+i} qui représente le domaine du point R_{q+i}.

On en conclut que Φ_{q+i} est la projection de la surface Φ_{q+i-1} à partir d'un point 0_{q+i-1} commun à la droite γ_n et à la droite ρ_{q+i-1} car en raisonnant comme plus haut, on a $m_{q+i-1} = 1$, les courbes C^{q+i} ne pouvant passer le point R_{q+i-1}. Le point $0_{+qi-1}'$ est simple pour la surface Φ_{q+i-1} et la droite ρ_{q+i-1} est exceptionnelle.

Liège, le 27 juillet 1971.