Bulletin de la Classe des sciences

Construction de surfaces algébriques dont le système canonique contient des parties fixes non exceptionnelles

Lucien Godeaux

Résumé
Construction de surfaces algébriques dont le système canonique contient une composante fixe de genre aussi grand qu'on le veut et des courbes rationnelles de degré virtuel inférieur à — 1. La première partie n'appartient pas, en tant que composante fixe, au système bicanonique.

Citer ce document / Cite this document :

Godeaux Lucien. Construction de surfaces algébriques dont le système canonique contient des parties fixes non exceptionnelles. In: Bulletin de la Classe des sciences, tome 57, 1971. pp. 910-917;

doi : https://doi.org/10.3406/barb.1971.61978

https://www.persee.fr/doc/barb_0001-4141_1971_num_57_1_61978

Fichier pdf généré le 04/06/2020

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Construction de surfaces algébriques dont le système canonique contient des parties fixes non exceptionnelles

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie

Résumé. — Construction de surfaces algébriques dont le système canonique contient une composante fixe de genre aussi grand qu'on le veut et des courbes rationnelles de degré virtuel inférieur à — 1. La première partie n'appartient pas, en tant que composante fixe, au système bicanonique.

Persée BY: creative commons

Enriques, dans son ouvrage posthume sur *La superficie algébrique* (1) avait signalé l'existence de surfaces dont le système canonique possédait des composantes fixes non exceptionnelles.

Nous avons construit des surfaces algébriques dont le système canonique possède des composantes fixes rationnelles de degré virtuel inférieur à -1 et par conséquent non exceptionnelles (2). Nous partions d'une surface algébrique d'équation

$$a_1x_1^{3n+1}x_2 + a_2x_2^{3n+1}x_3 + a_3x_3^{3n+1}x_4 + \sum_{i=0}^{n-2} a_{4+i}(x_1x_2x_3)^i x_4^{3(n-i)+2} = 0$$

contenant une involution cyclique d'ordre $p = 9n^2 + 3n + 1$ n'ayant que trois points unis. Le système canonique de la surface image de

(1) Bologne, Zanichelli, 1949.

(2) *Sur quelques surfaces algébriques représentant des involutions cycliques* (Bulletin de l'Académie royale de Belgique, 1951, pp. 819-825, 826-835, 938-949, 1106-1119). *Construction d'une surface dont le système canonique possède des composantes fixes* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1952, pp. 49-56). *Théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications* (Rome, Edit. Cremonese, 1963).

cette involution est formé d'un faisceau de courbes elliptiques et de certaines courbes rationnelles non exceptionnelles provenant des domaines des points unis de l'involution. Nous appliquions dans ces recherches les résultats obtenus sur les involutions cycliques et devions par suite supposer n choisi de telle sorte que p soit un nombre premier.

M. Burniat a démontré (1) que si $w > 3$ et $n > 0$ sont des entiers dont la somme est impaire et supérieure à 10, il existe des surfaces algébriques dont le système canonique pur est composé d'une partie variable irréductible et d'une partie fixe de genre w et de degré $q = 8 - n$. Il a fait plusieurs applications de ce théorème.

Reprenant récemment cette question, nous avons considéré le cas où, dans nos recherches antérieures, on supposait $n = 3v^2$. Dans ce cas, le nombre p n'est plus premier et la surface considérée est d'ordre $9v^2 + 2$ mais elle est toujours transformée en elle-même par une homographie d'ordre $p = 9v^2 + 3v + 1$. L'image de cette involution dans le cas où p est premier, est une surface dont le système canonique contient les courbes d'un faisceau linéaire et une courbe fixe de genre aussi grand qu'on le veut et par suite non exceptionnelle. D'une manière précise, nous établissons le théorème suivant:

Il existe des surfaces algébriques dont le système canonique contient sept composantes fixes dont l'une a le genre $3v(3v - 1):2$ *et dont les autres sont des courbes rationnelles de degré virtuel égal à* -3 *ou à* $-3v$ *et par suite non exceptionnelles. La première de ces courbes n'appartient pas, en tant que composante fixe, au système bicanonique.*

Ce théorème diffère de l'important résultat de M. Burniat rappelé plus haut, en ce sens que la partie variable du système canonique n'est pas irréductible.

1. Considérons une homographie H de période

$$p = 9v^2 + 3v + 1$$

et d'équations

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = x_1 : \varepsilon\, x_2 : \varepsilon^{\alpha}\, x_3 : \varepsilon^{\beta} x_4,$$

où ε est une racine primitive d'ordre p de l'unité et où l'on a

$$\alpha = 3v + 1, \beta = 3v^2 + 2v + 1.$$

(1) *Quelques théorèmes d'existence à propos des surfaces algébriques* (Bulletin de l'Académie royale de Belgique, 1958, pp. 43-55).

Cette homographie transforme en elle-même la surface F d'équation

$$a_1 \cdot x_1^{9\nu^2+1}x_2 + a_2 \cdot x_2^{9\nu^2+1}x_3 + a_3 x_3^{9\nu^2+1}x_1 + \sum_0^{3\nu^2}(x_1x_2x_3)^i x_4^{9\nu^2+2-3i} +$$

$$+ \sum x_4^h(x_1x_2x_3)^k[x_1^r x_2^s + x_2^r x_3^s + x_3^r x_1^s] = 0$$

où l'on a

$$r \equiv h(\beta-1) + k(\alpha-2) - 3\nu, \quad s \equiv p - h\beta - k(\alpha+1) + 1, \qquad (\text{mod. p})$$

les nombres h et k étant choisis de manière que r et s soient positifs ou nuls.

L'homographie H possède quatre points unis qui sont les sommets du tétraèdre de référence. Trois de ces points: $0_1(1,0,0,0)$, $0_2(0,1,0,0)$, $0_3(0,0,1,0)$ appartiennent à la surface F. H détermine sur F une involution I d'ordre p ayant trois points unis.

La symétrie de l'équation de F par rapport à x_1,x_2,x_3 montre que les trois points unis sont de même nature et il suffira d'étudier l'un d'eux.

Nous désignerons par Φ une image de l'involution I sur laquelle les points de diramation $0'_1,0'_2,0'_3$ respectivement homologues de $0_1,0_2,0_3$, sont isolés. Les courbes qui sur F correspondent aux sections hyperplanes Γ de Φ seront désignées par C. Elles forment un système linéaire en général incomplet privé de points-base. Nous supposerons que ν est choisi de façon que *p soit premier*.

2. Considérons le point uni 0_1 et le plan tangent $x_2 = 0$ en ce point. Dans ce plan l'homographie H détermine l'homographie H' d'équations

$$x'_1 : x'_3 : x'_4 = x_4 : \varepsilon^\alpha x_3 : \varepsilon^\beta x_4$$

En posant $\eta = \varepsilon^\alpha$, on a

$$\eta^{6\nu^2+\nu+1} = \varepsilon^{3\nu^2+2\nu+1} = \varepsilon^\beta$$

et les équations de H' peuvent s'écrire

$$x'_1 : x'_3 : x'_4 = x_1 : \eta x_3 \;\; : \eta^{6\nu^2+\nu+1} x_4.$$

En posant $\zeta = \varepsilon^\beta$, on a

$$\zeta^{3\nu+2} = \varepsilon^{3\nu+1} = \varepsilon^\alpha$$

et H' a pour équations

$$x_1' : x_3' : x_4' = x_1 : \zeta^{3\nu+2} x_3 : \zeta x_4.$$

Au point uni 0_1 sont donc associés les nombres

$$\alpha' = 6\nu^2 + \nu + 1, \ \beta' = 3\nu + 2.$$

3. Considérons les congruences

$$\lambda + (6\nu^2 + \nu + 1)\mu \equiv 0, \ \mu + (3\nu + 2)\lambda \equiv 0, \qquad \text{(mod. p)}$$

La solution en nombres positifs donnant la plus petite des sommes $\lambda + \mu$ est $\lambda = 3\nu - 1$, $\mu = 3$. Il s'ensuit que les courbes C passant par 0_1 ont en ce point la multiplicité $3\nu + 2$.

En adoptant les résultats et les notations de notre ouvrage *Théorie des involutions cycliques* cité plus haut, on voit que les courbes C passant par 0 passent $3\nu - 1$ fois par les $3\nu + 1$ points $(\alpha',1)$, $(\alpha',2)$, ..., $(\alpha',3\nu + 1)$ infiniment voisins successifs de 0_1 le premier étant sur la droite $0_1 0_4$, trois fois par les points

$$(\beta',1), (\beta',2), \ldots, \left(\beta', \frac{\nu(3\nu - 1)}{2} - 1\right),$$

deux fois par le point

$$\left(\beta', \frac{\nu(3\nu - 1)}{2}\right),$$

une fois par les points

$$\left(\beta', \frac{\nu(3\nu - 1)}{2} + 1\right), \ldots, (\beta', 6\nu^2 + \nu)$$

infiniment voisins successifs de 0_1, le premier étant sur la droite $0_1 0_3$, une fois par le point

$$\left(\beta', \frac{\nu(3\nu - 1)}{2}, 1\right)$$

infiniment voisin de

$$\left(\beta', \frac{\nu(3\nu - 1)}{2}\right).$$

Le points 0_1 est par conséquent multiple d'ordre $3\nu + 2$, le cône tangent se décomposant en un cône d'ordre $3\nu - 1$ et en deux plans.

Désignons par Φ_1 la projection de la surface Φ du point $0'_1$ sur un hyperplan l'espace ambiant. Au domaine du point $(\alpha', 3\nu + 1)$ correspond sur Φ_1 une courbe rationnelle ρ_1 d'ordre $3\nu - 1$ et aux domaines des points

$$(\beta', 6\nu^2 + \nu), \left(\beta', \frac{\nu(3\nu - 1)}{2}, 1\right)$$

des droites ρ_1 et τ_1.

On a, en désignant par Γ_1 les sections hyperplanes de Φ_1, la relation fonctionnelle

$$\Gamma \equiv \Gamma_1 + \rho_1 + \tau_1 + \rho'_1.$$

Les courbes ρ_1, ρ'_1 ne se rencontrent pas mais rencontrent chacune en un point la droite τ_1. On en conclut que ρ_1 a le degré virtuel -3ν, τ_1 le degré virtuel -3 et ρ'_1 le degré virtuel -2.

Appelons Φ' la projection de la surface Φ à partir du plan $0'_1 0'_2 0'_3$ sur un espace à $m - 3$ dimensions, m étant la dimension de l'espace contenant Φ.

Le point $0'_2$ donne naissance à une courbe ρ_2 d'ordre $3\nu - 1$, à une droite ρ'_2 et à une droite τ_2. De même le point 0_3 donne naissance à une courbe ρ_3 et à deux droites ρ'_3, τ_3. Ces différentes courbes ont le degré virtuel égal à celui de la courbe correspondante ρ_1, ρ'_1, τ_1. Si les sections hyperplanes de Φ' sont désignées par Γ', on a la relation fonctionnelle.

$$\Gamma \equiv \Gamma' + \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \rho'_1 + \rho'_2 + \rho'_3$$

4. Les courbes canoniques de la surface Φ doivent rencontrer les courbes ρ_1, ρ_2, ρ_3 chacune en $3\nu - 3$ points et les droites τ_1, τ_2, τ_3 chacune en un point, mais elles ne rencontrent pas les droites $\rho'_1, \rho'_2, \rho'_3$ Nous désignerons par K'_0 ces courbes et par K_0 les courbes qui leur correspondent sur F.

Les courbes canoniques K de F sont découpées par les surfaces d'ordre $9\nu^2 - 2$. Les courbes K'_0 qui doivent rencontrer les courbes ρ_1, ρ_2, ρ_3 et les droites τ_1, τ_2, τ_3, les surfaces adjointes qui donnent les courbes K_0 doivent passer par les points $0_1, 0_2, 0_3$. L'équation d'une de ces surfaces doit donc contenir des termes de la forme $x_1^i x_2^j x_2^h x_4^k$, la somme des exposants devant être $9\nu^2 - 2$.

A cause de la symétrie en x_1, x_2, x_3 de l'équation de F, l'équation de l'adjointe doit aussi contenir les termes $x_1^h x_2^i x_3^j x_4^k$, $x_1^j x_2^h x_3^i x_4^k$.

Observons de plus que si l'on applique H aux équations de l'adjointe, elle se reproduit multipliée par une puissance de ε. On doit donc avoir

$$j + \alpha h \equiv i + \alpha j \equiv h + \alpha i, \qquad \text{(mod. p)}$$

On en déduit $i = j = h$ et l'équation de l'adjointe ne contient que des termes de la forme

$$(x_1 x_2 x_3)^i x_4^{9\nu^2 - 3i - 2}$$

Cette équation peut donc s'écrire

$$x_4[\lambda_0(x_4 x_2 x_3)^{3\nu^2 - 1} + \lambda_1(x_1 x_2 x_3)^{3\nu^2 - 2} x_4^3 + \cdots + \lambda_{3\nu^2 - 1} x_4^{9\nu^2 - 3}] = 0.$$

Les surfaces adjointes découpant sur F les courbes K_0 sont donc formées du plan $x_4 = 0$ et de $3\nu^2$ surfaces du faisceau.

$$x_1 x_2 x_3 + \lambda x_4^3 = 0.$$

On en déduit que le genre géométrique de Φ est $p_g = 3\nu^2$ et comme cette surface est, comme F, régulière, le genre arithmétique est $p_a = 3\nu^2$.

5. Désignons par G les courbes découpées sur F par les surfaces

$$x_1 x_2 x_3 + \lambda x_4^3 = 0$$

et par G_0 la section de F par le plan $x_4 = 0$, par G' et G'_0 les courbes qui leur correspondent sur Φ.

Le système canonique de la surface Φ contient les courbes

$$G'_0 + (3\nu^2 - 1)G'.$$

Pour évaluer le genre de la courbe G, intersection de F et de la surface $x_1 x_2 x_3 = x_4^3$ observons que cette surface peut être représentée point par point sur un plan en posant

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = y_1^2\, y_3 : y_2^2\, y_1 : y_3^2\, y_2 : y_1 y_2 y_3.$$

A la courbe G correspond dans ce plan la courbe γ d'équation

$$a_1 y_1^{18\nu^2 + 1} y_3^{9\nu^2 - 1} + a_2 y_2^{18\nu^2 + 1} y_1^{9\nu^2 - 1} + a_3 y_3^{18\nu^2 + 1} y_2^{9\nu^2 - 1}$$
$$+ a_4 (y_1 y_2 y_3)^{9\nu^2} + \cdots = 0,$$

les termes non écrits étant sans influence sur la singularité de la courbe aux sommets A_1, A_2, A_3 du triangle de référence.

Le point A_1 est multiple d'ordre $9\nu^2 - 1$ pour la courbe γ. Si l'on effectue deux fois la transformation quadratique

$$y'_1 : y'_2 : y'_3 = y_1^2 : y_1 y_2 : y_2 y_3,$$

on voit qu'à A_1 sont infiniment voisins successifs un point multiple d'ordre $9\nu^2 - 1$ suivi d'un point triple. Si l'on effectue plusieurs fois la transformation

$$y'_1 : y'_2 : y'_3 = y_1^2 : y_2 y_3 : y_1 y_3,$$

on voit qu'à ce point triple sont infiniment voisins successifs $3\nu^2 - 2$ points triples suivi d'un point double de rebroussement. Celui-ci est suivi de deux points simples dont le dernier sera désigné par P_1.

Le point A abaisse donc le genre de la courbe γ de $81\nu^4 - 18\nu^2$ unités. Il en est de même des points A_2, A_3 dont la suite des points infiniment voisins successifs se termine par un point simple, respectivement P_2 et P_3.

Le genre de la courbe γ, c'est-à-dire des courbes G, est égal à

$$\frac{1}{2}(243\nu^3 + 27\nu^2 + 2).$$

L'homographie H détermine sur la courbe G et par suite sur la courbe γ une involution d'ordre p ayant trois points unis P_1, P_2, P_3. D'après la formule de Zeuthen,$_g$l'image de cette involution c'est-à-dire une courbe G' a le genre

$$\frac{1}{2} 9\nu(3\nu^2 - 1) + 1$$

Quant à la courbe G_0, elle a le genre

$$\frac{1}{2} 9\nu^2(9\nu^2 + 1)$$

et H détermine sur cette courbe une involution ayant trois points unis. En utilisant la formule de Zeuthen, on voit que la courbe G'_0 a le genre

$$\frac{1}{2} 3\nu(3\nu - 1).$$

6. Sur la surface Φ, les courbes canoniques passent 3ν fois par les

points $0'_1, 0'_2, 0'_3$ et par conséquent les projections de ces courbes sur la surface Φ' à partir de ces points sont les courbes

$$G'_0 + 3(\nu^2 - 1)G' + \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \tau_1 + \tau_2 + \tau_3.$$

Le système canonique de la surface Φ possède sept composantes fixes, l'une, G'_0, est de genre $3\nu(3\nu - 1) : 2$, trois de degré virtuel $- 3$ et trois de degré virtuel $- 3\nu$.

Les courbes bicanoniques de F transformées des courbes bicanoniques de Φ sont découpées par des surfaces ψ d'ordre $36\nu^2 - 4$ qui ne contiennent pas F comme partie et dont l'équation se reproduit, lorsque l'on effectue H, multipliée par $\varepsilon^{3\nu^2 - 7\nu - 3}$. En effet, si l'on applique H à l'équation d'une adjointe de F, elle se reproduit multipliée par $\varepsilon^{6\nu^2 - 2\nu - 1}$.

Parmi les biadjointes à F se trouvent les surfaces

$$\lambda_1 x_1^{6\nu^2 + 4\nu - 2} x_2^{12\nu^2 - 4\nu - 2} + \lambda_2 x_2^{6\nu^2 + 4\nu - 2} x_3^{12\nu^2 - 4\nu - 2} + \lambda_3 x_3^{5\nu^2 + 4\nu - 2} x_1^{12\nu^2 - 4\nu - 2} = 0$$

qui ne peuvent contenir F comme partie. Les courbes découpées sur F par ces surfaces ne contiennent pas G'_0 comme partie et par conséquent:

Le système bicanonique de la surface Φ ne contient pas la courbe G'_0 comme partie fixe.

Ainsi se trouve établi le théorème énoncé au début.

7. Remarques. La surface F est également transformée en elle-même par une homographie de période $9\nu^2 - 3\nu + 1$. Son étude pourrait se faire d'une manière analogue à la précédente.

On pourrait généraliser ce qui précède en remplaçant ν par $3\eta^2$. On obtiendrait ainsi une surface d'ordre $81\nu^2 + 2$ transformée en elle-même par une homographie de période $9\eta^2 + 3\eta + 1$. Et ainsi de suite.

Liège, le 6 juillet 1971.