La Physique mathématique d'Einstein.

par Lucien GODEAUX,

Docteur en Sciences, professeur à l'École Militaire.

Le but principal de la science est l'explication de l'ensemble des phénomènes naturels, et pour cela, elle procède par *approximations successives.* Ceux qui la cultivent s'efforcent de construire des modèles, des univers, qui *se rapprochent de plus en plus de la réalité.*

Prenons un exemple simple : L'arpenteur qui doit mesurer un terrain et en faire le plan supposera plane la surface de la Terre. Le cartographe, qui doit dresser la carte d'un pays, supposera que la surface de la Terre est sphérique. Ainsi donc, la surface terrestre, dans une première approximation, pourra être assimilée à un plan, dans une seconde approximation, à une sphère. Et l'on constate que l'approximation est fonction de la portion de la surface terrestre à représenter. Les premiers cartographes ont d'ailleurs admis l'hypothèse des arpenteurs, ils ont pris un plan comme « *modèle* » de la surface terrestre. Et ce n'est que devant les contradictions qu'ils rencontraient qu'ils ont été amenés à modifier leur point de vue.

Un processus analogue est suivi *dans tous les domaines.*

La science qui a été la première constituée en corps de doctrine a été sans doute celle du *nombre.* Armé de cette première acquisition, l'homme a pu constituer la science de l'*étendue*, puis celle du *mouvement* : la mécanique de Galilée et Newton. Mais lorsque, introduisant de nouveaux concepts, on a voulu, à l'aide de ces doctrines, constituer la *physique mathématique*, on s'est heurté (après de longues études d'ailleurs), à des difficultés telles qu'est apparue, à certains esprits géniaux, la nécessité de *réformer les premières données.* Et la mécanique classique a d'abord été attaquée. Cela a donné lieu à une mécanique nouvelle qui permit de constituer l'électrodynamique.

C'est alors qu'EINSTEIN a imaginé sa théorie des phénomènes physiques, dans laquelle l'introduction d'agents physiques influe, non seulement sur la science du mouvement, mais encore sur celle de l'étendue. Et ainsi, la géométrie euclidienne et la mécanique newtonienne apparaissent comme une première approximation, la géométrie euclidienne et la mécanique de Lorentz comme une seconde approximation, les théories d'Einstein comme une *troisième approximation de la réalité*.

Nous avons essayé, dans ces quelques pages, de *retracer l'histoire de cette transformation* et, contraint d'employer le symbolisme mathématique, nous avons tâché de le faire sans utiliser des connaissances plus élevées que celles que possèdent généralement les élèves de candidature de nos facultés techniques belges. Nous espérons que nos efforts ne seront pas restés infructueux, et que les lignes qui vont suivre permettront au lecteur de se rendre compte de l'importance et de la nécessité des théories d'Einstein.

En dehors des expositions déductives complètes, ces théories ont été « *décrites* » plusieurs fois. Un mathématicien belge, M. DE DONDER, qui a d'ailleurs apporté de notables contributions à cette partie de la science, a même écrit à leur sujet un article dans une revue qui n'est certainement pas lue exclusivement par des hommes de science (1). Parmi les autres « descriptions » des théories du savant suisse, nous citerons celle de M. PALATINI (2) et surtout la belle conférence de M. LEVI-CIVITA (3), à laquelle nous avons du reste eu souvent recours dans cette exposition.

1. — *Les équations de la physique mathématique dans la mécanique classique.* — Lorsque, à l'aide de la mécanique classique, on veut expliquer un phénomène physique, on choisit un certain nombre de paramètres : $p_1, p_2, \ldots p_n$, à l'aide desquels l'expérience permet de mesurer les grandeurs physiques entrant en jeu dans le phénomène considéré.

---

(1) *Les théories d'Einstein* (Le Flambeau, mai 1920).

(2) *La théorie de la relativité dans son développement historique* (Scientia, 1919).

(3) *Comment un conservateur pourrait-il arriver au seuil de la mécanique nouvelle ?* (L'Enseignement Mathématique, 1920, vol. XXI).

L'observation du phénomène permet ensuite d'écrire certaines relations entre ces paramètres et ces relations contiendront en général, outre les paramètres, leurs dérivées par rapport au temps t.

On fait alors l'hypothèse de l'existence d'un ou de plusieurs *fluides hypothétiques*, formés d'un grand nombre de molécules dont on désignera les masses par m_1, m_2, ..., m_e et les coordonnées, par rapport à un système d'axes rectangulaires, par (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), ..., (x_e, y_e, z_e) De plus, on supposera qu'il y a *conservation de l'énergie* et qu'il existe, par suite, une fonction $U(x_1, y_1, z_1, ..., x_e, y_e, z_e)$ jouant le rôle de *fonction des forces*.

Il faudra ensuite écrire les équations du mouvement des molécules :

$$\left.\begin{aligned} m_i.\frac{d^2x_i}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial x_i}, \\ m_i.\frac{d^2y_i}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial y_i}, \\ m_i.\frac{d^2z_i}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial z_i}, \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, 3, ..., e).$$

Pour avoir une *explication mécanique* du phénomène, il faudra connaître les expressions des coordonnées x_i, y_i, z_i et de la fonction U au moyen des paramètres p_1, p_2, ..., p_n.

On formera la fonction (énergie cinétique du système) :

$$T = \frac{1}{2}m_1\left[\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2\right] + \dots + \frac{1}{2}m_e\left[\left(\frac{dx_e}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_e}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_e}{dt}\right)^2\right],$$

et l'on écrira les équations de Lagrange :

$$(1) \qquad R_i \equiv \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial p_i} - \frac{\partial U}{\partial p_i} = 0, \qquad (i = 1, 2, \dots, e).$$

(Nous avons représenté, dans ces équations, la dérivée $\frac{dp_i}{dt}$ par $\dot{p}_i$).

Pour qu'une explication mécanique soit possible, il suffit d'ailleurs, d'après Poincaré (1), que l'on puisse trouver deux fonctions T, U, la première des variables $p_1, p_2, \ldots p_n, \dot{p}_1, \ldots \dot{p}_n$, la seconde de $p_1, \ldots, p_n$.

Observons que, en *coordonnées cartésiennes*, le carré de la distance de deux points infiniment voisins (x_i, y_i, z_i) et $(x_i + dx_i, y_i + dy_i, z_i + dz_i)$, est

$$d\sigma_i^2 = dx_i^2 + dy_i^2 + dz_i^2.$$

Nous pouvons donc écrire

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2} m_1 . \frac{d\sigma_1^2}{dt^2} + \ldots + \frac{1}{2} m_e . \frac{d\sigma_e^2}{dt^2}.$$

Nous avons tantôt rapporté les molécules à un système d'axes rectangulaires, mais nous pouvons fort bien employer un autre système de coordonnées : les *coordonnées polaires*, par exemple, ou les *coordonnées elliptiques* (dans lesquelles un point est représenté par les paramètres λ des trois quadriques d'équation

$$\frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} + \frac{z^2}{c-\lambda} = 1,$$

passant par ce point) ou un *système quelconque de coordonnées curvilignes* q_1, q_2, q_3. Les coordonnées cartésiennes x, y, z s'exprimeront en fonction de q_1, q_2, q_3 par certaines formules au moyen desquelles on calculera

$$(2) \qquad d\sigma^2 = a_{1,1}\, dq_1^2 + a_{2,2}\, dq_2^2 + a_{3,3}\, dq_3^2 + 2a_{1,2}\, dq_1\, dq_2 + 2a_{2,3}\, dq_2\, dq_3 + 2a_{3,1}\, dq_3\, dq_1.$$

La fonction T portera maintenant sur les variables $p_1, p_2, \ldots, p_n$ (et leurs dérivées) et sur les coefficients $a_{1,1}, \ldots, a_{3,1}$. Ceux-ci entreront donc dans les nouvelles équations (1). Ces nouvelles équations ont *la même forme*, quel que soit le système de coordonnées employé, si on les regarde comme contenant explicitement les coefficients $a_{i,k}$.

Nous continuerons à désigner par $\mathrm{R}_i = o$ $(i = 1, 2, \ldots, e)$ les équations (1) obtenues en partant d'un système de coordonnées quelconques q_1, q_2, q_3 et nous supposerons qu'elles contiennent explicitement les $a_{i,k}$.

Il importe de remarquer que les formules liant les coordonnées

(1) H. Poincaré. *Electricité et Optique* (Paris, 1901).

q_1, q_2, q_3 aux x, y, z ne contiennent *pas le temps*, c'est-à-dire *que l'on passe d'un système de référence fixe à un autre système de référence également fixe.*

2. — *Le principe d'Hamilton en mécanique classique.* — Les équations de la mécanique classique peuvent se synthétiser dans le principe d'Hamilton comme nous le rappellerons rapidement.

Envisageons, pour fixer les idées, le mouvement d'un point matériel M, de masse $m = 1$, rapporté à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz. Si nous admettons, pour plus de simplicité, l'existence d'une fonction des forces U, les projections sur les axes de la force sollicitant le point M seront $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$ et $\frac{\partial U}{\partial z}$. Les équations qui régissent le mouvement du point matériel M pourront s'écrire :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Indiquons par T la demi-force vive :

$$T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2),$$

et exprimons les coordonnées x, y, z de M en fonction de trois paramètres de Lagrange q_1, q_2, q_3, que nous pouvons d'ailleurs appeler les coordonnées du point M. Actuellement, les formules liant les x, y, z aux coordonnées q_1, q_2, q_3 peuvent contenir explicitement *le temps* t :

$$x = \varphi_1(q_1, q_2, q_3, t), \quad y = \varphi_2(q_1, q_2, q_3, t), \quad z = \varphi_3(q_1, q_2, q_3, t).$$

Cela revient à supposer le nouveau système de coordonnées comme animé d'un certain mouvement, d'ailleurs connu par les formules précédentes.

Les équations de Lagrange du mouvement de M seront :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i}, \quad (i = 1, 2, 3),$$

ou, si l'on pose

$$L = T + U,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad (i = 1, 2, 3) \tag{3}$$

Les équations de Lagrange peuvent se déduire du principe suivant, appelé *principe d'Hamilton : Si l'on se donne les positions* M_0, M_1 *du point* M *aux instants* t_0, t_1, la variation que subit l'intégrale

$$J = \int_t^{t_1} L \, . \, dt$$

quand on passe du mouvement naturel à tout mouvement infiniment voisin (compatible avec les liaisons) est nulle.

L'équation aux variations

$$\delta J = o$$

se ramène en effet, après quelques transformations, à

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_{i=1}^{3} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\right] \delta q_i \right\} dt = o \, ,$$

$(\delta q_i = o$ pour $t = t_0, t = t_1)$. δJ devant être nulle pour toutes les valeurs de δq_1, δq_2, δq_3 en fonction de t, on est ramené aux équations de Lagrange.

Les équations de Lagrange, (3), ont la même forme, quel que soit le système de coordonnées employé, en ce sens que si l'on passe des q_1, q_2, q_3 à d'autres coordonnées et que l'on fasse matériellement la substitution dans L, on obtiendra des équations ayant même forme.

Remarquons que les formules permettant de passer des x, y, z aux coordonnées q_1, q_2, q_3 donnent, en dérivant par rapport à t,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_3}\frac{dq_3}{dt} \, ,$$

et deux autres formules analogues. Ces formules montrent que la fonction L se compose d'une première partie, quadratique et homogène par rapport aux dérivés $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$, $\dot{q}_3$, d'une seconde partie linéaire et homogène par rapport aux mêmes dérivées, et enfin d'un terme indépendant de celle-ci. On voit immédiatement que le premier de ces termes peut s'écrire $\frac{1}{2} \, . \, \frac{d\sigma^2}{dt^2}$, $d\sigma^2$ étant le carré de l'élément linéaire (2). On voit que les équations de la mécanique comprennent, comme cas particulier, le *concept d'invariance* des équations de la physique mathématique, par rapport au $d\sigma^2$.

3. — *Extension du principe de relativité.* — Si, en mécanique classique, nous effectuons, dans les équations du mouvement d'un point, la substitution

$$x' = x + a \, . \, t, \quad y' = y, \quad z' = z.$$

où a est une constante, elles ne seront pas altérées, c'est-à-dire *que l'observateur, lié à un trièdre* $O' x' y' z'$, *entraîné par un mouvement de translation uniforme* (de vitesse a) dans la direction Ox, *ne s'apercevra pas de ce mouvement.* C'est le *principe de relativité de Galilée.* Les recherches portant sur l'électromagnétisme et sur l'optique ont amené à modifier ce principe.

L'explication des phénomènes optiques et électromagnétiques fait intervenir les ondulations d'un milieu hypothétique : l'*éther.* Au sujet de l'éther, deux hypothèses peuvent être faites :

1° L'éther est entraîné par les corps en mouvement,

2° L'éther est en repos absolu dans le vide.

Sur ces hypothèses ont été constituées les électrodynamiques de *Herz* et de *Lorentz.* Sans entrer dans le détail de ces théories, bornons-nous aux constatations suivantes :

La *théorie de Herz,* fondée sur la première hypothèse, ne parvient pas à expliquer l'expérience de *Fizeau* sur l'entraînement partiel des ondes lumineuses, ou bien, si elle veut le faire, les équations de l'électrodynamique des corps en mouvement ne coïncident plus avec celles des corps au repos. La première hypothèse doit donc être écartée.

La seconde hypothèse sert de fondement à l'*électro-dynamique* de *Lorentz.* Mais cette seconde hypothèse devrait permettre de mettre en évidence le mouvement de la Terre par rapport à l'éther. Or, les expériences de *Fizeau*, *Michelson* et *Morley* ont montré qu'il n'en était rien. Pour pouvoir expliquer ce dernier point, *Lorentz* a été conduit à admettre que si un corps est en mouvement de translation uniforme, il se contracte dans le sens de ce mouvement.

Il ne faut d'ailleurs pas espérer mesurer physiquement cette contraction, puisque tous nos instruments de mesure se contractent de la même manière.

Ces considérations ont conduit à étendre le principe de relativité et à lui donner la forme suivante : *Aucune mesure électromagnétique ou optique ne permet de mettre en évidence un mouvement de translation uniforme auquel sont soumis à la fois l'observateur et les phénomènes observés.*

En d'autres termes, si un observateur lié à un trièdre $O' x' y' z'$ est entraîné avec celui-ci dans un mouvement de translation uniforme par rapport à un trièdre $O\ x\ y\ z$, et s'il écrit les équations de la mécanique et de l'électrodynamique de son milieu, celles-ci seront les mêmes que celles qu'écrirait un observateur lié à $Ox\ y\ z$.

On devra donc passer des x, y, z aux x' y' z' par des formules laissant invariables ces équations. Mais ici, on rencontrera une nouvelle notion, le *temps local*, c'est-à-dire que, suivant sa position par rapport à $O\ x\ y\ z$, l'observateur lié à $O'\ x'\ y'\ z'$ changera d'origine des temps et d'unité de mesure.

Ces formules de transformation des x, y, z et du temps t en coordonnées x', y', z' et en temps t' du trièdre $O'\ x'\ y'\ z'$, appelées *formules de transformation de Lorentz*, ont la forme, en supposant comme plus haut que la translation est dirigée suivant $O\ x$ et à la vitesse a,

$$x' = \beta\,(x - at), \quad y' = y\,, \quad z' = z\,, \quad t' = \beta\left(t - \frac{a}{c^2}\,x\right);$$

c est la vitesse de la lumière dans le vide, et

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{c}\right)^2}}$$

Remarquons que si la vitesse de translation a est une vitesse analogue à celle que l'on rencontre en mécanique céleste, soit 30 km par seconde, $\frac{a}{c}$ a l'ordre de grandeur $\frac{1}{10}$, c'est-à-dire est très petit. β est très voisin de l'unité et si l'on pose en première approximation $\beta = 1$, $\frac{a}{c^2} = 0$, on retrouve les formules qui conviennent au principe de Galilée.

La distance entre deux points, situés sur une parallèle à la direction du mouvement, est réduite proportionnellement à β ; par contre, si ces deux points sont situés sur une perpendiculaire à cette direction, elle est invariable. L'unité de mesure du temps devient β fois plus grande.

Si nous appelons *masse* d'un point matériel le rapport de la force à l'accélération et si nous considérons le mouvement d'un point rapporté au trièdre $O'\ x'\ y'\ z'$, nous sommes amenés à considérer deux masses pour ce point : la *masse longitudinale*, correspondant aux forces dirigées suivant le sens de la translation, et la *masse transversale*, correspondant aux forces dirigées perpendiculairement à ce sens. Cela paraît d'ailleurs évident, si l'on remarque la manière dont la transformation de Lorentz agit sur les vitesses et les accélérations (par dérivation des formules par rapport au temps). Si m désigne la masse du point matériel mesurée au repos, la masse longitudinale vaut $\frac{m}{\beta^3}$ et la masse transversale, $\frac{m}{\beta}$.

Les équations qui régissent le mouvement d'un point matériel soumis à une force de projections X, Y, Z sur les axes, sont

$$m\frac{d}{dt}\frac{\dot{x}}{\beta}=X, \quad m\frac{d}{dt}\frac{\dot{y}}{\beta}=Y, \quad m\frac{d}{dt}\frac{\dot{z}}{\beta}=Z.$$

Ici encore, on voit qu'en supposant, en première approximation $\beta=1$, on retrouve les formules de la mécanique classique. (1)

4. — *L'espace-temps de Minkowski.* — En mathématiques, on a coutume d'employer la locution « espace à n dimensions ». Il ne faut voir là qu'une notation abrégée, une manière commode de parler. Ainsi, on appellera, par analogie avec ce qui a lieu en géométrie analytique ordinaire, espace à 4 dimensions, l'ensemble des systèmes de valeurs que peuvent prendre 4 variables. On appellera *hyperplan* (ou plan, ou droite), de cet espace l'ensemble des valeurs prises par ces quatre variables lorsqu'elles sont liées par une (ou deux, ou trois) équations linéaires. On aura ainsi remplacé des phrases entières par quelques mots. De plus, on peut utiliser plus commodément l'intuition géométrique.

Observons d'autre part que, lorsque l'on veut étudier le mouvement d'un point sur une droite Ox, qu'on prendra comme axe des abcisses, on peut porter les temps en ordonnées. On a ainsi, dans un plan Ox, Ot une courbe qui est en quelque sorte l'image du mouvement considéré.

Rien ne nous empêche de procéder de même lorsqu'il s'agit d'étudier un *mouvement quelconque*, et c'est ce qu'a fait Minkowski d'une manière systématique (2). Nous rapporterons les mouvements à un système de quatre axes coordonnés Ox, Oy,

---

(1) On trouvera le développement de la mécanique de Lorentz dans l'ouvrage de M. Lémeray : *Le Principe de relativité* (Paris, 1916).

(2) H. Minkowski : *Raüm ùnd Zeit* (Jahresbericht der d. Math. Verein, 1909, Bd XVIII).

Oz, Ot d'un espace à quatre dimensions ; le mouvement d'un point matériel, par exemple, sera maintenant représenté, en général, par une ligne gauche tordue. Cette courbe sera appelée *ligne d'univers* ou *ligne horaire.*

Ces conventions, nous pouvons les utiliser aussi bien pour la mécanique classique de Galilée et Newton que pour celle de Lorentz. Pour plus de simplicité, nous nous bornerons d'ailleurs à des mouvements d'un point matériel sur l'axe Ox, de manière à pouvoir négliger les axes Oy, Oz.

Remarquons tout d'abord qu'un point se mouvant sur l'axe des x avec une vitesse constante a, a pour ligne horaire une droite d'équation $x = x_0 + at$. Un point fixe, d'abcisse x_0, a pour ligne horaire la droite $x = x_0$, parallèle à l'axe des t.

Plaçons-nous en premier lieu dans le cas de la mécanique classique.

Considérons, dans le plan Oxt, une droite Ot' passant par O et imaginons deux observateurs O_1, O_2 placés en O. Supposons que l'axe des x se déplace parallèlement à lui-même, avec une vitesse constante et que les deux observateurs O_1, O_2 soient entraînés par ce mouvement, mais de manière que O_1 reste sur Ot, O_2 sur Ot'. Supposons de plus que O_1 et O_2 ne soient pas capables de désceller le mouvement qui anime Ox et les entraîne tous deux.

Pour O_1, le point de rencontre O_2 de Ox avec Ot' est en mouvement, et ce mouvement a précisément pour ligne horaire la droite Ot'. Au contraire, O_2 se croira fixe et verra O_1 en mouvement.

La translation de Ox sera donc interprétée différemment par nos deux observateurs ; ce n'est que la traduction du principe de relativité de Galilée. Pour nous, il est donc indifférent de donner raison à l'un ou à l'autre, et nous pouvons, par suite, prendre comme axe des temps, soit Ot, soit Ot'.

Ainsi donc, *en mécanique classique, l'axe des temps peut être choisi arbitrairement.*

Passons au cas de la mécanique de Lorentz et cherchons à traduire en langage géométrique le principe de relativité généralisé.

Supposons qu'un observateur O_1, placé en O, lance au temps $t = o$ un signal optique dans la direction Ox. Ce signal se transmettra avec la vitesse constante c et aura pour ligne horaire la droite OA d'équation $x = ct$. Supposons de plus qu'un second observateur O_2 se déplace, sur l'axe Ox, par rapport à O, avec une vitesse constante a. Pour O_2, la droite OA représentera encore la propagation du signal optique, mais avec un nouvel axe des temps Ot'. S'il était possible que, dans le système d'axes Ox, Ot', le mouvement du signal par rapport à O_1 soit représenté par la ligne horaire OA, la vitesse de propagation du signal serait $c—a$. Or, ceci est en opposition avec le principe de relativité généralisé et, pour que celui-ci soit vérifié, il faut, si l'on change l'axe des temps, changer également l'axe des x de telle manière que, par rapport aux nouveaux axes, la droite OA conserve la même équation. Alors, la vitesse de la lumière vaut toujours c.

Dans la mécanique de Lorentz, on ne peut changer l'axe des temps sans changer en même temps l'orientation de l'axe des x, ou, plus généralement, l'orientation de l'espace x y z (1).

Ces phénomènes sont d'ailleurs régis par les transformations de Lorentz. Dans la nouvelle mécanique, l'*espace et le temps* ne sont plus, comme dans l'ancienne, des concepts indépendants, pouvant être séparés, *ils sont liés l'un à l'autre.*

On peut, dans le but de simplifier les formules, poser

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = ict, \quad (i = \sqrt{-1}).$$

Une transformation de Lorentz, où l'axe des x ne joue plus le rôle privilégié que nous lui avions assigné plus haut (direction de la translation) se traduit par les formules

$$x'_i = \alpha_{i0} + \alpha_{i1} \; x_1 + \alpha_{i2} \; x_2 + \alpha_{i3} \; x_3 + \alpha_{i4} \; x_4 \quad , (i = 1, 2, 3, 4).$$

De telles transformations laissent invariable la forme de l'expression différentielle

$$ds_0^2 = — dx_1^2 — dx_2^2 — dx_3^2 — dx_4^2,$$

en ce sens que celle-ci se transforme en une expression

$$ds_0^2 = — dx'^2_1 — dx'^2_2 — dx'^2_3 — dx'^2_4.$$

C'est là un fait qui a été mis en lumière par M. Marcolongo (2).

5. — *Extension du principe d'Hamilton.* — En étendant le principe d'Hamilton, on peut synthétiser ces différents faits.

---

(1) Voir à ce sujet l'intéressant article de M. Castelnuovo : *Il principio di relatività e i fenomeni ottici* (Scientia, 1911, vol. IX).

(2) Marcolongo : *Sugli integrali delle equazioni della elettrodinamica* (Rend. R. Accad. Lincei, 1906, vol. XV).

C'est ce que nous montrerons ici en suivant la marche indiquée par *M. Levi-Civitù* (1).

Soit c une vitesse très grande par rapport à celles que nous avons à considérer, de manière que nous puissions négliger $\frac{v^2}{c^2}$ et $\frac{U}{c^2}$ vis-à-vis de l'unité.

Observons que, pour une variation δt nulle pour $t=t_0$, $t=t_1$, on a

$$\delta . \int_{t_0}^{t_1} dt = o.$$

Substituons, dans le principe ordinaire d'Hamilton, la fonction $c^2 - L$ à la fonction L et appliquons ce principe pour des variations arbitraires δq_1, δq_2, δq_3, δt nulles pour $t=t_0$, $t=t_1$. Nous trouverons les équations de Lagrange (3) et en plus l'équation

$$\frac{d}{dt}\left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\dot{q}_1 - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\dot{q}_2 - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3}\dot{q}_3\right) = \frac{\partial L}{\partial t},$$

qui provient de la variation de t. Or, cette équation est une conséquence directe des équations de Lagrange. La généralisation que nous venons de faire est donc valable.

Observons que, d'après une formule élémentaire, nous avons

$$\left\{ 1 - \left(\frac{v^2}{c^2} + \frac{2U}{c^2}\right)\right\}^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{c^2} + \frac{2U}{c^2}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{v^2}{c^2} + \frac{2U}{c^2}\right)^2 - \ldots\ldots$$

Donc, en négligeant, en première approximation les termes du second degré, nous avons

$$c^2 - L = c^2\left(1 - \frac{v^2}{2c^2} - \frac{U}{c^2}\right) = c^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} - \frac{2U}{c^2}} = c\sqrt{c^2 - v^2 - 2U}.$$

La quantité sous le radical est d'ailleurs, d'après nos hypothèses, positive.

Le principe d'Halmilton devient, en supposant pour plus de simplicité la masse $m = 1$, et en faisant disparaître un facteur constant c,

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{c^2 - v^2 - 2U}\, dt = o$$

(1) Levi-Civita : *Comment un conservateur...* Loc. cit.

Nous avons

$$v^2 = \frac{d\sigma^2}{dt^2},$$

d'où, en posant

$$ds^2 = (c^2 - 2\mathrm{U})\ dt^2 - d\sigma^2, \qquad (ds^2 > o)$$

une nouvelle forme du principe d'Hamilton

$$(4) \qquad \delta \int ds = o.$$

Nous allons en déduire quelques *conséquences*.

Si nous envisageons le mouvement d'un point qui n'est sollicité par aucune force, nous devons poser $\mathrm{U} = o$ et l'équation aux variations (4) prend la forme

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{c^2 - \frac{d\sigma^2}{dt^2}}\ dt = o.$$

Supposons que les coordonnées q_1, q_2, q_3 soient des coordonnées cartésiennes x, y, z. On a

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

et, en posant comme tantôt

$$ds_0^2 = c^2\, dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2,$$

l'équation (4) devient

$$\delta \int ds_0 = o.$$

On déduit de cette relation que $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ et par suite $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$ sont constants. La vitesse est constante et le mouvement est uniforme.

Si l'on effectue une transformation de coordonnées et si, par rapport à ces nouvelles coordonnées x', y', z', t', on a encore

$$ds_0^2 = c^2\, dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2.$$

c'est-à-dire si l'on effectue une transformation de Lorentz, le mouvement du point sera encore considéré, par rapport aux nouveaux axes, comme un mouvement uniforme.

En général, après cette transformation, la valeur de la vitesse aura changé. Mais si le mouvement uniforme dont il est question a la vitesse c, on aura

$$c^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2,$$

et par suite

$$ds_0^2 = c^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = o.$$

Par rapport aux nouvelles coordonnées, ces propriétés subsisteront et le mouvement aura la même vitesse c.

Si l'on se reporte à ce qui a été dit plus haut au sujet de la vitesse de la lumière (principe de relativité généralisé), on voit que le mouvement de la lumière est, comme le mouvement d'un point matériel qui n'est sollicité par aucune force, régi par l'équation

$$\delta \int ds_0 = o.$$

Mais dans le cas de la lumière, on a de plus $ds_0^2 = o$. La constante c est alors la vitesse de propagation de la lumière dans le vide.

6. — *Généralisation. — Courbure des rayons lumineux sous l'action de masses matérielles.* — Nous venons de voir le rôle joué par la forme différentielle

$$ds_0^2 = c^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

dans la propagation de la lumière dans le vide. D'autre part, les équations, qui régissent le mouvement d'un point matériel animé d'une vitesse qui a au plus la grandeur de celle que l'on rencontre en Astronomie, et lorsque l'on se trouve en présence de masses matérielles ($U \neq o$), sont liées à l'expression différentielle

$$ds^2 = (c^2 - 2U)\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Dans un but de généralisation, en vue de synthétiser les phénomènes physiques en un ensemble unique, on admettra que, en présence de masses matérielles, la loi de la propagation de la lumière, aussi bien que les mouvements des points matériels, sont dominés par le même ds^2.

La propagation des rayons lumineux sera régie par le principe d'Hamilton $\delta\int ds = o$, avec la condition $ds^2 = o$.

Mais le développement de cette généralisation entraîne cette conséquence que les rayons lumineux s'incurvent dans le voisinage d'une masse matérielle. Pour le montrer, on traduit le principe d'Hamilton (4) en équations différentielles, puis, à l'aide de la relation $ds^2=o$, on élimine t. On trouve ainsi les équations des trajectoires des rayons lumineux.

L'éclipse de Soleil du 29 mai 1919 semble avoir donné raison à cette théorie. Les observations de MM. *Eddington* et *Crommelin* ont montré, pour les étoiles voisines du Soleil, une déviation de $1'' \, 8$ (avec une erreur de $\pm \, 0'',3$), valeur qui correspond à peu de chose près à celle qui est donnée par le calcul (1).

Remarquons que nous avons considéré, dans ce qui précède, l'espace rapporté à un système de coordonnées cartésiennes. Nous pouvons en général passer à des coordonnées quelconques q_1, q_2, q_3, q_4, liées aux premières par les équations

$$x = \varphi_1(q_1, q_2, q_3, q_4), \quad y = \varphi_2, \quad z = \varphi_3, \quad t = \varphi_4.$$

L'expression ds^2 devient une certaine forme

$$ds^2 = g_{1,1}\, dq_1^2 + \cdots + g_{4,4}\, dq_4^2 + 2g_{1,2}\, dq_1\, dq_2 + \cdots + 2g_{3,4}\, dq_3\, dq_4,$$

dont les coefficients dépendent, en général, de q_1, q_2, q_3, q_4.

On peut alors adopter le langage géométrique et dire que ds^2 représente le carré de la distance de deux points infiniment voisins, appartenant à un espace courbe à 4 dimensions, V_4.

On sait qu'alors, l'équation (4) définit les géodésiques de cet espace (ligne de plus court chemin). Ces géodésiques sont donc les courbes horaires du mouvement d'un point matériel, ou de la propagation d'un rayon lumineux.

7. — *La physique mathématique d'Einstein.* — Nous avons vu plus haut, en construisant les équations

$$\text{(1)} \qquad R_1 = o, \; R_2 = o, \; \cdots, \; R_e = o,$$

d'un phénomène déterminé, qu'elles ont une forme invariante par rapport aux coefficients a_{ik} de l'expression différentielle

$$\text{(2)} \qquad d\sigma^2 = \Sigma a_{ik}\, dq_i\, dq_k \quad , \quad (i, k = 1, 2, 3).$$

Ces équations contiennent, en général, le temps t, mais les

(1) Voir Bosler : *La théorie d'Einstein et la nouvelle loi de la gravitation* (Revue Scientifique, juin 1920).

transformations de coordonnées que nous avons supposé pouvoir effectuer, pour conserver la forme invariante des équations (1), étaient indépendantes du temps.

On peut faire subir, aux équations (1) quelques modifications qui permettront de leur donner un *caractère invariant*, non plus par rapport aux coefficients de $d\sigma^2$ seulement, mais encore par rapport aux coefficients d'un ds^2 quelconque, à quatre variables q_1, q_2, q_3, t (ou q_1, q_2, q_3, q_4), tel que si l'on fait $dt=0$, on retrouve $-d\sigma^2$. De telles modifications n'altèrent pas d'une manière sensible les quantités intervenant dans ces équations; elles ont pu être faites grâce aux méthodes du *calcul différentiel absolu* (1).

Une première extension a fait passer du $d\sigma^2$ euclidien

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

au ds_0^2 de Lorentz:

$$ds_0^2 = c^2\,dt^2 - d\sigma^2.$$

On a été conduit à cette extension par les théories électromagnétiques, comme nous l'avons rappelé au début. Il est remarquable qu'il existe, dans ces théories, un cas où les équations (1) ne subissent pas de modifications.

Ensuite, tenant compte de la présence de masses matérielles, on est passé au

$$ds^2 = c^2\left(1 - \frac{2U}{c^2}\right)dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

C'est ce qui a été fait plus haut dans un cas très particulier, mais il serait possible d'étendre ces raisonnements.

Cette idée a été *généralisée* par *Einstein*. Dans le cas qui vient d'être rappelé, la présence de masses matérielles agit sur le coefficient de dt^2 dans la forme ds^2. Le savant suisse admet que, en général, toutes les circonstances physiques influent, non seulement sur le coefficient de dt^2, mais sur tous les coefficients g_{ik} de la forme différentielle

$$ds^2 = \Sigma\, g_{ik}\, dq_i\, dq_k \quad , \quad (i, k = 1, 2, 3, 4),$$
$$(g_{ik} = g_{ki}).$$

(1) Ricci et Levi-Civita : *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications* (Math. Annalen, 1900, Bd. 54).

Cette influence est d'ailleurs quantitativement très légère, de l'ordre de grandeur de $\frac{U}{c^2}$.

Pour $dq_4 = o$, on retrouvera la forme différentielle $d\sigma^2$ qui définit la distance de deux points infiniment voisins de l'espace dans lequel se passent les phénomènes étudiés. Or, les géomètres ont depuis longtemps étudié les propriétés métriques d'espaces à trois dimensions définis par le carré $d\sigma^2$ de leur élément linéaire. Ces espaces ne sont pas tous applicables sur notre espace ordinaire (dans le même sens que la sphère n'est pas applicable sur le plan).

La théorie d'Einstein établit donc une dépendance entre les phénomènes géométriques, mécaniques et physiques. Elle implique une *généralisation du principe de relativité : Aucune mesure physique ne peut mettre un mouvement absolu en évidence.*

Les dix cœfficients g_{ik}, appelés *potentiels gravitationnels*, sont liés entre eux par des équations différentielles, au nombre de dix (comme les coefficients), les *équations gravitationnelles d'Einstein.*

On a cherché à établir les équations gravitationnelles d'Einstein en partant d'un principe d'Hamilton généralisé. Ces recherches ont été condensées par M. HILBERT [1] qui a fondé ses déductions sur les axiomes suivants :

I. — *Les lois des phénomènes physiques se définissent par une fonction universelle H, portant sur les dix potentiels gravitationnels* g_{ik}, *sur leurs dérivées du premier et du second ordre par rapport aux coordonnées* q_1, q_2, q_3, q_4 ; *sur les quatre potentiels électrodynamiques* r_1, r_2, r_3, r_4 *et sur leurs dérivées du premier ordre par rapport à* q_1, q_2, q_3, q_4. *La variation de l'intégrale*

$$\int H \, dw$$

pour chacune des 14 quantités g_{ik}, r_i *est nulle.*

---

[1] HILBERT : *Die Grundlagen der Physik* (Nachrichten. K. Gesellsch. der Wissensch., Gœttingen, 1915).

On a posé

$$dw = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} dq_1\, dq_2\, dq_3\, dq_4.$$

II. *La fonction universelle H est un invariant vis-à-vis d'une transformation quelconque des coordonnées* q_1, q_2, q_3, q_4.

Nous limiterons ici notre exposé de la théorie générale d'Einstein ; nous nous contenterons d'indiquer, pour le lecteur que la chose intéresse, quelques ouvrages où l'on pourra trouver établies les équations gravitationnelles, et nous dirons quelques mots des cas particuliers étudiés.

DE DONDER. — *Théorie du champ électromagnétique de Maxwell-Lorentz et du champ gravifique d'Einstein* (Paris, Gauthiers-Villars, 1919).

Id — *La gravifique* (Bull. de l'Acad. R. de Belgique, 1919).

Id. et VANDERLINDEN. — *Théorie nouvelle de la gravitation* (Bull. de l'Acad. R. de Belgique, 1920).

HILBERT. — *Die Grundlagen der Physik* (2 mémoires) (Nachr. K. Gesellsch. der Wissenchaften, Gœttingen, 1915, 1917).

LEVI-CIVITA. — *Sulla espressione analitica spettante al tensore gravitazionale nella teoria di Einstein* (Rend. R. Accad. Lincei, 1917).

Id. — *Statica einsteiniana* (Rend. R. Accad. Liencei, 1917).

PALATINI. — *Deduzione invariantiva delle equazioni gravitazionali dal principio d'Hamilton* (Rend. Circolo Matem. di Palermo, 1919, vol. XLIII).

VANDERLINDEN. — *Les équations du champ de gravitation d'Einstein* (Bull. de l'Acad. R. de Belgique, 1920).

WEYL. — *Raùm, Zeit, Materie* (3e édition), (Berlin, 1920).

8. — *Cas particuliers.* — Les théories d'Einstein ont été appliquées dans quelques cas particuliers.

L'un de ceux-ci, qui a conduit à des conséquences importantes, est celui d'une masse attirante unique, le soleil, par exemple. Etudié tout d'abord par Einstein (1) au moyen de l'intégration approchée des équations gravitationnelles, puis par Schwarzschild (2), Palatini (3) et De Donder (4), il a permis de rendre compte du mouvement rétrograde du périhélie de Mercure et de l'amplitude de ce mouvement, fait que l'on n'avait pas pu expliquer auparavant.

M. Levi-Cività a étudié le cas du champs newtonien et intégré les équations gravitationnelles (5). En particulier, il a étudié le cas de l'attraction d'un cylindre homogène, circulaire et indéfini, dont nous dirons quelques mots.

Considérons un espace ordinaire rapporté à des coordonnées cylindriques ω, r, z. Plaçons-y un cylindre homogène, circulaire, indéfini, d'axe Oz. Ce cylindre agit sur les points extérieurs comme si toute la masse était distribuée uniformément le long de l'axe, avec une densité constante μ par unité de longueur. Si f est la constante d'attraction, on a le potentiel $.\,2f\,.\,\mu.\log.\frac{r_0}{r}$, r_0 étant une constante.

Le ds^2 convenant à ce cas a la forme :

$$ds^2 = c^2\left(1 + \frac{4f\mu}{c^2}\log.\frac{r_0}{r}\right)dt^2 - \left(1 - \frac{4f\mu}{c^2}\log.\frac{r_0}{r}\right)(dr^2 + dz^2 + r^2d\omega^2).$$

La force agissant sur un point est dirigée vers l'axe et a pour expression

$$\frac{2f\mu}{\rho}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{2h}.$$

moyennant $h = \frac{2f\mu}{c^2}$, $\rho = \frac{r^n}{n\,r_0^{n-1}}$, $\rho_0 = \frac{r_0}{n}$, $n = 1 - h$.

---

(1) EINSTEIN : *Perihelbewegùng des Merkur* (Sitrùngsberichte K. Akad. Berlin, 1915).

(2) SCHWARZSCHILD : *Ueber das Gravitations feld eines Massenpunktes* (Sitzùngsb. K. Akad. Berlin, 1916). Voir aussi Hilbert, loc. cit.

(3) PALATINI : *Lo spostamento del perielio di Mercurio...* (Il nuovo Cimento, 1917, vol. XIV).

(4) DE DONDER : *La Gravifique,* loc. cit. Dans ce travail, M. De Donder considère d'autres cas particuliers.

(5) LEVI-CIVITA : *ds^2 einsteiniani in campi neutoniani* (Rend. R. Acad. Lincei, 1917, 1918 et 1919).

Le premier facteur correspond à l'attraction newtonienne externe d'un cylindre homogène à la distance ρ de l'axe ; le second, très voisin de l'unité, est la correction einsteinienne.

La présence du cylindre agit sur la forme de l'espace ; elle provoque une distorsion de celui-ci. Les plans perpendiculaires à Oz (d'équations $z = c^{te}$) deviennent des surfaces à courbure nulle, les cylindres $r = c^{te}$ deviennent des surfaces à courbure $-\frac{h}{\rho^2}$ et les plans méridiens $w = c^{te}$ deviennent des surfaces à courbure $\frac{h}{\rho^2}$.

Bruxelles, 9 septembre 1920. L. G.