ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE.
Extrait des *Bulletins de la Classe des sciences*. Séance du 5 février 1921, n° 2, pp. 105-124.

Géométrie. — Recherches sur les involutions cubiques appartenant à une surface algébrique,

par Lucien GODEAUX,
Docteur en sciences physiques et mathématiques, professeur extraordinaire à l'École militaire (*).

Dans nos recherches antérieures (**), nous avons démontré que si une involution I_n, d'ordre n, appartenant à une surface algébrique F, possède un nombre fini de points de coïncidence, elle est engendrée par un groupe de transformations birationnelles de la surface en elle-même. En particulier, si n est premier, le groupe est cyclique et formé par les différentes puissances d'une transformation birationnelle T, de période n. Nous limitant à ce cas, nous avons partagé les points de coïncidence de l'involution en deux classes, d'après la manière dont la transformation T agit sur les points de F, infiniment voisins des points de coïncidence. D'une manière plus précise, un point P de F sera :

a) Un point de coïncidence parfaite de I_n si T opère comme l'identité sur les points de F formant le domaine du premier ordre de P ;

b) Un point de coïncidence non parfaite dans le cas opposé.

(*) Présenté par MM. Stuyvaert et Neuberg.

(**) *Sur les involutions douées d'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique.* (Rend. R. Accad. Lincei, 1914.) — *Recherches sur les involutions douées d'un nombre fini de points de coïncidence, appartenant à une surface algébrique.* (Bull. de la Soc. Math. de France, 1919.)

Nous supposons connues dans le travail suivant, les recherches de géométrie sur une courbe ou sur une surface algébriques. Le lecteur pourra consulter à ce sujet les belles *Lezioni di Geometria algebrica* (Padova, Draghi, 1908) de M. Severi et l'article sur les surfaces algébriques écrit pour l'*Encykl. der math. Wissenschaften* (Bd III, vol. 2, fasc. 6, 1915), par MM. Castelnuovo et Enriques.

Ainsi que nous l'avons montré dans nos *Recherches sur les involutions*..., on peut prendre, comme modèle projectif de la surface Φ, image de l'involution I_3, une surface simple, normale, située dans un espace linéaire S_r à $r \geq 3$ dimensions, et possédant, aux $\alpha + \beta$ points de diramation, les singularités suivantes :

1° Aux α points de diramation parfaite $A_1, A_2, \ldots, A_\alpha$, des points triples coniques à cônes tangents rationnels;

2° Aux β points de diramation non parfaite $B_1, B_2, \ldots, B_\beta$, des points doubles biplanaires ordinaires.

Chacun des α points triples $A_1, A_2, \ldots, A_\alpha$ est équivalent à une courbe rationnelle de degré -3, que nous désignerons par le même symbole que le point considéré.

Un des points doubles B_i $(0 < i \leq \beta)$ est équivalent à deux courbes rationnelles de degré -2, ayant un point commun, courbes que nous désignerons respectivement par B_{i1}, B_{i2}.

Les $\alpha + 2\beta$ courbes rationnelles $A_1, \ldots, A_\alpha, B_{11}, B_{12}, \ldots, B_{\beta 2}$ sont des courbes fondamentales propres pour le système $|\Gamma|$ des sections hyperplanes Γ de Φ.

Désignons par n le degré du système $|\Gamma|$ (ordre de Φ), par π son genre. A une courbe Γ correspond, sur la surface F, une courbe C, de genre $3\pi - 2$ et de degré $3n$, appartenant à un système complet $|C|$, transformé en lui-même par T (en ce sens que T fait correspondre, à une courbe de $|C|$, une courbe de $|C|$ distincte ou non de la première). Nous supposerons que la dimension R de $|C|$ est supérieure à celle, r, de $|\Gamma|$, et nous montrerons, dans le paragraphe suivant, que nous n'imposons pas en cela une condition restrictive à la surface Φ.

Le système $|C|$ est simple. En effet, s'il était composé, ce ne pourrait être au moyen de I_3, et, par suite, $|\Gamma|$ serait également composé au moyen d'une involution, ce qui est impossible.

Le système $|C|$ est dépourvu de points-base, car autrement, $|\Gamma|$ posséderait également des points-base, ce qui est impossible.

2. — Supposons pour un moment que $|C|$ et $|\Gamma|$ aient la même dimension r; nous allons montrer qu'on peut remplacer Φ par une surface Φ_k, birationnellement identique, ayant pour sections hyperplanes des courbes $|k\Gamma|$ et possédant les mêmes singularités que Φ, mais telle que les courbes qui correspondent, sur F, aux courbes $k\Gamma$, forment un système complet plus ample que $|k\Gamma|$.

Le système $|k\Gamma|$ est simple et dépourvu de points-base, de même que $|\Gamma|$. Rapportons projectivement les courbes de $|k\Gamma|$ aux hyperplans d'un espace linéaire à r_k dimensions, r_k étant la dimension de $|k\Gamma|$; nous obtenons la surface Φ_k, simple, normale, birationnellement identique à Φ. De plus, les courbes $A_1, \ldots, A_\alpha, B_{11}, \ldots, B_{\beta 2}$ étant fondamentales propres pour $|k\Gamma|$, Φ_k possède α points triples coniques, à cônes tangents rationnels, et β points doubles biplanaires ordinaires.

Choisissons maintenant k, de manière que les courbes $k\Gamma$ soient non spéciales (c'est-à-dire non contenues dans le système canonique de Φ). A une courbe $k\Gamma$ correspond, sur F, une courbe kC. Les degrés et les genres de $|kC|$, $|k\Gamma|$ sont respectivement égaux à

$$3k^2n, \qquad 3k\pi + \frac{3}{2}k(k-1)n - 3k + 1$$

pour $|kC|$,

$$k^2n, \qquad k\pi + \frac{1}{2}k(k-1) - k + 1$$

pour $|k\Gamma|$.

Supposons que $|kC|$ ait la même dimension r_k que $|k\Gamma|$ et choisissons k pour que, p_a étant le genre arithmétique de F,

$$p_a + \frac{3}{2}k(k+1)n - 3k\pi + 3k$$

soit supérieur à 0, ce qui est toujours possible. Alors, d'après le théorème de Riemann-Roch sur une surface algébrique, on a ($|kC|$ n'étant pas spécial)

$$r_k \geq p_a + \frac{3}{2}k(k+1)n - 3k\pi + 3k.$$

Mais les courbes de $|k\Gamma|$ découpent, sur l'une d'entre elles, une série linéaire de degré k^2n et de dimension $r_k - 1$. Si cette série n'est pas spéciale, le théorème de Riemann-Roch sur une courbe algébrique donne

$$r_k - 1 = \frac{1}{2}k(k+1)n - k\pi + k - 1.$$

On a donc

$$\frac{1}{2}k(k+1)n - k\pi + k \geq p_a + \frac{3}{2}k(k+1)n - 3k\pi + 3k,$$

c'est-à-dire

$$p_a + k(k+1)n - 2k(\pi - 1) \leq 0. \tag{1}$$

Si cette série est spéciale, le théorème de Clifford donne

$$r_k - 1 \leq \frac{k^2}{2}n;$$

d'où l'inégalité

$$p_a + \frac{1}{2}k(2k+3)n - 3k(\pi - 1) - 1 \leq 0. \tag{2}$$

Il est toujours possible de choisir k de manière que les inégalités (1) et (2) ne soient pas vérifiées. Et par conséquent, il existe des surfaces Φ_k pour lesquelles $|k\Gamma|$ est moins ample que $|kC|$.

Si donc on avait une surface Φ telle que $r = R$, on remplacerait Φ par une surface Φ_k, k ayant une valeur convenable, et l'on se bornerait à changer de notation.

3. — Retournons au système $|C|$ défini plus haut et rapportons projectivement les courbes de ce système aux hyperplans d'un espace linéaire S_R à R dimensions. F se transforme birationnellement en une surface simple, normale, d'ordre $3n$, que nous continuerons à désigner par F. Nous continuerons également à désigner par C les sections hyperplanes de cette nouvelle surface.

A la transformation T correspond une transformation birationnelle H de la nouvelle surface F en elle-même, et cette transformation H change une section hyperplane en une section hyperplane. Observons que, sur la surface F primitive, T change un faisceau de courbes C en un faisceau de courbes C; donc H change un faisceau de sections hyperplanes de la nouvelle surface F en un faisceau de sections hyperplanes. La transformation H détermine donc, dans l'espace *tangentiel* S_R, une homographie et, par conséquent, H est déterminée, sur F, par une homographie de l'espace *ponctuel* S_R. Cette homographie, que nous désignerons toujours par H, a la période **3**; elle est donc une homographie générale (*).

L'homographie H possède, dans S_R, deux ou trois espaces linéaires fondamentaux (formés de points invariants pour H) et, corrélativement, deux ou trois systèmes linéaires fondamentaux d'hyperplans (invariants pour H). L'un de ces systèmes, $\Sigma^{(0)}$, est formé par les hyperplans qui découpent, sur F, les courbes C transformées des sections hyperplanes Γ de Φ. (Dans la suite, nous désignerons plus spécialement une telle courbe C par le symbole C_0.) Le système $\Sigma^{(0)}$ a donc la dimension r. D'autre part, le système $|\Gamma|$ étant dépourvu de points-base, il en est de même du système (incomplet) $|C^0|$ et, par conséquent, l'espace linéaire commun aux hyperplans de $\Sigma^{(0)}$ ne rencontre pas F.

(*) BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi.* (Pisa, Spoerri, 1907.) On trouvera, dans le chapitre IV de cet ouvrage, les propriétés des homographies dont il est fait usage ici.

Corrélativement à $\Sigma^{(0)}$, il existe un espace fondamental $S^{(0)}$, linéaire (l'espace fondamental conjugué de $\Sigma^{(0)}$), de dimension r, ne rencontrant pas l'espace commun aux hyperplans de $\Sigma^{(0)}$. Les points de coïncidence (*) de I_3 se trouvent nécessairement dans $S^{(0)}$ et cet espace rencontre donc F en $\alpha + \beta$ points. En effet, les espaces fondamentaux de H, différents de $S^{(0)}$, sont tous communs aux hyperplans de $\Sigma^{(0)}$.

4. — Soit P un point de coïncidence de I_3, donc commun à F et à $S^{(0)}$. Ainsi que nous l'avons démontré dans nos *Recherches sur les involutions...*, les courbes C_0 passant par P acquièrent, en ce point, soit un point triple à tangentes variables, soit un point double à tangentes fixes, suivant que P est un point de coïncidence parfaite ou non. Les hyperplans de $\Sigma^{(0)}$ passant par P contiennent donc le plan tangent à F en ce point. Ces hyperplans ont en commun un espace linéaire S_σ à $\sigma = R - r$ dimensions, transformé en lui-même par H.

Supposons que l'espace S_σ ait en commun, avec $S^{(0)}$, un espace (linéaire) S' à σ' dimensions. Deux cas peuvent se présenter :

a) L'homographie H possède, dans S_R, outre $S^{(0)}$, deux espaces fondamentaux $S^{(1)}$, $S^{(2)}$ respectivement à r_1 et r_2 dimensions, et l'on a

$$r + r_1 + r_2 + 3 = R + 1.$$

Alors, H possède, dans S_σ, trois espaces fondamentaux $S^{(1)}$, $S^{(2)}$ et S'. On doit avoir

$$\sigma' + r_1 + r_2 + 3 = \sigma + 1 = R + r + 1.$$

On en déduit $\sigma' = 0$.

(*) Les points de coïncidence sont évidemment simples pour F; s'ils étaient multiples, il y aurait lieu de considérer des courbes de coïncidence infiniment petites formées par les domaines de ces points, cas qui ne rentre pas dans le cadre de nos recherches.

b) L'homographie H possède, dans S_R, deux espaces fondamentaux $S^{(0)}$ et $S^{(1)}$, ce dernier de dimension r_1 telle que

$$r + r_1 + 2 = R + 1.$$

Dans S_σ, H possède deux espaces fondamentaux $S^{(1)}$, S', et l'on doit avoir

$$\sigma' + r_1 + 2 = \sigma + 1 = R - r + 1.$$

Par conséquent, $\sigma' = 0$.

L'espace S_σ a donc en commun, avec $S^{(0)}$, le seul point P.

Si $\sigma \geq 2$, on a $r \leq R - 2$ et l'homographie H ne peut être une homologie. L'espace S_σ contient le plan tangent en P, à la surface F et ce plan ne rencontre $S^{(0)}$ qu'au seul point de contact P.

Le cas $\sigma = 1$ ne peut se présenter. Dans ce cas, en effet, H est une homologie, l'espace $S^{(0)}$ est un hyperplan ($r = R - 1$) et, par conséquent, il y a une infinité de points de coïncidence pour l'involution I_3, contre l'hypothèse.

Observation. — Le cas $\sigma = 1$ peut effectivement se présenter lorsque la surface F est, par exemple, une surface triple, mais ici, nous avons construit une surface F simple, ou plutôt un modèle projectif simple de F.

5. — Examinons de plus près la manière dont se comporte le plan tangent à F en un point de coïncidence.

Soit tout d'abord P un point de coïncidence non parfaite. L'homographie H échange entre elles les tangentes à F en P et en laisse deux invariantes. Soient t_1, t_2 ces deux tangentes. H transforme donc le plan tangent τ à F en P en lui-même et donne naissance, dans ce plan, à une homographie h de période 3. Le plan τ n'ayant qu'un seul point commun P avec l'espace fondamental $S^{(0)}$, l'homographie h détermine sur t_1 et sur t_2 des involutions cubiques cycliques possédant chacune,

*

outre P, un point de coïncidence. Désignons ces deux points respectivement par P_1, P_2. h ne peut être une homologie, car alors toutes les tangentes à F en P seraient invariantes pour h et, par suite, pour H. h est donc une homographie cubique cyclique présentant trois points fondamentaux P, P_1, P_2, et trois seulement. Les points P_1, P_2 appartiennent nécessairement à des espaces fondamentaux de H dans S_R, et ces espaces sont distincts. En effet, si P_1, P_2 appartenaient au même espace fondamental, la droite $P_1 P_2$ serait une droite fondamentale pour h et cette homographie serait une homologie, ce qui est impossible. Par conséquent, si $\beta > 0$, H doit posséder trois espaces fondamentaux $S^{(0)}$, $S^{(1)}$, $S^{(2)}$. En chaque point de coïncidence non parfaite, les deux tangentes invariantes rencontrent, l'une $S^{(1)}$, l'autre $S^{(2)}$.

Supposons maintenant que P soit un point de coïncidence parfaite. Alors, H transforme en elle-même chaque tangente à F en P et détermine, dans le plan τ tangent à F en P, une homographie h de période 3. Chaque tangente à F en P étant invariante pour H (et par suite pour h) et ne rencontrant $S^{(0)}$ qu'en un point P, possède un second point invariant pour H (et pour h). Par suite, h est une homologie. L'axe d'homologie de h dans le plan τ se trouve dans un second espace fondamental de H dans S_R. S'il existe un troisième espace fondamental de H dans S_R, le plan τ ne peut évidemment pas le rencontrer.

En résumé : *En un point de coïncidence non parfaite, le plan tangent à* F *ne rencontre pas* $S^{(0)}$ *en dehors du point de contact. Ce plan tangent a un point (et un seul) commun avec les (nécessairement deux) autres espaces fondamentaux de* H *dans* S_R.

En un point de coïncidence parfaite, le plan tangent à F *ne rencontre pas* $S^{(0)}$ *en dehors du point de contact. Ce plan tangent rencontre un second espace fondamental de* H *dans* S_R *en une droite et ne rencontre pas le troisième, si celui-ci existe.*

De ces propriétés, nous allons déduire l'existence d'un ou de deux nouveaux systèmes linéaires sur la surface Φ.

6. — Supposons que l'homographie H possède, dans S_R, trois espaces fondamentaux $S^{(0)}$, $S^{(1)}$, $S^{(2)}$ respectivement de dimensions r, r_1, r_2 et, corrélativement, trois systèmes conjugués d'hyperplans unis $\Sigma^{(0)}$, $\Sigma^{(1)}$, $\Sigma^{(2)}$ (ayant, comme on sait, les mêmes dimensions respectivement r, r_1, r_2). On a d'ailleurs

$$r + r_1 + r_2 = R - 2.$$

D'après ce que nous venons de voir, en chaque point de coïncidence non parfaite, il y a deux tangentes à F s'appuyant chacune sur un des espaces $S^{(1)}$, $S^{(2)}$. Désignons, d'autre part, par α_1 le nombre de points de coïncidence parfaite tels que les plans tangents à F en ces points s'appuient (en une droite) sur $S^{(2)}$ et supposons que ces points soient précisément les α_1 premiers, donc ceux qui correspondent à $A_1, \ldots, A_{\alpha_1}$. Il y aura alors $\alpha_2 = \alpha - \alpha_1$ points de coïncidence parfaite, qui correspondent à $A_{\alpha_1+1}, \ldots, A_\alpha$, tels que les plans tangents à F en ces points s'appuient en une droite sur $S^{(1)}$.

Les hyperplans de $\Sigma^{(0)}$ découpent sur F, comme nous l'avons vu, les courbes C_0 transformées des courbes Γ de Φ.

Les hyperplans de $\Sigma^{(1)}$ contiennent les espaces $S^{(0)}$, $S^{(2)}$ et, par conséquent, les tangentes aux β points de coïncidence non parfaite s'appuyant sur $S^{(2)}$, et les plans tangents à F aux α_1 premiers points de coïncidence parfaite. Enfin, ils contiennent une tangente (variable) à F aux α_2 derniers points de coïncidence parfaite. Les courbes C découpées par ces hyperplans, courbes que nous désignerons par C, passent donc par les $\alpha + \beta$ points de coïncidence; elles passent simplement par les β points de coïncidence non parfaite et y ont une tangente fixe; elles passent doublement par les α_1 premiers points de coïncidence parfaite et y ont des tangentes variables; elles passent simplement par les α_2 autres points de coïncidence parfaite et y ont une tangente variable.

Le système partiel $|C_1|$ est évidemment composé au moyen de l'involution I_3, puisque les hyperplans de $\Sigma^{(1)}$ sont invariants pour H. A chaque courbe C_1 correspond, sur Φ, une courbe Γ_1 de degré virtuel n_1 et de genre virtuel π_1, appartenant à un système complet $|\Gamma_1|$ de dimension r_1.

Deux courbes C_1 se rencontrent en $3\,n_1$ points en dehors des points de coïncidence; donc on a

$$3n_1 + 4\alpha_1 + \alpha_2 + 2\beta = 3n;$$

d'où

$$n_1 = n - \frac{3\alpha_1 + \alpha + 2\beta}{3}.$$

Une courbe C_1 possède α_1 points doubles, donc est de genre $3\pi - \alpha_1 - 2$; l'involution d'ordre 3 engendrée sur cette courbe par H possède, d'autre part, $2\alpha_1 + \alpha_2 + \beta$ points de coïncidence (à compter chacun deux fois puisque l'involution est cyclique); donc par la formule de Zeuthen, on a

$$6(\pi_1 - 1) + 4\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\beta = 6\pi - 6 - 2\alpha_1;$$

d'où

$$\pi_1 = \pi - \frac{2\alpha_1 + \alpha + \beta}{3}.$$

De même, le système $\Sigma^{(2)}$ conduit, sur la surface Φ, à l'existence d'un système $|\Gamma_2|$, de dimension r_2, de degré virtuel

$$n_2 = n - \frac{3\alpha_2 + \alpha + 2\beta}{3}$$

et de genre virtuel

$$\pi_2 = \pi - \frac{2\alpha_2 + \alpha + \beta}{3}.$$

7. — Considérons une courbe C non transformée en elle-même par H. A cette courbe correspond, sur Φ, une courbe $\overline{\Gamma}$ de genre effectif $3\pi - 2$, possédant $3n$ points doubles variables. Chacun de ces points doubles correspond à un couple de points de la courbe C faisant partie d'un groupe de I_3. La courbe $\overline{\Gamma}$ appartient à un système linéaire $|\overline{\Gamma}|$ de genre virtuel $3\pi - 2 + 3n$, car l'ensemble des courbes $\overline{\Gamma}$ correspondant aux différentes courbes C est rationnel.

Lorsque la courbe C envisagée varie d'une manière continue dans $|C|$ et vient coïncider avec une courbe C_0, $\overline{\Gamma}$ varie d'une manière continue et vient coïncider avec la courbe Γ correspondant à C_0, cette courbe Γ étant comptée trois fois. Le système $|\overline{\Gamma}|$ est donc identique au système $|3\Gamma|$.

D'autre part, lorsque cette courbe C varie d'une manière continue de manière à venir coïncider avec une courbe C_1, la courbe $\overline{\Gamma}$ se réduit à la courbe Γ_1 correspondante, comptée trois fois, mais augmentée maintenant des courbes $A_1, \ldots, A_\alpha$, $B_{11}, \ldots, B_{\;2}$, de manière à tenir compte des multiplicités des points de coïncidence pour les courbes C_1.

Aux α_1 premiers points de coïncidence parfaite, qui sont doubles pour les courbes C_1, correspondent les courbes A_1, $A_2, \ldots, A_{\alpha_1}$ comptées chacune deux fois.

Aux α_2 autres points de coïncidence parfaite, qui sont simples pour les courbes C_1, correspondent les courbes $A_{\alpha_1+1}, \ldots, A_\alpha$ comptées chacune une fois.

Enfin, soit B_i le point de diramation de Φ correspondant à un point de coïncidence non parfaite P de F. Supposons que la courbe rationnelle B_{i1} corresponde au point de F, infiniment voisin de P, situé sur la tangente à F en ce point et s'appuyant sur $S^{(1)}$, la courbe B_{i2} correspondant à l'autre point infiniment voisin de P, invariant pour H. Les courbes C_1 passent par ce second point, mais non par le premier; la courbe $B_{i1} + 2B_{i2}$ doit donc être comptée une fois. On a donc

$$
\begin{aligned}
3\Gamma \equiv 3\Gamma_1 &+ 2A_1 + 2A_2 + \cdots + 2A_{\alpha_1} + A_{\alpha_1+1} + \cdots + A_\alpha \\
&+ B_{11} + \cdots + B_{\beta_1} + 2B_{12} + \cdots 2B_{\beta_2}.
\end{aligned}
$$

Observons que cette égalité fonctionnelle rend compte du fait que les courbes Γ_1 rencontrent chacune des α_1 courbes $A_1, \dots, A_{\alpha_1}$ en 2 points, chacune des courbes $A_{\alpha_1+1}, \dots, A_\alpha$, $B_{12}, \dots, B_{\beta 2}$ en un point, et ne rencontrent pas les courbes $B_{11}, \dots, B_{\beta 1}$.

On trouve de la même manière l'égalité fonctionnelle

$$3\Gamma \equiv 3\Gamma_2 + \sum_1^{\alpha_1} A_i + 2\sum_{\alpha_1+1}^{\alpha} A_i + 2\sum_1^{\beta} B_{i1} + \sum_1^{\beta} B_{i2}.$$

Projectivement ces égalités fonctionnelles s'interprètent de la manière suivante : Le système $|3\Gamma|$ est découpé, sur Φ, par des hypersurfaces algébriques de S_r passant en outre, éventuellement, par des courbes fixes de Φ. Il y a toujours une de ces hypersurfaces passant par les points de diramation et osculant Φ le long d'une courbe Γ_1 ou Γ_2 quelconque.

8. — Supposons maintenant que H ne possède que deux espaces fondamentaux $S^{(0)}$, $S^{(1)}$, respectivement de dimensions r, $R - r - 1$. Comme nous l'avons vu plus haut, on a alors $\beta = 0$. Les hyperplans du système $\Sigma^{(1)}$, conjugué de $S^{(1)}$, sont en nombre ∞^{R-r-1} et passent par $S^{(0)}$. Ils rencontrent F suivant des courbes C que nous désignerons par C_1, passant simplement par les α points de coïncidence parfaite (avec une tangente variable). Les courbes C_1 sont invariantes pour H et il correspond à chacune d'elles, sur Φ, une courbe Γ_1 de degré virtuel $n_1 = n - \frac{\alpha}{3}$ et de genre virtuel $\pi_1 = \pi - \frac{\alpha}{3}$. Ces courbes forment un système linéaire $|\Gamma_1|$ de dimension $R - r - 1$.

En raisonnant comme on l'a fait au paragraphe précédent, on trouve de même l'égalité fonctionnelle

$$3\Gamma \equiv 3\Gamma_1 + A_1 + A_2 + \cdots A_\alpha,$$

et une interprétation projective analogue.

Si l'on compare l'égalité précédente aux égalités trouvées plus haut, on voit qu'en faisant, dans la première de celles-ci, $\beta = 0$, $\alpha_1 = 0$, on retrouve celle-là. Nous basant sur cette remarque, nous réunirons dans un seul énoncé les résultats obtenus dans les deux derniers paragraphes.

Si une surface simple, normale, est l'image d'une involution d'ordre 3, *ayant un nombre fini de points de coïncidence, appartenant à une surface algébrique, parmi les hypersurfaces découpant, sur cette première surface, le système triple de celui des sections hyperplanes, et passant par les points de diramation, il en existe, en général, qui osculent la surface suivant une courbe d'ordre* n.

Nous écrivons « en général » pour tenir compte de l'hypothèse faite sur Φ, à savoir que la dimension r du système $|\Gamma|$ est inférieure à celle, R, de $|C|$.

9, — Inversement, soit Φ une surface algébrique d'ordre n, simple, normale, située dans un espace linéaire S_r, à $r \geq 3$ dimensions, et telle que :

a) Elle possède α points triples coniques à cônes tangents rationnels;

b) Elle possède β points doubles biplanaires ordinaires;

c) Parmi les hypersurfaces découpant, sur Φ, le système triple de celui des sections hyperplanes, il y en ait une osculant Φ en chaque point d'une courbe Γ_1 d'ordre n, passant doublement par α_1 points triples, simplement par les $\alpha - \alpha_1$ points triples restants et par les β points doubles. On convient de plus de poser $\alpha_1 = 0$ si $\beta = 0$.

Nous allons démontrer qu'elle représente une involution I_3, d'ordre 3, ayant un nombre fini de points de coïncidence, appartenant à une surface algébrique F.

Adoptons, pour désigner les courbes rationnelles auxquelles sont équivalents les $\alpha + \beta$ points multiples de Φ, les mêmes symboles que précédemment. Supposons de plus que les α_1 points triples par lesquels Γ_1 passe doublement soient les α_1 premiers.

Dans ces conditions, la courbe Γ_1 rencontre chacune des courbes $A_1, \dots, A_{\alpha_1}$ en deux points et chacune des courbes $A_{\alpha_1+1}, \dots, A_\alpha$. D'autre part, Γ_1 rencontre la courbe composée $B_{i1} + B_{i2}$ en un point; donc elle rencontre une des courbes B_{i1}, B_{i2}, la dernière pour fixer les idées, en un point et ne rencontre pas l'autre.

Considérons la courbe

$$3\Gamma_1 + 2\sum_1^{\alpha_1} A_i + \sum_{\alpha_1+1}^{\alpha} A_i + \sum_1^{\beta} B_{i1} + 2\sum_1^{\beta} B_{i2}. \tag{1}$$

Les courbes A et B sont des courbes fondamentales propres pour le système linéaire déterminé par cette courbe et celle-ci est située sur une des hypersurfaces découpant, sur Φ, le système triple de celui, $|\Gamma|$, des sections hyperplanes de Φ. Comme, de plus, la courbe (1) est d'ordre $3n$, c'est précisément une courbe du système $|3\Gamma|$.

Nous distinguerons deux cas :

1° Le système $|3\Gamma|$ est découpé complètement, sur Φ, par des hypersurfaces cubiques de S_r;

2° Le contraire a lieu.

Nous étudierons tout d'abord le premier cas, puis nous ramènerons le second au premier.

10. — Plaçons-nous dans le premier cas et désignons par $x_0, x_1, \dots, x_r$ les coordonnées homogènes de S_r. Soient

$$\varphi_1(x_0, x_1, \dots, x_r) = 0, \qquad \varphi_2(x_0, x_1, \dots, x_r) = 0, \qquad \dots,$$
$$\varphi_{r-2}(x_0, x_1, \dots, x_r) = 0$$

les équations de la surface Φ. Nous n'excluons pas que les équations précédentes aient en commun, outre Φ, quelque variété algébrique.

Soit maintenant

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_r) = 0$$

l'équation de l'hypersurface cubique osculant Φ le long de Γ_1. Cette hypersurface ne rencontre pas Φ en dehors de Γ_1.

Considérons les équations, dans S_{r+1},

$$\varphi_1 = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_{r-2} = 0, \quad x_{r+1}^3 = f(x_0, \ldots, x_r).$$

Elles peuvent représenter une variété algébrique réductible, mais une partie de cette variété sera certainement une surface située sur le cône

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_{r-2} = 0.$$

Nous considérons cette seule surface et nous la désignerons par F'.

On voit tout d'abord qu'à un point de Φ correspondent, en général, trois points de F'. Recherchons quels sont les points de diramation. Ceux-ci seront situés sur l'intersection de Φ avec l'hypersurface $f = 0$.

Un point ordinaire de Φ, appartenant à Γ_1, appartient à l'hypersurface $f = 0$, mais celle-ci osculant Φ en ce point, celui-ci est un point de diramation apparente.

Les points de diramation ne peuvent donc être situés qu'aux points singuliers A ou B.

Considérons un point triple A. L'hypersurface $f = 0$ passe simplement ou, tout au plus, doublement par ce point; par suite une droite du cône tangent à Φ en P rencontre $f = 0$ soit en un, soit en deux points. Par conséquent, le domaine du point P, sur Φ, constitue une courbe de diramation infiniment petite.

Considérons maintenant un point double B. L'hypersurface $f = 0$ passe simplement par ce point; donc une droite passant par B et appartenant à l'un des plans tangents à Φ en ce point rencontre une fois $f = 0$ en ce point. Par conséquent, le domaine de B sur Φ constitue deux courbes de diramation infiniment petites.

Puisque, dans la correspondance (1, 3) existant entre Φ et F$'$, il y a des diramations, la surface F$'$ est irréductible.

Observons maintenant qu'aux courbes de diramation infiniment petites de Φ, qui sont des courbes rationnelles, correspondent, sur F$'$, des courbes rationnelles de coïncidence.

Soit a la courbe de coïncidence qui correspond à un point triple A. Aux sections hyperplanes de Φ correspondent sur F$'$ des courbes C de degré $3n$, n étant l'ordre de Φ. Aux sections hyperplanes de Φ passant par A, courbes qui sont de degré $n - 3$, correspondent des courbes C$'$ de degré $3n - 9$ sur F$'$. On doit avoir

$$C \equiv C' + 3a.$$

Si x désigne le degré de la courbe a, on a

$$3n = 3n - 9 + 9x + 18;$$

d'où $x = -1$. La courbe a est donc exceptionnelle (de première espèce).

Un raisonnement analogue montre qu'à un point double B correspondent, sur F$'$, deux courbes exceptionnelles de première espèce ayant un point commun.

Nous pouvons transformer birationnellement F$'$ en une surface F$''$ de telle manière qu'à ces courbes exceptionnelles correspondent des points simples. A l'involution d'ordre 3 construite sur F$'$, correspondra, sur F$''$, une involution d'ordre 3 n'ayant qu'un nombre fini de points de coïncidence et dont Φ est l'image. Ainsi se trouve démontré notre théorème énoncé dans l'introduction, dans le cas particulier spécifié au paragraphe précédent.

11. — Plaçons-nous maintenant dans le second cas. Les hypersurfaces cubiques de S_r sont en nombre $\infty^{\frac{1}{6}r(r^2+6r+11)}$. La dimension r_3 du système $|3\Gamma|$ est donc telle que

$$r_3 > \frac{1}{6} r(r^2 + 6r + 11).$$

Considérons la surface Φ_k, birationnellement identique à Φ, simple et normale, dont les sections hyperplanes sont les courbes $k\Gamma$, située dans un espace linéaire à r_k dimensions. Comme nous l'avons déjà remarqué plus haut (§ 2), Φ_k possède, aux points de diramation, les mêmes singularités que Φ. Nous allons démontrer que l'on peut prendre k suffisamment élevé pour que les hypersurfaces cubiques de l'espace S_{r_k} découpent, sur Φ_k, le système $|3k\Gamma|$ complet. Pour cela, il nous suffira de démontrer que l'on peut prendre k assez grand pour avoir

$$r_{3k} \leq \frac{1}{6} r_k (r_k^2 + 6r_k + 11). \tag{1}$$

Supposons d'abord k suffisamment élevé pour que $|k\Gamma|$ soit non spécial et soit π_a le genre arithmétique de Φ. D'après le théorème de Riemann-Roch sur une surface algébrique, on a

$$r_k \geq \pi_a + \frac{k(k+1)}{2} n - k(\pi - 1). \tag{2}$$

Le système $|3k\Gamma|$ a le degré $9k^2n$ et le genre

$$3k\pi + \frac{3k(3k-1)}{2} n - (3k - 1).$$

Considérons la série linéaire d'ordre $9k^2n$ et de dimension $r_{3k} - 1$ découpée sur une courbe $3k\Gamma$ par les autres courbes du système $|3k\Gamma|$, r_{3k} étant la dimension de ce système. Si cette série est non spéciale, le théorème de Riemann-Roch sur une courbe algébrique donne

$$r_{3k} - 1 = \frac{3k(3k+1)}{2} n - 3k(\pi - 1) - 1. \tag{3}$$

Si, au contraire, cette série est spéciale, le théorème de Clifford donne

$$r_{3k} - 1 \leq \frac{9k^2}{2} n. \tag{4}$$

Portons, dans l'inégalité (1), la valeur minimum de r_k donnée par (2) et la valeur de r_{3k} donnée par (3). Il est clair qu'on pourra toujours trouver une valeur de k telle que cette inégalité soit vérifiée. Il en sera de même si l'on remplace, dans (1), r_k par sa valeur minimum tirée de (2) et r_{3k} par sa valeur maximum tirée de (4). Ainsi se trouve démontrée notre assertion.

Pour pouvoir appliquer à la surface Φ_k, ainsi construite, le théorème démontré au paragraphe 10, il faudrait connaître, sur cette surface, une courbe Γ_1^* telle que

$$3k\Gamma \equiv 3\Gamma_1^* + 2\sum_1^{\alpha_1} A_i + \sum_{\alpha_1+1}^{\alpha} A_i + \sum_1^{\beta} B_{i1} + 2\sum_1^{\beta} B_{i2}.$$

Alors, Γ_1^* est d'ordre $k^2 n$ (sur la surface Φ_k) et il y a une hypersurface cubique de S_{r_k} qui oscule Φ_k en chaque point de cette courbe. Or, nous avons trouvé plus haut que les conditions auxquelles est assujettie la surface Φ (§ 9) entraînent la relation

$$3\Gamma \equiv 3\Gamma_1 + 2\sum_1^{\alpha_1} A_i + \sum_{\alpha_1+1}^{\alpha} A_i + \sum_1^{\beta} B_{i1} + 2\sum_1^{\beta} B_{i2}.$$

Comparant ces deux égalités fonctionnelles, on voit qu'il suffit de prendre

$$\Gamma_1^* \equiv (k-1)\Gamma + \Gamma_1,$$

courbe qui existe effectivement.

Ainsi se trouve complètement démontré le théorème énoncé au début de ce travail.