Sur les surfaces du quatrième ordre contenant des courbes rationnelles

par

Lucien Godeaux (Bruxelles)

Dans cette courte note, nous nous proposons d'établir une propriété des surfaces du quatrième ordre, contenant des courbes rationnelles de degré pair, en nombre au plus égal à huit, relativement aux involutions d'ordre deux, appartenant à une surface de genres un. Cette propriété s'établit simplement en utilisant nos recherches sur les involutions appartenant à une surface de genres un (1). Elle peut s'énoncer de la manière suivante:

Si une surface du quatrième ordre contient α *courbes rationnelles de degrés* $2n_1, 2n_2, \ldots, 2n_\alpha$ ($\alpha < 8$) *et* $8 - \alpha$ *points doubles coniques, la somme* $n_1 + n_2 + \ldots + n_\alpha$ *étant paire et les courbes ne se rencontrant pas et ne passant pas par les points doubles; si de plus la surface représente une involution d'ordre deux appartenant à une surface de genres un, elle représente au moins une seconde involution de même nature.*

Nous en déduisons le théorème suivant:

Si une surface de genres un représentant une involution d'ordre deux apartenant à une surface de genres un, possède une système linéaire de genre impair (supérieur à trois), elle est l'image d'au moins une autre involution de même nature.

---

(1) *Mémoire sur les involutions appartenant à une surface de genres un* (Annales de l'Ecole Normale Supérieure, 1914, 1919).

Au sujet de ces recherches, voir également nos mémories publiés dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* (1914), les *Bulletins de l'Académie Royale de Belgique* (1913, 1921), le *Bulletin de la Société Mathématique de France* (1913, 1915, 1919), les *Annaes da Academia Polytechnica do Porto* (1916, 1920), etc.

L'existence d'un système de genre 11, par exemple, conduit à l'existence de 309 nouvelles involutions.

Ces involutions sont naturellement situées sur des surfaces différentes.

1.—Soit F une surface du quatrième ordre, de genres un ($p_a = P_4 = 1$), contenant α (≤ 8) courbes rationnelles $C_1, C_2, \ldots, C_\alpha$ respectivement d'ordre $2n_1, 2n_2, \ldots, 2n_\alpha$, et $8 - \alpha$ points doubles coniques. Nous supposerons les courbes rationnelles $C_1, C_2, \ldots, C_\alpha$, dépourvues de poins multiples et ne se rencontrant pas deux-à-deux. De plus, ces courbes seront supposées ne pas passer par les points doubles de F et ceux-ci ne seront pas infiniment voisins.

Chacun des $8 - \alpha$ points doubles coniques est équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à une courbe rationnelle de degré -2. Nous désignerons ces $8 - \alpha$ courbes par $C_{\alpha+1}, \ldots, C_8$.

Il existe, sur la surface F, α autres courbes rationnelles, que l'on obtient de la manière suivante: Soit $|C|$ le système des sections planes de la surface F. Les α courbes

$$C'_i \equiv n_i C - C_i \quad (i = 1, 2, \ldots, \alpha)$$

son rationnelles. C'_i est découpée, sur la surface F, par la surface d'ordre n_i passant par C_i.

On vérifie aisément les relations suivantes, dans lesquelles le symbole [A, B] représente le nombre de points communs à deux courbes A, B:

$$[C_i, C'_i] = 2(n_i^2 + 1),$$
$$[C_i, C'_k] = 2n_i n_k,$$
$$[C'_i, C'_k] = 0.$$

2.—Considérons le système de courbes effectives

$$|\Gamma| = |C_1 + n_1 C_1 + \ldots + n_\alpha C_\alpha|.$$

Il possède comme courbes fondamentales propres les courbes $C_1, \ldots, C_\alpha, C_{\alpha+1} \ldots, C_8$. Son genre, π, est donné par la relation

$$2\pi - 2 = 4 - 2(n_1^2 + \ldots + n_\alpha^2 + 4n_1^2 + \ldots + 4n_\alpha^2,$$

d'où

$$\pi = n_1^2 + n_2^2 + \ldots + n_\alpha^2 + 3.$$

Ce systéme est simple, sans quoi, le système des sections planes $|C|$ de F ne serait pas simple.

Rapportons projectivement les courbes de $|\Gamma|$ aux hyperplans d'un espace linéaire S_π à π dimensions. F se transforme en une surface F′, birationnellement identique, dont l'ordre est $2\pi - 2$ et sur laquelle correspondent, aux α courbes rationnelles $C_1, \dots, C_\alpha$, et aux $8 - \alpha$ points doubles $C_{\alpha+1}, \dots, C_8$, 8 points doubles coniques. La condition, nécessaire et suffisante, pour que cette surface F′ (et par suite F) soit l'image d'une involution d'ordre deux appartenant à une surface de genres un, est l'existence d'une courbe Γ_0 telle que (1):

$$2\Gamma_0 + C_1 + \dots + C_8 \equiv 2\Gamma \quad (2),$$

c'est-à-dire

$$2\Gamma_0 \equiv 2C + (2n_1 - 1)C_1 + \dots + (2n_\alpha - 1)C_\alpha - C_{\alpha+1} - \dots - C_8.$$

Considérée sur la surface F, la courbe Γ_0 est d'ordre $2\alpha_2 - \alpha_1 + 4$, où l'on a posé

$$\alpha_1 = n_1 + n_2 + \dots + n_\alpha,$$
$$\alpha_2 = n_1^2 + n_2^2 + \dots + n_\alpha^2.$$

En d'autres termes, on a

$$[\Gamma_0, C] = 2\alpha_2 - \alpha_1 + 4.$$

De plus, on a

$$[\Gamma_0, C_i] = \frac{1}{2}\,[4n_i - 2(2n_i - 1)] = 1.$$

On en conduit que *la condition nécessaire et suffisante pour que la surface* F *soit l'image d'une involution d'ordre deux appartenant à une surface de genres un, est l'existence de la courbe* Γ_0, *d'ordre* $2\alpha_2 - \alpha_1 + 4$, *rencontrant en un point chacune des courbes rationnelles* $C_1, C_2, \dots, C_8$.

3.—Supposons α_1 pair et considérons la courbe

$$\Gamma'_0 \equiv (\alpha_2 - \frac{\alpha_1}{2} + 2)C - \Gamma_0 - C_{\alpha+1} - \dots - C_8.$$

Cette courbe existe certainement. Considérons en effet les surfaces d'ordre $\alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_1 + 2$; elles découpent, sur F, un système linéaire de degré

---

(1) *Mémoire...* loc. cit.

(2) Nous désignons par le même symbole une courbe tracée sur F et sa transformée sur F′.

$4\left(\alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_1 + 2\right)^2$ et de dimension (égale au genre) $2\left(\alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_1 + 2\right)^2 + 1$. Ces surfaces découpent, sur la courbe Γ_0, une série linéaire d'ordre $2\left(\alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_1 + 2\right)_2$ non spéciale, puisque Γ_0 est de genre $\pi - = \alpha_2 + 1$ et que l'on a certainement $\alpha_2 < \left(\alpha_2 - 1\,\alpha_1 + 2\right)^2$. Par conséquent, d'après le théorème de Riemann - Roch, cette série a la dimension $2\left(\alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_1 + 2\right)^2 - \alpha_2 - 1$ et il y a des surfaces d'ordre $\alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_1 + 2$ passant par Γ_0. Ces surfaces marquent, sur F, en dehors de Γ_0, des courbes du système linéaire $|\Gamma'_0|$.

La courbe Γ'_0 a l'ordre (sur F)

$$[\Gamma'_0, C] = 2\alpha_2 - \alpha_1 + 4,$$

égal à celui de Γ_0. De plus, on trouve aisément que

$$[\Gamma'_0, C'_i] = 1 \quad (i = 1, 2, ..., \alpha),$$
$$[\Gamma'_0, C_i] = 1 \quad (i = \alpha + 1, ..., 8).$$

D'autre part, on a

$$2\Gamma'_0 \equiv 2C + (2n_1 - 1)C'_1 + ... + (2n_\alpha - 1)C'_\alpha - C_{\alpha+1} - ... - C_8,$$

par conséquent, la surface F représente une seconde involution d'ordre deux, appartenant à une surface de genres un, les courbes de diramation étant cette fois $C'_1, C'_2, ..., C'_\alpha, C_{\alpha+1}, ..., C_8$. Donc:

Si $n_1 + n_2 + ... + n_\alpha$ *est pair,* F *représente au moins deux involutions d'ordre deux, appartenant à des surfaces de genres un.*

4.—Soit Ψ une surface normale de S_ρ ($\rho > 3$), de genres un, image d'une involution d'ordre deux, appartenant à une surface de genres un. Supposons que l'on puisse représenter d'une manière au moins, le nombre $\rho - 3$ par une somme de α carrés ($a \leqq 8$)

$$\rho - 3 = n_1^2 + n_2^2 + ... + n_\alpha^2,$$

la somme $n_1 + n_2 + ..., + n_\alpha$ étant paire.

La surface Ψ possède, comme on sait, huit points doubles coniques. Soient $\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_8$ les huit courbes rattionnelles de degré -2 équivalentes à ces points doubles, $|\Gamma|$ le système des sections hyperplanes. Le système $|\Gamma - n, \Gamma_1 - n_2, \Gamma_2 - ... - n_\alpha \Gamma_\alpha|$ existe et est de dimension trois. De plus, il est simple. Si on le rapporte projectivement aux plans d'un S_3, on obtient, comme transformée birationnelle de Ψ, une surface F, d'ordre 4, possédant α courbes rationnelles satisfaisant aux conditions des numéros précédents. Par suite F et Ψ représentent au moins une seconde involution d'ordre deux appartenant à une surface de genres un.

Si une surface de genres un, à sections hyperplanes de genre ρ, *représente une involution d'ordre deux appartenant à une surface de genres un, et si l'on peut trouver huit nombres* $n_1, n_2, \ldots, n_8$, *entiers, positifs ou nuls, dont la somme soit paire et qui satisfait à la relation*

$$\rho - 3 = n_1^2 + n_2^2 + \ldots + n_8^2,$$

la surface représente au moins une seconde involution analogue à la première.

Remarquons que $n_1 + n_2 + \ldots + n_8$ devant être pair, il y a un nombre pair de nombres $n_1, n_2, \ldots, n_8$ pouvant être impairs, donc $\rho - 3$ est pair.

Inversement, si $\rho - 3$ est pair, les nombres $n_1, \ldots, n_8$ impairs sont en nombre pair, par suite, la somme $n_1 + \ldots + n_8$ est paire.

D'autre part, d'après le théorème de Bachet, $\rho - 3$ peut toujours s'écrire sous forme d'une somme de quatre carrés au plus, donc:

Si une surface de genres un représente une involution d'ordre deux appartenant à une surface de genres un, et si elle possède un système linéaire de genre impair, elle représente au moins une autre involution analogue.

5.—Supposons par exemple $\rho = 11$ et cherchons de combien de manière on peut décomposer 8 en une somme de carrés $n_2^1, \ldots, n_8^2$, la somme $n_1 + n_2 + \ldots + n_8$ étant paire. On trouve inmédiatement:

$$8 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1\,,$$
$$8 = 4 + 1 + 1 + 1 + 1,$$
$$8 = 4 + 4.$$

Comme dans les deux derniers cas, on peut intervertir le rôle des 8 points doubles, on trouve que:

Si une surface de genres un, normale, de S_{11}, *est l'image d'une involution d'ordre deux appartenant à une surface de genres un, elle est l'image de 309 autres involutions analogues.*

Bruxelles, 24 février 1921.