point double d'une involution réelle sur une droite réelle, cette involution n'ayant d'ailleurs pas de point double réel. De cette façon, pour se donner un point imaginaire (ou plutôt deux points imaginaires conjugués), on se donne une involution réelle.

M. Hatton a eu des prédécesseurs, parmi lesquels Poncelet, von Staudt, Esson, qu'il cite, et Marie, qu'il ne cite pas. Son Ouvrage n'est donc pas complètement original, mais il est intéressant parce qu'il traite le sujet d'une façon systématique. Il se limite à la théorie des points, droites et coniques dans le plan, et à un petit chapitre final sur la géométrie de l'espace. Il contient un grand nombre d'exercices résolus ou proposés. Pas assez, à notre avis, se rapportant à des problèmes réels pour lesquels, en définitive, la théorie est faite.

E. CAHEN.

MÉLANGES.

SUR UNE SURFACE ALGÉBRIQUE CONSIDÉRÉE PAR M. G. HUMBERT;

PAR M. LE LIEUTENANT L. GODEAUX.

M. G. Humbert (1) et, après lui, M. L. Remy (2) ont étudié, en utilisant la théorie des fonctions thêta, la surface qui représente les couples de points d'une courbe de genre 3, de manière qu'un point de la surface corresponde à deux couples de points formant un groupe canonique. Ces géomètres ont considéré, comme « modèles projectifs » de la surface, des surfaces du sixième ordre possédant un point triple et un certain nombre de points doubles. Un autre modèle projectif de la surface a également été rencontré incidemment par M. Severi (3) : c'est un plan triple possédant une courbe de diramation d'ordre 12.

(1) *Sur une surface du sixième ordre liée aux fonctions abéliennes de genre trois* (*Journal de Liouville*, 5e série, t. II, 1896, p. 263-293).

(2) *Sur certaines surfaces algébriques liées aux fonctions abéliennes de genre trois* (*Journal de Liouville*, 6e série, t. IV, 1908). *Sur une classe de surfaces algébriques liées aux fonctions abéliennes de genre trois* (*Annales Ec. N. sup.*, 3e série, t. XXVI, Paris, 1909).

(3) *Sulle superficie che rappresentano le coppie di punti di una curva algebrica* (*Atti R. Accad. Torino*, t. XXXVIII, 1902-1903, p. 185-200).

Nous nous proposons, dans cette Note, de construire, comme modèle projectif de la surface envisagée, une surface d'ordre 12, à sections hyperplanes de genre 10, située dans un espace linéaire à 6 dimensions, et possédant 28 points doubles coniques. Ces points doubles se distribuent, par groupes de 12, dans des hyperplans touchant la surface suivant des courbes elliptiques d'ordre 6. Nous utiliserons, à cet effet, les méthodes algébrico-géométriques, et nous nous appuierons sur les résultats obtenus par M. Severi, au moyen des mêmes méthodes, dans son travail cité.

1. Soit A une courbe de genre 3, à modules généraux, que nous pouvons supposer, sans restreindre la généralité, être une courbe plane du quatrième ordre, sans point double. Soit F la surface algébrique qui représente les couples de points non ordonnés, de la courbe A, un point de F étant l'image d'un seul couple de points de A. La surface F a les genres géométrique $p_g = 3$, arithmétique $p_a = 0$, linéaire $p^{(1)} = 7$ (1).

Soient P_1, P_2 les points de A qui ont pour image un point P de F; P_3, P_4 les points de A qui, avec P_1, P_2, forment un groupe canonique de cette courbe (c'est-à-dire, actuellement, qui sont situés sur la droite P_1P_2); P' le point de F image du couple P_3, P_4. Le point P' est déterminé d'une manière univoque par le point P, et réciproquement. Les couples P, P' forment donc, sur la surface F, une involution I_2 d'ordre 2, ou encore ils déterminent une transformation birationnelle T de F en elle-même.

Pour qu'un point P coïncide avec son correspondant P', il faut que P_1 coïncide avec P_3 par exemple, et P_2 avec P_4. Il y aura donc autant de points de coïncidence pour I_2 que de groupes canoniques de A formés de deux points doubles, c'est-à-dire que de bitangentes de la courbe A. On sait que celles-ci sont au nombre de 28, donc :

L'involution I_2 *possède* 28 *points de coïncidence*.

(1) SEVERI, *loc. cit.* Contemporainement, par voie analytique, ces valeurs des invariants avaient été déterminées par M. DE FRANCHIS, *Sulle varietà* ∞^2 *delle coppie di punti di due curve o di una curva algebrica* (*Rend. Circ. matem.*, Palermo, t. XVII, 1903). Au sujet des surfaces représentant les couples de points d'une ou de deux courbes algébriques, *voir* aussi SEVERI, *Sulle corrispondence fra i punti di una curva algebrica e sopra certe classi di superficie* (*Mem. R. Accad. Torino*, 2e série, t. LIV, 1903).

La surface Φ, image de l'involution I_2, n'est autre que la surface dont MM. Humbert, Severi et Remy ont considéré des modèles projectifs.

2. Aux quatre points d'un groupe canonique de A correspondent six points de F. Lorsque le groupe varie dans une série linéaire g_4^1, ces six points décrivent une courbe C de genre 7 et de degré 6, qui est une courbe canonique de F (Severi, *loc. cit.*). Aux ∞^2 séries g_4^1 canoniques de A correspondent ∞^2 courbes C formant un réseau $|C|$ ($p_g = 3$).

Par construction, le système $|C|$ est composé avec l'involution I_2. Soient Γ les courbes qui correspondent aux courbes C sur Φ. Puisque l'involution I_2 ne possède qu'un nombre fini de points de coïncidence, les courbes Γ sont des courbes canoniques de Φ et le réseau $|\Gamma|$, de degré 3 et de genre 4, est donc le système canonique de cette surface. Celle-ci a par conséquent le genre géométrique $\pi_g = 3$ et le genre linéaire $\pi^{(1)} = 4$.

Le genre arithmétique π_a de Φ est lié au genre arithmétique $p_a = 3$ de F par la formule

$$p_a = 2\pi_a + 1 - \frac{\sigma}{4},$$

dans laquelle $\sigma = 28$ [1]. On a donc $\pi_a = 3$.

La surface Φ a les genres $\pi_g = \pi_a = 3$, $\pi^{(1)} = 4$.

Si nous rapportons projectivement les courbes Γ aux droites d'un plan, la surface Φ se transforme en un plan triple ayant une courbe de diramation d'ordre 12, considéré par M. Severi.

3. Ces points étant rappelés, nous allons construire une surface d'ordre 12, de S_6, modèle projectif de Φ.

Soient respectivement $|2C|$, $|2\Gamma|$ les systèmes bicanoniques de F et de Φ.

Le système $|2\Gamma|$ a, d'après le théorème de Riemann-Roch, la dimension au moins égale à 6. De plus, il est simple. En effet, s'il était composé, ce ne pourrait être qu'au moyen de l'involution d'ordre 3 formée par les groupes de points communs aux courbes Γ. Mais alors, les courbes bicanoniques 2Γ seraient repré-

(1) L. Godeaux, *Mémoire sur les surfaces algébriques doubles douées d'un nombre fini de points de diramation* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1914).

sentées, sur le plan triple considéré plus haut, par des coniques doubles et la dimension de $|2\Gamma|$ serait au plus égale à 5, ce qui est impossible.

Si $r \geqq 6$ est la dimension de $|2\Gamma|$, rapportons projectivement les courbes 2Γ aux hyperplans d'un S_r. On obtient une surface d'ordre 12, à sections de genre 10, birationnellement identique à Φ. Or, une courbe (simple), d'ordre 12 et de genre 10, est située dans un espace ayant au plus cinq dimensions [1]. Les hyperplans de S_r ont donc au plus la dimension 5, c'est-à-dire $r - 1 \leqq 5$. On en conclut que $r = 6$.

Le système $|2C|$ n'ayant pas pour points-base les points de coïncidence de I_2, la surface Φ possède 28 points doubles coniques (points de diramation) [2].

On peut prendre, comme modèle projectif de la surface Φ, *une surface d'ordre* 12, *à sections hyperplanes de genre* 10, *de* S_6, *possédant* 28 *points doubles coniques.*

Observons en passant que $|2C|$ a la dimension 6. En effet, si $|2C|$ avait une dimension $R > 6$, il existerait sur Φ un système linéaire de degré -2 et de genre 3 [3], ce qui est absurde. On en conclut que $|2C|$ est composé avec I_2 et que le bigenre de F et celui de Φ sont tous deux égaux à 7 [4].

4. Il existe, sur la courbe A, une infinité de séries linéaires d'ordre 4, g_4^1, non spéciales. A chacune de ces séries correspond, sur F, une courbe C_1 appartenant à un système continu $\{C_1\}$ comprenant le système linéaire $|C|$.

Il est aisé d'évaluer le genre et le degré d'une courbe C_1.

A un groupe de la g_4^1 correspond, sur la courbe C_1 correspondante, un groupe de 6 points variable dans une série linéaire. Celle-ci possède 2 points doubles chaque fois que la g_4^1 en possède un. Or, celle-ci possède 12 points doubles, donc la g_6^1 existant sur C_1 possède 24 points doubles. On a donc, si x est le

---

(1) COMESSATTI, *Limiti di variabilità della dimensione e dell'ordine d'una* g_n^r *sopra una curva di dato genere* (*Atti R. Ist. Veneto*, t. LXXIV, 1914-1915).

(2) L. GODEAUX, *loc. cit.*

(3) L. GODEAUX, *loc. cit.*

(4) *Voir* à ce sujet notre travail: *Les surfaces bicanoniques doubles ayant un nombre fini de points de diramation* (*Bull. de l'Acad. R. de Belgique*, 1919).

genre de C_1,

$$2(6+x-1)=24,$$

ou $x=7$.

D'autre part, d'après la formule de Schubert [1], deux séries g_4^1 ont en commun 6 couples de points, donc les deux courbes C_1 correspondantes ont 6 points communs.

Le système canonique de F appartient à un système continu complet $\{C_1\}$ de degré 6 et de genre 7.

5. La transformation T échange entre elles les courbes du système $\{C_1\}$. En effet, soit C' la courbe en laquelle T transforme une courbe C_1. Lorsque C_1 varie d'une manière continue dans $\{C_1\}$ jusqu'à coïncider avec une courbe canonique C, C' décrit un système continu $\{C'\}$ contenant cette courbe C. Par conséquent, C' ayant même degré et même genre que C_1, le système $\{C'\}$ est contenu dans le système complet $[C_1]$.

A une courbe C_1 correspond, sur la surface Φ, une courbe d'ordre 12 et de genre 7, possédant 3 points doubles. Cette courbe peut être considérée comme étant de genre virtuel 10 et de degré virtuel 12; elle varie dans un système nécessairement linéaire, puisque la surface Φ est régulière. Lorsque C_1, variant d'une manière continue dans $\{C_1\}$, devient une courbe canonique C, la courbe correspondante sur Φ devient une courbe bicanonique 2Γ; par conséquent, à une courbe C_1 correspond, sur Φ, une courbe bicanonique (possédant 3 points doubles).

Supposons qu'il existe une courbe C_1, non canonique, transformée en elle-même par T. Il lui correspond, sur Φ, une courbe bicanonique ayant une infinité de points doubles, c'est-à-dire une courbe Γ' suivant laquelle un hyperplan touche la surface Φ. La courbe Γ' a par conséquent l'ordre 6 et, étant située dans un S_5, elle est rationnelle ou elliptique.

Si la courbe C_1 envisagée passe par δ points de coïncidence de I_2, le genre x de la courbe Γ' est donné par la formule de Zeuthen

$$4(x-1)+\delta=12.$$

Si $x=1$, $\delta=12$, et si $x=0$, $\delta=16$.

---

(1) *Voir*, par exemple, F. Severi, *Lezioni di Geometria algebrica*, 1908, p. 236 (Padova, Draghi).

Observons que, parmi les séries g_4^1 non spéciales de A, il y en a 63 qui sont les lieux des points de contact de coniques quadritangentes à A. Considérons une de ces séries. On sait que, parmi les ∞^1 coniques qui touchent A aux points de chaque groupe de cette série, il y en a 6 qui dégénèrent en deux droites bitangentes à A. La courbe C_1 correspondant à cette série sur F passe donc par 12 points de coïncidence de I_2. Cette courbe est invariante pour T, car, autrement, T changerait cette courbe C_1 en une courbe C_1' de $\{C_1\}$ rencontrant la première en 12 points, alors que $\{C_1\}$ a le degré 6.

Il existe donc 63 courbes du système $\{C_1\}$, non canoniques, invariantes pour T, et il leur correspond, sur Φ, 63 courbes elliptiques du sixième ordre, le long de chacune desquelles un hyperplan touche Φ. Chacun de ces hyperplans contient 12 points doubles de la surface.

Il ne peut d'ailleurs exister une courbe de $\{C_1\}$, non canonique et distincte des précédentes, invariante pour T. S'il en existait une, elle passerait par 12 ou par 16 points de coïncidence de I_2. Dans le premier cas, elle coïnciderait nécessairement avec une des 63 courbes rencontrées plus haut, puisque $\{C_1\}$ a le degré 6. Dans le second cas, la courbe devrait comprendre comme partie une des 63 courbes, ce qui est absurde.

En résumé :

La surface représentant les couples de points d'une courbe de genre 3, *à modules généraux, de telle manière qu'à un point de la surface corresponde deux couples de points formant un groupe canonique de la courbe, est birationnellement identique à une surface d'ordre* 12, *à sections hyperplanes de genre* 10, *de* S_6, *possédant* 28 *points doubles coniques. Il existe* 63 *hyperplans passant chacun par* 12 *points doubles et touchant la surface suivant des courbes elliptiques du sixième ordre.*

6. La relation fonctionnelle reliant une des 63 courbes du sixième ordre aux sections de la surface se déduit immédiatement de la remarque, faite plus haut, qu'à une courbe C_1 quelconque correspond une courbe bicanonique de Φ (à 3 points doubles). Si l'on désigne par Γ' une des 63 courbes du sixième ordre, par

$\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{12}$ les 12 courbes rationnelles de degré — 2 équivalentes aux 12 points doubles de Φ que contient l'hyperplan de Γ', on a

$$2\Gamma' + \Gamma_1 + \Gamma_2 + \ldots + \Gamma_{12} \equiv 2\Gamma.$$

Remarque. — De ce qui précède, on pourrait déduire des propriétés des systèmes de courbes tracées sur la surface Φ, notamment celle-ci : L'existence d'un système linéaire de courbes sur Φ entraîne en général celle de 127 autres systèmes linéaires. Les doubles de ces 128 systèmes, augmentés éventuellement de quelques-unes des 28 courbes rationnelles équivalentes aux points doubles de Φ, sont équivalents. Mais ces propriétés sont communes à toutes les surfaces régulières représentant des involutions douées d'un nombre fini de points de coïncidence, appartenant à des surfaces irrégulières. Nous les réserverons pour un travail d'ensemble.

SUR LE THÉORÈME DE MENABREA ;

PAR M. LIÉNARD.

Le général Menabrea a établi en 1858 (*C. R. Acad. Sc.*, t. XLVI, p. 1056) un théorème important de Résistance des matériaux, que l'on peut énoncer comme suit :

« Dans un système hyperstatique suivant la loi de Hooke [1] et soumis à des forces données, les valeurs que prennent les forces (ou les couples) de liaison surabondantes rendent minimum le potentiel interne Π du système, considéré comme fonction de ces forces de liaison surabondantes. »

En fait, le général Menabrea établit simplement que $d\Pi = 0$. Il ajoute ensuite, sans autre explication : « Il est facile de s'assurer que les équations [obtenues] correspondent au minimum et non au maximum. » Les démonstrations de l'existence d'un minimum,

[1] Déplacements et rotations fonctions linéaires des forces et couples. Dans ce qui suit, j'emploierai les mots *forces* et *déplacements* dans le sens généralisé qu'on leur donne en mécanique pour les équations de Lagrange.