Sur une hypersurface cubique de l'espace à quatre dimensions

Lucien Godeaux

Résumé
Construction de la variété image d'une involution cyclique du troisième ordre appartenant à une hypersurface cubique de l'espace à quatre dimensions. Applications.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur une hypersurface cubique de l'espace à quatre dimensions

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie

Résumé. — Construction de la variété image d'une involution cyclique du troisième ordre appartenant à une hypersurface cubique de l'espace à quatre dimensions. Applications.

C'est Max Noether qui vers 1890 a attiré l'attention sur les hypersurfaces cubiques de l'espace à quatre dimensions, en se proposant de voir si une telle hypersurface était rationnelle ou non. Il parvint à montrer qu'elle représente unc involution du second ordre appartenant à un espace linéaire à trois dimensions, dans un travail resté inédit. Nous indiquons en note la construction de Noether [1]. Des recherches sur cette question font prévoir que ces hypersurfaces ne sont pas rationnelles mais aucune démonstration n'en a été donnée. C'est là une des nombreuses questions de la Géométrie algébrique qui restent sans réponse.

Dans cette note nous considérons une hypersurface cubique V_0 d'un espace S_4 à quatre dimensions transformée en elle-même par une homographie H de période trois possédant comme axes ponctuels

[1] Soit V une hypersurface cubique de S_4 et r une des ∞^2 droites appartenant à cette variété. Par un point P de V menons le plan passant par r. Il coupe encore V suivant une conique rencontrant r en deux points R_1, R_2. Au point P nous faisons correspondre les droites PR_1, PR_2. Inversement, une tangente à V en un point R de r coupe encore V en un point P et nous avons donc une correspondance (1, 2) entre les points P de V et les tangentes à V aux points de r. Or la variété des tangentes à V aux points de r est équivalente à un espace linéaire à trois dimensions, d'où la construction de Noether

un point et deux droites. Nous étudions l'image Ω de l'involution d'ordre trois que H engendre sur V_0, involution qui possède six points unis. Le modèle projectif de Ω que nous construisons appartient à un espace S_{11} à onze dimensions et est d'ordre 27. Les six points de diramation de Ω sont doubles bispatiaux pour cette variété (c'est-à-dire que le cône tangent en un de ces points dégénère en deux espaces linéaires à trois dimensions).

Il existe sur Ω des surfaces rationnelles Ψ_0, Ψ_1, Ψ_2 la première isolée et les autres formant des faisceaux. Le long de chacune de ces surfaces, il y a un hyperplan qui oscule la variété Ω.

Les sections hyperplanes de Ω sont des surfaces Φ de genres $p_a = p_g = 1$ et la courbe canonique de chacune de ces surfaces se trouve sur la surface Ψ_0, qui est donc l'adjointe au système $| \Phi |$.

Les surfaces Ψ_1, Ψ_2 se rencontrent suivant des cubiques elliptiques ψ formant une congruence linéaire.

Nous établissons encore que sur Ω se trouve une congruence de cubiques gauches représentée par une surface de genres $p_g = 4, p_a = 3$ dont le genre linéaire est 16.

Dans le cours de ce travail, nous aurons à utiliser des propriétés des involutions cycliques. Nous renvoyons pour ces propriétés à notre ouvrage sur les involutions [1].

1. Soit dans un espace S_4 à quatre dimensions une homographie H de période trois d'équations

$$x'_0 : y'_0 : y'_1 : z'_0 : z'_1 = x_0 : \varepsilon y_0 : \varepsilon y_1 : \varepsilon^2 z_0 : \varepsilon^2 z_1,$$

ε étant une racine cubique primitive de l'unité. Cette homographie a comme axes ponctuels le point (1,0,0,0,0) et les droites

$$r_1(x_0 = z_0 = z_1 = 0) \text{ et } r_2(x_0 = y_0 = y_1 = 0).$$

Dans S_4, H engendre une involution I d'ordre trois. Pour obtenir une image de cette involution, considérons le système $| V |$ des hypersurfaces cubiques transformées en elles-mêmes par H et dépourvu de point-base. Il a pour équation

$$\lambda_0 x_0^3 + x_0 \varphi_{11}(y_0,y_1; z_0,z_1) + \varphi_3(y_2,y_1) + \varphi'_3(z_0,z_1) = 0,$$

[1] *Théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications* (Roma, Éditions Cremonese, 1963).

où φ_{11} est une forme bilinéaire en y_0, y_1 d'une part et z_0, z_1 d'autre part, φ_3 et φ'_3 étant des formes cubiques de leurs arguments, les coefficients de ces formes étant variables.

Rapportons projectivement les hypersurfaces V aux hyperplans d'un espace S_{12} à 12 dimensions en posant

$$X_0 : X_1 : X_2 : X_3 : X_4 = x_0^3 : x_0y_0z_0 : x_0y_0z_1 : x_0y_1z_0 : x_0y_1z_1,$$
$$Y_0 : Y_1 : Y_2 : Y_3 = y_0^3 : y_0^2y_1 : y_0y_1^2 : y_1^3,$$
$$Z_0 : Z_1 : Z_2 : Z_3 = z_0^3 : z_0^2z_1 : z_0z_1^2 : z_1^3,$$

les facteurs de proportionnalité étant les mêmes dans les trois cas.

Nous obtenons ainsi une variété W à quatre dimensions, d'ordre 27, d'équations

$$\left\| \begin{matrix} Y_0 & Y_1 & Y_2 & X_1 & X_2 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 & X_3 & X_4 \end{matrix} \right\| = 0,$$
$$\left\| \begin{matrix} Z_0 & Z_1 & Z_2 & X_1 & X_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 & X_2 & X_4 \end{matrix} \right\| = 0,$$

$$\begin{aligned}
X_0Y_0Z_0 &= X_1^3, & X_0Y_0Z_1 &= X_1^2X_2,\\
X_0Y_0Z_2 &= X_1X_2^2, & X_0Y_0Z_3 &= X_2^3,\\
X_0Y_1Z_0 &= X_1^2X_3, & X_0Y_1Z_1 &= X_1X_2X_3,\\
X_0Y_1Z_2 &= X_2^2X_3, & X_0Y_1Z_3 &= X_2^2X_1,\\
X_0Y_2Z_0 &= X_1X_3^2, & X_0Y_2Z_1 &= X_2X_3^2,\\
X_0Y_2Z_2 &= X_2X_3X_4, & X_0Y_2Z_3 &= X_2X_4^2,\\
X_0Y_3Z_0 &= X_3^3, & X_0Y_3Z_1 &= X_3^2X_4,\\
X_0Y_3Z_2 &= X_3X_4^2, & X_0Y_3Z_3 &= X_4^3.
\end{aligned}$$

Nous désignerons par 0_i le point dont toutes les coordonnées sont nulles sauf X_i, par $0'_i$ le point dont toutes les coordonnées sont nulles sauf Y_i et enfin par $0''_i$ le point dont toutes les coordonnées sont nulles sauf Z_i. L'espace à trois dimensions $0'_0 0'_1 0'_2 0'_3$ sera désigné par σ_1 et l'espace $0''_0 0''_1 0''_2 0''_3$ par σ_2. De plus nous désignerons respectivement par K_1 et K_2 les cubiques gauches des espaces σ_1, σ_2 dont les équations sont

$$\left\| \begin{matrix} Y_0 & Y_1 & Y_2 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \end{matrix} \right\| = 0, \qquad \left\| \begin{matrix} Z_0 & Z_1 & Z_2 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{matrix} \right\| = 0.$$

2. Le point 0_0 est double pour la variété W. Les cônes tangents aux variétés V passant par (1,0,0,0,0) en ce point sont donnés par

$$\varphi_{11}(y_0 y_1 \cdot z_0, z_1) = 0.$$

La variété tangente en 0_0 à la variété W est commune aux variétés dont l'équation s'obtient en élevant l'équation précédente au cube. On trouve ainsi une équation bilinéaire d'une part par rapport à Y_0, Y_1, Y_2, Y_3 et d'autre par par rapport à Z_0, Z_1, Z_2, Z_3. Il en résulte que le point 0_0 est double bispatial pour W, les espaces tangents projetant de 0_0 les espaces à trois dimensions σ_1, σ_2.

Considérons maintenant un point quelconque de la cubique K_1. On peut supposer sans restriction que c'est le point $0'_0$. La variété des tangents en ce point à W est représentée par les équations

$$Y_2 = Y_3 = X_3 = X_4 = 0,$$

$$X_0 Z_0 = X_0 Z_1 = X_0 Z_2 = X_0 Z_3 = 0.$$

Le point $0'_0$ est donc un point double bispatial de W. Les espaces tangents sont l'espace projetant σ_2 de $0'_0$ et l'espace projetant le plan $0_0 0_1 0_2$ de la tangente à K_1 au point considéré.

De même un point quelconque de K_2 est double bispatial pour W, les espaces tangents projetant σ_1 du point considéré et l'espace projetant le plan $0_0 0_1 0_2$ de la tangente à K_2 au point considéré.

Remarquons que les droites s'appuyant sur r_1 et r_2 sont unies pour H. Il leur correspond dans S_{12} les droites s'appuyant sur les cubiques gauches K_1, K_2 qui engendrent une variété à trois dimensions d'ordre 9 passant triplement par les cubiques gauches K_1 et K_2.

Observons que la variété W appartient au cône

$$X_1 X_4 - X_2 X_3 = 0$$

dont le sommet contient le point 0_0 et les cubiques K_1 et K_2 qui sont doubles pour la variété W.

3. Appelons V_0 une variété V ne passant pas par le point (1,0,0,0,0) ni par les droites r_1, r_2. Cela revient à supposer que dans l'équation de V_0, les coefficients sont des constantes non nulles. Nous désignerons par V_1 les hypersurfaces V distinctes de V_0 et formant donc un système linéaire $| V_1 |$ de dimension 11.

A la variété V_0 correspond sur W une variété à trois dimensions Ω située dans un hyperplan ξ ne passant ni par 0_0, ni par σ_1, σ_2. Cette variété Ω représente l'involution I déterminée sur V_0 par H.

Cette involution présente six points unis qui sont les points de rencontre de V_0 avec les droites r_1, r_2. Il leur correspond sur Ω six points de diramation, trois sur la cubique gauche K_1 que nous désignerons par A_{11}, A_{12}, A_{13} et trois sur la cubique K_2 que nous désignerons par A_{21}, A_{22}, A_{23}.

Ces points sont doubles bispatiaux pour la variété Ω. Les espaces tangents en A_{11} par exemple sont l'espace projetant de A_{11} le plan section de σ_2 par ξ et l'espace projetant de A_{11} le plan $0_0 0_1 0_2$.

Rappelons que chacun des points de diramation de Ω est équivalent au point de vue des transformations birationnelles à un ensemble de surfaces rationnelles dont la détermination ne nous est pas nécessaire.

Les hypersurfaces V_1 découpent sur V_0 des surfaces F régulières d'ordre 9 dont le système canonique coïncide avec celui des sections hyperplanes. Ce sont donc des surfaces de genres $p_a = p_g = 5$, $p^{(1)} = 10$. Nous désignerons par Φ ces surfaces.

L'involution déterminée par H sur une surface F est en général privée de points unis. Entre le genre arithmétique $p_a = 5$ de F et celui p'_a de la surface Φ homologue, on a la relation.

$$p_a + 1 = 3(p'_a + 1),$$

d'où $p'_a = 1$. Une surface Φ possède donc une seule courbe canonique et son genre linéaire est égal à quatre. Les surfaces Φ sont d'ordre 27 et situées dans des espaces à 10 dimensions.

4. Considérons la section de V_0 par l'hyperplan $x_0 = 0$. C'est une surface G_0 sur laquelle H détermine une involution possédant six points unis de première espèce. Il correspond à G_0 sur Ω une surface Ψ_0 d'ordre 9 située dans l'hyperplan $X_0 = 0$.

Entre le genre arithmétique $p_a = 0$ de G_0 et celui p'_a de Ψ_0 on a la relation

$$12(p_a + 1) = 36(p'_a + 1) - 6.4,$$

d'où $p'_a = 0$.

La surface Ψ_0 passe par les six points de diramation de Ω.

Appelons G_1 les surfaces sections de V_0 par les hyperplans passant par le point (1,0,0,0,0) et par la droite r_2 et Ψ_1 les surfaces qui leur correspondent sur Ω. L'involution déterminée par H sur une surface G_1 possède trois points unis situés sur la droite r_2 et ces points sont de seconde espèce. Entre le genre arithmétique $p_a = 0$ d'une surface G_1 et celui p'_a de la surface Ψ_1 correspondante, nous avons la relation

$$12(p_a + 1) = 36(p'_a + 1) - 3.8,$$

d'où $p'_a = 0$. Les surfaces Ψ_1 passent par les points de diramation A_{21}, A_{22}, A_{23} de Ω et forment un faisceau. Elles sont d'ordre 9.

Les surfaces G_1 ont en commun la section de V_0 par le plan passant par (1,0,0,0,0) et par r_2. C'est une cubique elliptique à laquelle correspond sur Ω une courbe rationnelle ψ_1 du troisième ordre.

De même, en considérant les sections G_2 de V_0 par les hyperplans passant par le point (1,0,0,0,0) et par r_1, on obtient sur Ω un faisceau de surfaces $|\Psi_2|$ d'ordre 9, passant par les points de diramation A_{11}, A_{12}, A_{13} et dont la base est une cubique rationnelle ψ_2.

Une surface G_1 et une surface G_2 ont en commun la section de V_0 par un plan qui en général ne passe pas par un point uni et qui coupe donc V_0 suivant une cubique elliptique. Il correspond à cette cubique sur Ω une cubique elliptique ψ. Les cubiques intersections des surfaces Ψ_1 et Ψ_2 engendrent une congruence linéaire.

Il est aisé de voir que la surface Ψ_0 et chacune des surfaces Ψ_1, Ψ_2 appartient à un espace linéaire à six dimensions, car les sections des variétés V_1 par les surfaces G_0, ou G_1, ou G_2, forment des systèmes linéaires de dimension six.

Les surfaces $3G_0$, $3G_1$, $3G_2$ appartiennent au système F, donc on a sur les relations fonctionnelles

$$3\Psi_0 + \Delta_0 \equiv \Phi, \quad 3\Psi_1 + \Delta_1 \equiv \Phi, \quad 3\Psi_2 + \Delta_2 \equiv \Phi,$$

Δ_0 représentant une certaine somme de surfaces rationnelles équivalentes aux points de diramation de Ω, Δ_1, Δ_2 ayant des significations analogues se limitant aux points de diramation de Ω appartenant à la cubique K_2 ou à la cubique K_1.

On en conclut que le long de Ψ_0, il y a un hyperplan de ξ qui oscule la variété Ω en tout point de rencontre. De même, le long d'une surface Ψ_1 ou d'une surface Ψ_2 il y a un hyperplan de ξ osculant la variété Ω en tout point d'intersection.

Les sections de G_0, G_1, G_2 par une variété V_1 étant des courbes canoniques de la surface F découpée sur V_0 par la variété V_1, la courbe canonique de la surface Φ correspondante appartient à la surface Ψ_0 isolée.

La courbe canonique de chaque surface Φ appartient à la surface Ψ_0 et le long de la courbe canonique il y a un hyperplan de ξ qui oscule la surface Φ en tout point d'intersection. Les courbes canoniques des surfaces Φ sont d'ordre 9 et de genre quatre.

5. La section d'une variété V par l'hyperplan $x_0 = 0$ est une variété réglée à trois dimensions lieu des droites s'appuyant sur les droites r_1, r_2. Il lui correspond dans S_{12} la variété à trois dimensions lieu des droites s'appuyant sur les cubiques gauches K_1, K_2. Cette variété appartient à un espace à sept dimensions et la surface Ψ_0 est la section de cette variété par l'hyperplan ξ. La surface appartient donc à un espace à six dimensions comme on le sait déjà et a des points triples aux points de diramation de Ω.

Les surfaces Ψ_1 et Ψ_2, qui appartiennent également à des espaces à six dimensions, ont des points doubles biplanaires aux points de rencontre de Ω respectivement avec K_2 et K_1.

Les courbes ψ_1, ψ_2 sont des cubiques gauches, mais les courbes ψ, qui sont des cubiques elliptiques, sont nécessairement planes.

Observons que les courbes ψ s'appuient en un point sur chacune des courbcs ψ_1, ψ_2 et forment une congruence linéaire.

Nous avons démontré (1) que sur une courbe d'une congruence de courbes, le groupe des points focaux diminué du groupe des points de rencontre avec une surface et augmenté du groupe des points de rencontre avec une adjointe à la surface, donne un groupe canonique de la courbe.

Appliquons ce théorème à la congruence des courbes ψ en remarquant que l'adjointe à une surface Φ n'est autre que la surface Ψ_0 (2). Le groupe des points focaux d'une courbe ψ, que nous désignerons

(1) *Congruences de courbes sur une variété algébrique à trois dimensions* (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1967, pp. 1148-1153; 1968, pp. 141-143). *Sur les variétés algébriques à trois dimensions contenant une congruence irrationnelle de courbes* (Rendiconti della Accademia Nazionale dei Lincei, 2° sem. 1967).

(2) D'une manière plus précise, l'adjointe aux surfaces Φ est la surface $\Psi_0 + \Delta$, où Δ est une certaine somme de surfaces rationnelles équivalentes aux points de diramation de Ω.

par D, est formé par les points d'appui de cette courbe sur ψ_1, ψ_2 et est d'ordre deux. Nous aurons

$$D + (\psi,\Phi') - (\psi,\Phi) = 0,$$

car un groupe canonique d'une courbe ψ, elliptique, est d'ordre zéro.

Un plan commun à deux hyperplans de S_4 passant par le point (1,0,0,0,0) et l'un par r_1, l'autre par r_2, rencontre en 9 points formant trois groupes de I une surface F et une surface G_0 en un groupe de I. On en conclut qu'une courbe ψ rencontre une surface Φ en trois points et la surface Ψ_0 en un point. La formule précédente est donc identiquement vérifiée.

6. La variété V_0 contient des droites formant une congruence qui a été étudiée par G. Fano (1).

Désignons par M la variété d'ordre cinq, à six dimensions, de l'espace S_9, qui représente les droites de l'espace S_4. A la congruence des droites de V_0 correspond sur M une surface R d'ordre 45, à sections hyperplanes de genre 46. Ces sections hyperplans constituent le système canonique de R.

A l'homographie H de S_4 correspond dans S_9 une homographie H' de période trois qui transforme M et R en elles-mêmes.

Posons

$$p_{01} = x_0y'_0 - x'_0y_0, \quad p_{02} = x_0y'_1 - x'_0y_1, \quad p_{03} = x_0z'_0 - x'_0z_0,$$
$$p_{04} = x_0z'_1 - x'_0z_1,$$
$$p_{12} = y_0y'_1 - y'_0y_1, \quad p_{13} = y_0z'_0 - y'_0z_0, \quad p_{14} = y_0z'_1 - y'_0z_1,$$
$$p_{23} = y_1z'_0 - y'_1z_0, \quad p_{24} = y_1z'_1 - y'_1z_1, \quad p_{34} = z_0z'_1 - z'_0z_1.$$

Ces quantités sont les coordonnées pluckériennes de la droite joignant le point $(x_0, y_0, y_1, z_0, z_1)$ au point $(x'_0, y'_0, y'_1, z_0, z_1)$ et sont donc les coordonnées des points de l'espace S_9 et précisément des points de la variété M.

Il existe dans S_9 trois systèmes d'hyperplans transformés en eux-mêmes par H'; ils ont pour équations

$$\lambda_1 p_{13} + \lambda_2 p_{14} + \lambda_3 p_{23} + \lambda_4 p_{24} = 0, \tag{1}$$

(1) *Sul sistema ∞^2 di rette contenuto in una varietà cubica generale dello spazio o quattro dimensioni* (Atti della Accademia di Torino, 1903-1904, pp. 1-17).

$$\lambda_1 p_{01} + \lambda_2 p_{02} + \lambda_3 p_{03} = 0, \tag{2}$$

$$\lambda_1 p_{03} + \lambda_2 p_{04} + \lambda_3 p_{12} = 0, \tag{3}$$

L'homographie H' possède donc trois espaces ponctuels unis Σ_0, Σ_1, Σ_2 ayant respectivement trois, deux et deux dimensions. Les hyperplans (1) passent par les plans Σ_1, Σ_2, les hyperplans (2) par les espaces Σ_0, Σ_2 et les hyperplans (3) par les espaces Σ_0, Σ_1.

Dans l'espace S_4, les complexes linéaires représentés par l'équation (1) contiennent les droites s'appuyant sur r_1 et r_2. Or la variété Ω contient les neuf droites joignant les points A_{11}, A_{12}, A_{13} aux points A_{21}, A_{22}, A_{23}, de sorte que l'involution I_3 engendrée sur R par H' possède neuf points unis appartenant à l'espace Σ_0. Par contre les plans Σ_1, Σ_2 ne rencontrent pas la surface R.

Le plan tangent à R en un point uni de I_3 s'appuie sur Σ_1 et Σ_2, donc les points unis de cette involution sont de seconde espèce. Le système canonique de l'image R' de l'involution I_3 a pour correspondant sur R un système de courbes canoniques ne passant pas par les points unis de seconde espèce, donc le système canonique de R' correspond au système découpé sur R par les hyperplans (1) et le genre géométrique de R' est $p_g = 4$.

Fano a établi que le genre arithmétique de R était $p_a = 5$. Entre le genre arithmétique p_a et celui p'_a de R' on a la relation

$$12(p_a + 1) = 3.12(p'_a + 1) - 9.8,$$

donc $p'_a = 3$ et la surface R' est irrégulière.

Le genre linéaire de R' est égal à 16.

Soient p une droite de S_4 et p', p'' les droites que H lui fait correspondre. En général, ces droites ne se rencontrent pas deux à deux et il leur correspond sur Ω une cubique gauche. On en conclut que :

La variété Ω contient une congruence de cubiques gauches représentable par une surface de genres $p_g = 4$, $p_a = 3$ et de genre linéaire 16.

Liège, le 10 février 1970.