Bulletin de la Classe des sciences

Sur le système canonique des surfaces algébriques triples (troisième note)

Lucien Godeaux

Résumé
Formation du système canonique d'une surface image d'une involution cubique cyclique n'ayant qu'un nombre fini de points unis de première espèce, appartenant à une surface algébrique.

doi : https://doi.org/10.3406/barb.1970.61762

https://www.persee.fr/doc/barb_0001-4141_1970_num_56_1_61762

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur le système canonique des surfaces algébriques triples

(troisième note)

par LUCIEN GODEAUX
Membre de l'Académie

Résumé. — Formation du système canonique d'une surface image d'une involution cubique cyclique n'ayant qu'un nombre fini de points unis de première espèce, appartenant à une surface algébrique.

Pour terminer l'étude à laquelle sont consacrées les deux premières notes (1), il nous reste à examiner le cas d'une involution cyclique du troisième ordre ne possédant qu'un nombre fini de points unis, tous de première espèce. Nous commencerons tout d'abord par l'étude d'un cas particulier, puis nous étendons notre raisonnement au cas général dans l'hypothèse où le système canonique de la surface support de l'involution est dépourvu de points-base et contient trois systèmes linéaires partiels composés au moyen de l'involution.

De cette étude sur les involutions cycliques du troisième ordre, on peut conclure le théorème suivant:

Si une surface algébrique contient une involution cyclique d'ordre premier p ne possédant qu'un nombre fini de points unis et si le système canonique de cette surface est dépourvu de points-base et contient p systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution, l'un de ces systèmes est le transformé du système canonique de la surface image de l'involution et les autres systèmes ont des dimensions différentes de celle du premier. Si ces $p-1$ derniers systèmes ont la même dimension supérieure d'une unité à celle du premier, l'involution est dépourvue de points unis.

(1) Les deux premières notes ont paru dans le Bulletin de l'Académie, 1970, pp. 856-864, 1016-1023.

Il est en effet facile d'étendre nos raisonnements au cas envisagé dans ce théorème.

Dans le cours de notre travail, nous aurons à utiliser des propriétés établies dans notre ouvrage sur les involutions [1].

I

1. Considérons dans un espace S_{r+2} à $r+2$ dimensions une homographie H cyclique de période trois ayant pour axes un espace σ_1 à r dimensions et une droite σ_2. Si nous désignons par $y_0, y_1, \dots, y_r$ les coordonnées d'un point de σ_1 et par z_0, z_1 celles d'un point de la droite σ_2, les équations de H peuvent s'écrire

$$\rho y'_i = y_i, \quad \rho z_k = \varepsilon z_k, \qquad (i = 0, 1, \dots, r; k = 0, 1)$$

où ε est une racine primitive cubique de l'unité

Les hypersurfaces cubiques transformées en elles-mêmes par H forment trois systèmes linéaires $|V_0|$, $|V_1|$, $|V_2|$ dont les équations peuvent respectivement s'écrire

$$F_{30}(y, z) + F_{03}(y, z) = 0, \quad F_{21}(y, z) = 0, \quad F_{12}(y, z) = 0,$$

où $F_{ik}(y, z)$ représente une forme algébrique de degré i en y dont les coefficients sont des formes algébriques de degré k en z. Ces systèmes ont respectivement les dimensions

$$r_0 = \binom{r+3}{3} + 4, \quad r_1 = 2\binom{r+2}{2}, \quad r_2 = 3(r+1).$$

Les système $|V_0|$ est dépourvu de points-base. Les hypersurfaces V_1 passent simplement par σ_1 et doublement par σ_2. Les hypersurfaces V_2 passent deux folis par σ_1 et une fois par la droite σ_2.

2. Soit F une surface intersection complète de r hypersurfaces V_0 linéairement indépendantes. Elle est transformée en soi par H et celle-ci détermine sur la surface une involution I, cyclique, du troisième ordre, possédant 3^r points unis dans l'espace σ_1.

Le plan tangent à F en un point uni P passe par la droite σ_2 et

[1] *Théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications* (Roma, Édit. Cremonese, 1963).

dans ce plan H détermine une homologie de centre P, et d'axe σ_2. Le point P et de même tous les points unis de l'involuton I sont unis de première espèce.

Le système canonique de F est découpé par les hypersurfaces d'ordre $3r - (r + 3) = 2r - 3$.

Le genre arithmétique p_a de F et celui p'_a d'une surface F' image de l'involution I sont liés par la relation

$$12(p_a + 1) = 3.12(p'_a + 1) - 4.3^r,$$

c'est-à-dire par la relation

$$p_a + 1 = 3(p'_a + 1) - 3^{r-1}$$

Quant au genre linéaire de F il a pour valeur

$$p^{(1)} = 3^r(2r - 3)^2 + 1.$$

Désignons par C_0, C_1,C_2 les courbes découpées sur F respectivement par les hypersurfaces V_0, V_1, V_2. Le système $| C_0 |$ est dépourvu de points-base. Les courbes C_1 passent simplement par les points unis de l'involution et les courbes C_2 passent doublement par ces points.

3. Les hypersurfaces d'ordre $2r - 3$ qui découpent sur F les courbes canoniques, transformées en elles-mêmes par H, forment trois systèmes linéaires dont les équations peuvent respectivement s'écrire

$$F_{2r-3\,0}(y, z) + F_{2r-6\,3}(y, z) + \dots = 0, \tag{1}$$

$$F_{2r-4\,1}(y, z) + F_{2r-7\,1}(y, z) + \dots = 0, \tag{2}$$

$$F_{2r-5\,2}(y, z) + F_{2r-8\,5}(y, z) + \dots = 0. \tag{3}$$

On supposera dans la suite $r \geqslant 3$ [1].

Les hypersurfaces du système (1) ne passant pas par les points unis de l'involution. Les hypersurfaces du système (2) contiennent l'espace σ_1 et les hypersurfaces du système (3) passent deux fois par cet espace.

Nous avons démontré [2] que les courbes canoniques de F

[1] Pour $r = 2$, les sections hyperplanes de la surface F sont ses courbes canoniques et le système canonique ne comprend que deux systèmes appartenant à l'involution : l'un est un réseau sans points-base et l'autre un faisceau doté de neuf points-base.

[2] *Théorie des involutions...*, p. 110.

transformées des courbes canoniques de la surface F' image de l'involution I, passaient simplement par les points unis de première espèce, donc ici par les points unis de I. Ce système est donc découpé par les hypersurfaces (2). Nous le désignerons par $|K_0|$.

Nous désignerons par $|K_1|$ le système des courbes découpées par les hypersurfaces du système (1) sur F et par $|K_2|$ celui des courbes découpées par les hypersurfaces (3). Le système $|K_1|$ est dépourvu de points-base et les courbes K_2 passent doublement par les points unis de l'involution.

4. Nous allons déterminer la dimension du système $|K_1|$.

Le degré et le genre du système $|K_1|$ sont

$$p^{(1)} - 1 = 3^r(2r-3)^2, \quad p^{(1)} = 3^r(2r-3)^2 + 1.$$

Comme $|K_1|$ est dépourvu de points-base, le degré du système $|K_1'|$ qui lui correspond sur la surface F' est

$$n' = 3^{r-1}(2r-3)^2$$

et son genre π' est donné par

$$6(\pi' - 1) = 2.3^r(2r-3)^2,$$

c'est-à-dire par

$$\pi' = 3^{r-1}(2r-3)^2 + 1.$$

Le système $|K_1'|$ n'est pas spécial et sa dimension ρ', égale à celle du système $|K_1|$ est, d'après le théorème de Riemann-Roch,

$$\rho' \geqslant p_a' + n' - \pi' + 1 = p_a'.$$

5. Cherchons maintenant la dimension du système $|K_2|$. Ses courbes passent deux fois par les points unis de l'involution, donc ses degré et genre sont

$$p^{(1)} - 1 - 4.3^r = 3^r(2r-3)^2 - 4.3^r,$$

$$p^{(1)} - 3 = 3^r(2r-3)^2 - 3^r + 1.$$

Le système $|K_2'|$ qui correspond sur F' au système $|K_2|$ a le degré

$$n'' = 3^{r-1}(2r-3)^2 - 4.3^{r-1}.$$

Son genre π'' est donné par la formule de Zeuthen,

$$6(\pi'' - 1) + 4.3^r = 2.3^r(2r - 1)^2 - 2.3^r.$$

On a donc

$$\pi'' = 3^{r-1}(2r - 3)^2 - 3^r + 1.$$

La dimension ρ'' de $|\, K_2' \,|$ c'est-à-dire celle de $|\, K_2 \,|$ est donnée par

$$\rho'' \geqslant p_a' + n'' - \pi'' + 1 = p_a' - 3^{r-1}.$$

6. D'après la théorie des homographies, on doit avoir

$$p_a' - 1 + \rho' + \rho'' + 3 = p_a = 3(p_a' + 1) - 3^{r-1} - 1,$$

d'où

$$\rho' + \rho'' = 2p_a' - 3^{r-1}.$$

Or, on a

$$\rho' + \rho'' \geqslant 2p_a' - 3^{r-1},$$

c'est donc le signe d'égalité qui est valable et on a

$$\rho' = p_a', \quad \rho'' = p_a' - 3^{r-1}.$$

Le système canonique de la surface F contient trois systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution I. *L'un, de dimension* $p_a' - 1$ *est le transformé du système canonique de* F'. *Les autres systèmes ont les dimensions* p_a' *et* $p_a' - 3^{r-1}$.

7. D'après les formules que nous avons établies (1), nous avons

$$p_a = \frac{1}{4}(2r^2 - 5r + 6)\,3^r - 1$$

et

$$p_a' = \frac{1}{4}(2r^2 - 5r + 6)\,3^{r-1} + 3^{r-2} - 1.$$

II

8. Nous allons maintenant étendre ce résultat en supposant que la surface régulière F possède les propriétés suivantes:

(1) *Sur les involutions appartenant à des variétés algébriques intersections complètes d'hypersurfaces* (Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique, 1944, pp. 301-317), *Sur les surfaces intersections complètes de variétés algébriques* (Idem, pp. 865-870).

a) La surface contient une involution cubique cyclique ne possédant qu'un nombre fini de points unis tous de première espèce.

b) Le système canonique $| K |$ de F est dépourvu de points-base.

c) Ce système contient trois systèmes linéaires partiels $| K_0 |$, $| K_1 |$, $| K_2 |$ appartenant à l'involution.

Soit F' une surface image de l'involution. Entre les genres arithmétiques p_a de F et p'_a de F', nous avons la relation, en désignant par α' le nombre des points unis de l'involution,

$$12(p_a + 1) = 3.12(p'_a + 1) - 4\alpha'.$$

α' doit donc être multiple de 3 et nous poserons $\alpha' = 3\alpha$. On a donc

$$p_a + 1 = 3(p'_a - 1) - \alpha. \tag{1}$$

Entre les genres linéaires $p^{(1)}$ de F et $p'^{(1)}$ de F', nous avons la relation

$$p^{(1)} - 1 = 3(p'^{(1)} - 1) + 3\alpha,$$

donc $p^{(1)} - 1$ est multiple de 3. Nous poserons $p^{(1)} - 1 = 3\pi$ et on aura

$$\pi = p'^{(1)} - 1 + \alpha.$$

Nous désignerons par $| K'_0 |$, $| K'_1 |$, $| K'_2 |$ les systèmes linéaires qui correspondent sur F' respectivement aux systèmes $| K_0 |$, $| K_1 |$, $| K_2 |$ et nous supposerons que $| K'_0 |$ est le système canonique de F'.

Nous avons démontré (¹) qu'en un point uni de première espèce de l'involution, les courbes des systèmes $| K_0 |$, $| K_1 |$, $| K_2 |$ ont, dans un certain ordre, les multiplicités 0, 1 ou 2. D'autre part, nous avons démontré que les courbes K_0, transformées des courbes canoniques de F', passaient simplement par les points unis de l'involution (²).

Nous supposerons que les courbes K_1 passent deux fois par α'_1 des points unis de l'involution et ne passent pas par les autres. Les courbes K_2 passent donc deux fois par $\alpha'_2 = 3\alpha - \alpha'_1$ points unis mais ne passent pas par les autres.

9. Cherchons la dimension du système $| K_1 |$ c'est-à-dire du système $| K'_1 |$.

(¹) *Théorie des involutions...*, p. 102.
(²) *Théorie des involutions...*, p. 110.

Le degré de $|K_1|$ est

$$p^{(1)} - 1 - 4\alpha'_1 = 3\pi - 4\alpha'_1$$

et celui de $|K'_1|$ est le tiers du précédent, ce qui montre que α'_1 est multiple de 3. Nous poserons $\alpha'_1 = 3\alpha_1$. Le degré de $|K'_1|$ est donc

$$n' = \pi - 4\alpha_1.$$

Le genre des courbes K_1 est

$$p^{(1)} - \alpha'_1 = 3(\pi - \alpha_1) + 1$$

et celui π' des courbes K'_1 est donné par la formule de Zeuthen

$$6(\pi' - 1) + 12\alpha_1 = 6\pi - 6\alpha_1,$$

d'où

$$\pi' = \pi - 3\alpha_1 + 1.$$

La dimension ρ_1 des systèmes $|K_1|$, $|K'_1|$ est donnée par

$$\rho_1 \geqslant p'_a + n' - \pi + 1 = p'_a - \alpha_1.$$

De la même manière, on trouvera que la dimension des systèmes $|K_2|$, $|K'_2|$ est

$$\rho_2 \geqslant p'_a - \alpha_2$$

en posant $\alpha'_2 = 3\alpha_2 (\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha)$.

10. D'après la théorie des homographies, on doit avoir

$$p'_a - 1 + \rho_1 + \rho_2 + 3 = p_a.$$

De la formule (1), on déduit

$$\rho_1 + \rho_2 = 2p'_a - \alpha.$$

En comparant aux formules donnant ρ_1, ρ_2, on en déduit

$$\rho_1 = p'_a - \alpha_1, \qquad \rho_2 = p'_a - \alpha_2.$$

Les dimensions des systèmes $|K_1|$, $|K_2|$ sont donc en général inférieures à la dimension du système $|K_0|$. Toutefois, pour $\alpha_2 = \alpha$, on retrouve le cas particulier étudié plus haut et le système $|K_1|$ a la dimension supérieure à celle de $|K_0|$.

11. Nous allons montrer que l'un des nombres α_1, α_2 est nécessairement nul.

Considérons le système bicanonique $|2K|$ de F. Il contient trois systèmes linéaires partiels que nous désignerons par $|2K_0|$, $|2K_1|$, $|2K_2|$ contenant respectivement les courbes $2K_0, 2K_1, 2K_2$.

A chacun des systèmes $|K_0|, |K_1|, |K_2|$ est attachée une racine primitive de l'unité, par exemple respectivement $\varepsilon^0 = 1, \varepsilon, \varepsilon^2$. Aux systèmes $|2K_0|, |2K_1|, |2K_2|$ sont attachés les nombres $1, \varepsilon^2, \varepsilon$.

Le système $|2K_0|$ comprend également les courbes $K_1 + K_2$ qui ont également un point double aux points unis. Il en résulte que les courbes de l'un des systèmes $|2K_1|, |2K_2|$ passent une fois par les points unis et les autres ne passent pas par ces points, car les courbes du systèmes $|2K|$ doivent se comporter aux points unis comme les courbes du système $|K|$.

Les courbes du systèmes $|2K_1|$ ne passent pas par les points unis, mais ce système contient les courbes $K_0 + K_2$ qui passent une fois par $3\alpha_1$ des points unis et trois fois par $3\alpha_2$ de ces points. Référons-nous à un modèle projectif de la surface F' dont les sections hyperplanes sont les courbes du systèmes *complet* $|2K_0|$. Les points de diramation sur ce modèle projectif sont des points triples (1) à cône tangent rationnel. Par conséquent les sections hyperplanes passant par un point de diramation y acquièrent un point triple. On en conclut que les courbes $K_0 + K_2$ doivent avoir des points triples aux points unis de l'involution et que donc $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \alpha$.

Les courbes du systèmes $|2K_2|$ passent quatre fois par les points unis. Ce système comprend les courbes $K_0 + K_1$ qui passent simplement par les points unis. On en conclut que les courbes du système *complet* $|2K_2|$ passent une fois par les points unis de l'involution.

Si une surface algébrique régulière F contient une involution cyclique du troisième ordre ne possédant qu'un nombre fini de points unis tous de première espèce et si le système canonique est dépourvu de points-base et contient trois systèmes appartenant à l'involution, l'un de ces systèmes est le transformé du système canonique de la surface image de l'involution, l'un des autres a la dimension du système précédent augmentée d'une unité et le dernier a la dimension du premier diminuée du tiers du nombre des points unis et d'une unité.

Liège, le 26 octobre 1970.

(1) *Théorie des involutions...*, p. 110.