ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

Extrait des *Bulletins de la Classe des sciences*. Séance du 8 octobre 1921, nos 9-10, pp. 596-607.

GÉOMÉTRIE. — **Sur une congruence linéaire de cubiques gauches,**

par LUCIEN GODEAUX, professeur à l'École militaire (*).

Nous nous proposons de revenir, dans cette note, sur une congruence linéaire de cubiques gauches que nous avons rencontrée il y a quelques années (**). Il s'agit de la congruence engendrée par les intersections variables des quadriques et des surfaces cubiques de deux réseaux projectifs, ces surfaces ayant en commun une cubique gauche fixe C_3. Nous montrerons que cette congruence est de classe six et qu'elle est le lieu des cubiques gauches s'appuyant en cinq points sur la cubique C_3 et sur une courbe gauche C_{10}^6, d'ordre 10 et de genre 6, s'appuyant elle-même en 15 points sur C_3. Nous considérons également la représentation de la congruence par une matrice à six éléments, suivant les méthodes de M. Stuyvaert (***). Les équations de la congruence sont

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_1 a'_x + \alpha_2 a_x & \alpha_1 b'_x + \alpha_2 b_x & \alpha_1^2 c'_x + \alpha_2^2 d_x + \alpha_1\alpha_2 d'_x + \alpha_1\alpha_3 f'_x + \alpha_2\alpha_3 f_x \\ \alpha_1 a''_x + \alpha_3 a_x & \alpha_1 b''_x + \alpha_3 b_x & \alpha_1^2 c''_x + \alpha_3^2 f_x + \alpha_1\alpha_3 f''_x + \alpha_1\alpha_2 d''_x + \alpha_2\alpha_3 d_x \end{matrix} \right\| = 0.$$

Un cas particulier intéressant est fourni par la considération d'un réseau de surfaces cubiques passant, non seulement par la cubique gauche C_3, mais, de plus, par une bisécante de

(*) Présenté par M. Stuyvaert.

(**) *Détermination des congruences linéaires de cubiques gauches s'appuyant en cinq points sur une cubique gauche fixe.* (REND. CIRC. MALEM. Palermo, 1911, XXXII.)

(***) Consulter notamment : *Cinq études de Géométrie analytique.* (MÉM. SOC. ROY. SC. Liége, 1907.) — *Congruences de cubiques gauches.* (MÉM. IN-8° ACAD. ROY. DE BELG., 1920.) — *Algèbre à deux dimensions.* Gand, Van Rysselberghe et Rombaut, 1920).

cette courbe. La congruence obtenue est représentée par les équations

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_1 a'_x + \alpha_2 a_x & \alpha_1 b'_x + \alpha_2 b_x & \alpha_1 c'_x + \alpha_2 d'_x + \alpha_3 f'_x \\ \alpha_1 a''_x + \alpha_3 a_x & \alpha_1 b''_x + \alpha_3 b_x & \alpha_1 c''_x + \alpha_2 d''_x + \alpha_3 f''_x \end{matrix} \right\| = 0,$$

c'est-à-dire par une matrice dont les éléments sont linéaires par rapport aux paramètres $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Cette représentation est nouvelle.

1. — Soit Σ la congruence de cubiques gauches représentée par les équations

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_1 a'_x + \alpha_2 a_x & \alpha_1 b'_x + \alpha_2 b_x & \alpha_1^2 c'_x + \alpha_2^2 d_x + \alpha_1\alpha_2 d'_x + \alpha_1\alpha_3 f'_x + \alpha_2\alpha_3 f_x \\ \alpha_1 a''_x + \alpha_3 a_x & \alpha_1 b''_x + \alpha_3 b_x & \alpha_1^2 c''_x + \alpha_3^2 f_x + \alpha_1\alpha_3 f''_x + \alpha_1\alpha_2 d''_x + \alpha_2\alpha_3 d_x \end{matrix} \right\| = 0. \qquad (1)$$

Cette congruence est linéaire. Pour le prouver, il faut montrer que les équations (1), où les x sont fixes, admettent une seule solution $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Interprétons ces quantités comme coordonnées homogènes d'un plan (α). Le déterminant formé avec les deux premières colonnes de la matrice (1) représente, dans le plan (α), une conique dégénérée en deux droites, $\alpha_1 = 0$ et

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & a_x & b_x \\ -\alpha_2 & a'_x & b'_x \\ -\alpha_3 & a''_x & b''_x \end{vmatrix} = 0. \qquad (2)$$

Le déterminant formé par les deux dernières colonnes représente une cubique dégénérée en la droite $\alpha_1 = 0$ et la conique

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & b_x & \alpha_2 d_x + \alpha_3 f_x \\ -\alpha_2 & b'_x & \alpha_1 c'_x + \alpha_2 d'_x + \alpha_3 f'_x \\ -\alpha_3 & b''_x & \alpha_1 c''_x + \alpha_2 d''_x + \alpha_3 f''_x \end{vmatrix} = 0. \qquad (3)$$

La droite (2) et la conique (3) ont en commun deux points, dont l'un, situé à l'intersection des droites

$$\alpha_1 b'_x + \alpha_2 b_x = 0, \qquad \alpha_1 b''_x + \alpha_3 b_x = 0,$$

est une solution étrangère. Les coordonnées de l'autre point sont données par les équations

$$\left\| \begin{array}{cccc} \alpha_1 & a_x & b_x & \alpha_2 d_x + \alpha_3 f_x \\ -\alpha_2 & a'_x & b'_x & \alpha_1 c'_x + \alpha_2 d'_x + \alpha_3 f'_x \\ -\alpha_3 & a''_x & b''_x & \alpha_1 c''_x + \alpha_2 d''_x + \alpha_3 f''_x \end{array} \right\| = 0. \qquad (4)$$

Ces coordonnées sont donc proportionnelles à des fonctions rationnelles et entières des x. Donc, par un point de l'espace passe une seule cubique de la congruence Σ, et celle-ci est donc linéaire.

2. — La cubique gauche représentée par les équations (1) est située sur la quadrique (2). Elle est, de plus, située sur la surface cubique

$$\left| \begin{array}{ccc} a_x & b_x & \alpha_2 d_x + \alpha_3 f_x \\ \alpha_1 a'_x + \alpha_2 a_x & \alpha_1 b'_x + \alpha_2 b_x & \alpha_1^2 c'_x + \alpha_2^2 d_x + \alpha_1\alpha_2 d'_x + \alpha_1\alpha_3 f'_x + \alpha_2\alpha_3 f_x \\ \alpha_1 a''_x + \alpha_3 a_x & \alpha_1 b''_x + \alpha_3 b_x & \alpha_1^2 c''_x + \alpha_3^2 f_x + \alpha_1\alpha_3 f''_x + \alpha_1\alpha_2 d''_x + \alpha_2\alpha_3 d_x \end{array} \right| = 0.$$

En soustrayant successivement de la deuxième et de la troisième ligne la première multipliée par α_2 ou α_3 dans le déterminant précédent, l'équation de cette surface cubique s'écrit

$$\left| \begin{array}{ccc} a_x & b_x & \alpha_2 d_x + \alpha_3 f_x \\ a'_x & b'_x & \alpha_1 c'_x + \alpha_2 d'_x + \alpha_3 f'_x \\ a''_x & b''_x & \alpha_1 c''_x + \alpha_2 d''_x + \alpha_3 f''_x \end{array} \right| = 0. \qquad (5)$$

La courbe générique de la congruence Σ forme donc, avec la cubique gauche C_3, d'équations

$$\left\| \begin{array}{ccc} a_x & a'_x & a''_x \\ b_x & b'_x & b''_x \end{array} \right\| = 0, \qquad (6)$$

l'intersection des surfaces (2) et (5). En d'autres termes, les équations de la cubique générique de Σ peuvent s'écrire sous la forme (4).

Lorsque α_1, α_2 et α_3 varient, les surfaces (2) et (5) engendrent deux réseaux projectifs; par conséquent, la congruence Σ est le lieu des intersections variables des quadriques et des surfaces cubiques de deux réseaux projectifs, ces surfaces passant toutes par une cubique gauche fixe C_3.

3. — Nous allons montrer que la congruence Σ est la plus générale obtenue par ce procédé. A cet effet, considérons le réseau de quadriques

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & a_x & b_x \\ -\alpha_2 & a'_x & b'_x \\ -\alpha_3 & a''_x & b''_x \end{vmatrix} = 0.$$

Un réseau projectif à celui-ci, formé par des surfaces cubiques passant par C_3, peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x & \alpha_1 c_x + \alpha_2 d_x + \alpha_3 f_x \\ a'_x & b'_x & \alpha_1 c'_x + \alpha_2 d'_x + \alpha_3 f'_x \\ a''_x & b''_x & \alpha_1 c''_x + \alpha_2 d''_x + \alpha_3 f''_x \end{vmatrix} = 0.$$

Les équations de la cubique gauche qui, avec C_3, forment l'intersection de deux surfaces correspondantes de ces deux réseaux, sont

$$\left\Vert \begin{matrix} \alpha_1 & a_x & b_x & \alpha_1 c_x + \alpha_2 d_x + \alpha_3 f_x \\ -\alpha_2 & a'_x & b'_x & \alpha_1 c'_x + \alpha_2 d'_x + \alpha_3 f''_x \\ -\alpha_3 & a''_x & b''_x & \alpha_1 c''_x + \alpha_2 d''_x + \alpha_3 f''_x \end{matrix} \right\Vert = 0.$$

Ces équations peuvent s'écrire sous la forme

$$\left\Vert \begin{matrix} \alpha_1 & a_x & b_x & \alpha_1 c_x + \alpha_2 d_x + \alpha_3 f_x \\ 0 & \alpha_1 a'_x + \alpha_2 a_x & \alpha_1 b'_x + \alpha_2 b_x & \alpha_1(\alpha_1 c'_x + \alpha_2 d'_x + \alpha_3 f'_x) + \alpha_2(\alpha_1 c_x + \alpha_2 d_x + \alpha_3 f_x) \\ 0 & \alpha_1 a''_x + \alpha_3 a_x & \alpha_1 b''_x + \alpha_3 b_x & \alpha_1(\alpha_1 c''_x + \alpha_2 d''_x + \alpha_3 f''_x) + \alpha_3(\alpha_1 c_x + \alpha_2 d_x + \alpha_3 f_x) \end{matrix} \right\Vert = 0$$

ou encore

$$\left\Vert \begin{matrix} \alpha_1 a'_x + \alpha_2 a_x & \alpha_1 b'_x + \alpha_2 b_x & \alpha_1^2 c'_x + \alpha_2^2 d_x + \alpha_1\alpha_2(d'_x + c_x) + \alpha_1\alpha_3 f'_x + \alpha_2\alpha_3 f_x \\ \alpha_1 a''_x + \alpha_3 a_x & \alpha_1 b''_x + \alpha_3 b_x & \alpha_1^2 c''_x + \alpha_3^2 f_x + \alpha_1\alpha_3(f''_x + c_x) + \alpha_1\alpha_2 d''_x + \alpha_2\alpha_3 d_x \end{matrix} \right\Vert = 0.$$

Si l'on compare ces équations aux équations (1), on voit qu'elles ne diffèrent que par les coefficients de $\alpha_1\alpha_2$ et $\alpha_1\alpha_3$ dans la dernière colonne. On passerait des unes aux autres en écrivant d'_x au lieu de $d'_x + c_x$ et f''_x au lieu de $f''_x + c_x$. On en conclut que l'on peut toujours choisir, sans nuire à la généralité, les équations du réseau de surfaces cubiques, de manière que c_x soit identiquement nul, ce qui démontre le fait que nous avions avancé.

4. — Passons à la recherche des courbes singulières de la congruence Σ, c'est-à-dire du lieu des points (x) pour lesquels les équations (4) sont indéterminées en (α). Cela se présente dans deux cas :

En premier lieu, cela se présente si l'on a

$$\left\| \begin{matrix} a_x & a'_x & a''_x \\ b_x & b'_x & b''_x \end{matrix} \right\| = 0,$$

c'est-à-dire si le point (x) se trouve sur C_3. Cela est d'ailleurs évident, car on voit que les cubiques gauches de Σ s'appuient en cinq points sur la cubique gauche C_3 et que, par conséquent, par un point de C_3 passent ∞^1 courbes de Σ.

Les équations (4) peuvent devenir indéterminées dans un second cas. Écrivons-les sous la forme

$$\alpha_1 \begin{vmatrix} a'_x & b'_x \\ a''_x & b''_x \end{vmatrix} - \alpha_2 \begin{vmatrix} a''_x & b''_x \\ a_x & b_x \end{vmatrix} - \alpha_3 \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a'_x & b'_x \end{vmatrix} = 0,$$

$$\alpha_1 \begin{vmatrix} a_x & b_x & 0 \\ a'_x & b'_x & c'_x \\ a''_x & b''_x & c''_x \end{vmatrix} + \alpha_2 \begin{vmatrix} a_x & b_x & x \\ a'_x & b'_x & d'_x \\ a''_x & b''_x & d''_x \end{vmatrix} + \alpha_3 \begin{vmatrix} a_x & b_x & f_x \\ a'_x & b'_x & f'_x \\ a''_x & b''_x & f''_x \end{vmatrix} = 0.$$

Ces équations sont indéterminées si le point (x) vérifie les équations

$$\left\| \begin{matrix} \begin{vmatrix} a'_x & b'_x \\ a''_x & b''_x \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a''_x & b''_x \\ a_x & b_x \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a'_x & b'_x \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_x & b_x & 0 \\ a'_x & b'_x & c'_x \\ a''_x & b''_x & c''_x \end{vmatrix} & | a_x \quad b_x \quad d_x | & | a_x \quad b_x \quad f_x | \end{matrix} \right\| = 0. \tag{7}$$

Les équations (7) représentent une courbe d'ordre $25-6=19$. Remarquons que chaque élément de cette matrice s'annule une fois pour chaque point de C_3 ; chacun de ces points compte

*

donc trois fois dans le lieu géométrique représenté par (7); donc cette matrice représente une courbe d'ordre 19 formée de la cubique C_3, comptée trois fois, et d'une courbe C_{10}, d'ordre 10.

On conclut donc que la congruence Σ possède deux courbes singulières : la cubique gauche C_3 et une courbe C_{10} d'ordre 10.

5. — Pour étudier cette courbe C_{10}, nous construirons un réseau de surfaces F_5, d'ordre 5, générateur de Σ, c'est-à-dire un réseau tel que deux de ses surfaces aient comme intersection variable une courbe de la congruence Σ.

Considérons le faisceau de quadriques

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 + \lambda\beta_1 & a_x & b_x \\ -(\alpha_2 + \lambda\beta_2) & a'_x & b'_x \\ -(\alpha_3 + \lambda\beta_3) & a''_x & b''_x \end{vmatrix} = 0.$$

Ce faisceau sera déterminé si l'on se donne trois nombres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \alpha_3 & \beta_3 \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}.$$

Les surfaces cubiques correspondantes ont pour équation

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x & \alpha_2 d_x + \alpha_3 f_x + \lambda(\beta_2 d_x + \beta_3 f_x) \\ a'_x & b'_x & \alpha_1 c'_x + \alpha_2 d'_x + \alpha_3 f'_x + \lambda(\beta_1 c'_x + \beta_2 d'_x + \beta_3 f'_x) \\ a''_x & b''_x & \alpha_1 c''_x + \alpha_2 d''_x + \alpha_3 f''_x + \lambda(\beta_1 c''_x + \beta_2 d''_x + \beta_3 f''_x) \end{vmatrix} = 0.$$

Le lieu des courbes de Σ communes aux surfaces de ces deux réseaux a pour équation

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ (a'_x b''_x) & -(a''_x b_x) & -(a_x b'_x) \\ \begin{vmatrix} a_x & b_x & 0 \\ a'_x & b'_x & c'_x \\ a''_x & b''_x & c''_x \end{vmatrix} & |\, a_x \quad b_x \quad d_x \,| & |\, a_x \quad b_x \quad f_x \,| \end{vmatrix} = 0, \qquad (8)$$

où nous avons écrit $(a'_x b''_x)$ pour $a'_x b''_x - a'_x b''_x$, etc.

Ce lieu est une surface F_5, du cinquième ordre, passant doublement par C_3 et simplement par C_{10}.

Lorsque λ_1, λ_2, λ_3 varient, cette surface décrit un réseau $|F_5|$. Deux de ces surfaces n'ont évidemment en commun qu'une courbe de Σ, en dehors de C_3 et C_{10} ; par conséquent, les surfaces du cinquième ordre, passant doublement par C_3 et simplement par C_{10}, constituent un réseau générateur de Σ.

6. — Pour déterminer le genre de la courbe C_{10}, le nombre de ses points d'appui sur C_3 et le nombre des points d'appui des courbes de Σ sur cette courbe, nous utiliserons la représentation plane des surfaces F_5.

Observons tout d'abord qu'une surface F_5 contient onze droites, bisécantes de C_3. En effet, les bisécantes de C_3, s'appuyant sur une section plane C_5 de F_5, forment une surface d'ordre 8 passant quatre fois par C_3 et une fois par C_5. Une seconde section plane C'_5 de F_5 rencontre cette surface réglée d'ordre 8 en $5 \times 8 - 3 \times 2 \times 4 - 5 = 11$ points en dehors de C_3 et de C_5. Par chacun de ces points passe une droite rencontrant F_5 en quatre points distincts : deux, doubles, sur C_3, deux, simples, sur C_5 et C'_5 ; cette droite appartient donc à la surface F_5 considérée.

Considérons une surface F_5 déterminée et un plan π. Par un point de F_5 passe une bisécante de C_3 rencontrant π en un point. Inversement, par un point de π passe une bisécante de C_3 rencontrant F_5, en dehors de cette courbe, en un seul point. Nous avons donc une correspondance birationnelle entre F_5 et π, donc une représentation plane de cette surface sur π. Il résulte de ce qui a été dit plus haut que les sections planes de F_5 sont représentées, sur π, par des courbes γ_8, d'ordre 8, formant un système linéaire ∞^3, $|\gamma_8|$, possédant trois points-base quadruples (C_3, π) et onze points-base simples.

Considérons une cubique Γ de la congruence Σ située sur la surface F_5 envisagée. Γ appartient à une quadrique circonscrite à C_3 et cette quadrique rencontre encore F_5 en une droite, bisécante de C_3, sécante simple de Γ, qui est une des onze droites appartenant à F_5. On peut toujours supposer que le point d'appui de Γ sur cette droite n'appartient pas à C_{10}, car ce point d'appui est variable sur la droite. Cette droite ne peut, dans ces conditions, rencontrer C_{10}, car alors elle appartiendrait à toutes les surfaces F_5, ce qui est impossible. On en conclut que des onze bisécantes de C_3 appartenant à F_5, il y en a une qui rencontre Γ, mais non C_{10}, et dix qui rencontrent C_{10}, mais non Γ. De plus, une de ces dix droites ne peut être une bisécante de C_{10}, car alors elle appartiendrait à toutes les surfaces F_5, ce qui est impossible.

Soit x le nombre de points communs à C_3 et à C_{10}. Les bisécantes de C_3, s'appuyant sur C_{10}, forment une surface d'ordre $40 - 2x$ passant $20 - x$ fois par C_3 et une fois par C_{10}. Il en résulte que, dans la représentation plane de F_5 sur π, il correspond à C_{10} une courbe γ', d'ordre $40 - 2x$, ayant trois points multiples d'ordre $20 - x$ en (C_3, π) et passant simplement par dix des onze points-base simples de $|\gamma_8|$. Exprimons que C_{10} est d'ordre 10, c'est-à-dire que γ' est rencontrée par les courbes γ_8 en dix points variables. Il vient $8(40 - 2x) - 3 . 4 . (20 - x) - 10 = 10$; d'où $x = 15$. γ' est d'ordre 10 et possède trois points quintuples; donc elle est de genre 6, et il en est de même de C_{10}.

La courbe singulière C_{10}^6 est de genre 6 et s'appuie en quinze points sur C_3.

La quadrique contenant C_3 et Γ rencontre C_{10}, en dehors de C_3, en $20 - 15 = 5$ points; ces points sont sur Γ; donc les courbes de Σ s'appuient en cinq points sur C_{10}.

7. — Pour déterminer la classe de Σ, c'est-à-dire le nombre des cubiques de Σ ayant une droite donnée comme bisécante, observons que les surfaces du réseau $|F_5|$ découpent, sur une droite arbitraire d, une involution I_5^2 d'ordre 5 et de rang 2. Si

une cubique de Σ est bisécante de d, les points d'appui forment un couple neutre de I_5^2. Inversement, les points d'un couple neutre de I_5^2 appartiennent à ∞^1 surfaces F_5 formant un faisceau. La cubique de Σ, base avec C_3 et C_{10} de ce faisceau, est bisécante de d.

La classe de Σ est donc égale au nombre de couples neutres d'une involution I_5^2, donc à six (*).

8. — En résumé,

La congruence Σ est linéaire et de classe 6. Elle est le lieu :

1° *des cubiques gauches s'appuyant en cinq points sur une cubique gauche C_3 et sur une courbe C_{10}^6 d'ordre 10 et de genre 6 s'appuyant elle-même en quinze points sur C_3 ;*

2° *des intersections variables des quadriques et des surfaces cubiques de deux réseaux projectifs dont les surfaces passent par C_3 ;*

3° *des intersections variables des surfaces du cinquième ordre passant doublement par C_3 et simplement par C_{10}.*

9. — Reprenons les équations (1) et supposons que l'on ait d_x, f_x identiquement nuls. On pourra alors diviser la dernière colonne par α_1 et les équations s'écriront

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_1 a'_x + \alpha_2 a_x & \alpha_1 b'_x + \alpha_2 b_x & \alpha_1 c'_x + \alpha_2 d'_x + \alpha_3 f'_x \\ \alpha_1 a''_x + \alpha_3 a_x & \alpha_1 b''_x + \alpha_3 b_x & \alpha_1 c''_x + \alpha_2 d''_x + \alpha_3 f''_x \end{matrix} \right\| = 0. \quad (9)$$

La cubique gauche représentée par ces équations peut aussi l'être par

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_1 & a_x & b_x & 0 \\ -\alpha_2 & a'_x & b'_x & \alpha_1 c'_x + \alpha_2 d'_x + \alpha_3 f'_x \\ -\alpha_3 & a''_x & b''_x & \alpha_1 c''_x + \alpha_2 d''_x + \alpha_3 f''_x \end{matrix} \right\| = 0. \quad (10)$$

(*) F. Deruyts, *Mémoire sur la théorie de l'involution et de l'homographie unicursale.* (Mém. Soc. roy. Sc. Liége, 1890 (2), XVII [voir p. 91].)

Elle engendre donc, lorsque $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ varient, une congruence linéaire que nous désignerons par Σ'.

La congruence Σ' est le lieu des intersections variables des quadriques (2) et des surfaces cubiques

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x & 0 \\ a'_x & b'_x & \alpha_1 c'_x + \alpha_2 d''_x + \alpha_3 f''_x \\ a''_x & b''_x & \alpha_1 c''_x + \alpha_2 d''_x + \alpha_3 f''_x \end{vmatrix} = 0.$$

Ces dernières ont en commun, non seulement la cubique gauche C_3, mais aussi la droite C_1,

$$a_x = 0, \qquad b_x = 0,$$

bisécante de cette cubique.

On voit aisément, en utilisant les équations (8), que la droite C_1 appartient à toutes les surfaces F_5 et est simple pour ces surfaces.

Une courbe de Σ' se trouve sur une quadrique passant par C_3 et ne rencontrant pas, en général, C_1 en dehors de cette courbe. Par conséquent, les courbes de Σ' ne s'appuient pas sur C_1.

La courbe C_{10}^6 dégénère en une courbe C_9 et la droite C_1. Les surfaces F_5 marquent, sur un plan passant par C_1, un réseau de courbes du quatrième ordre. Ce réseau doit être de degré effectif 3, puisque les intersections variables des F_5 sont des cubiques gauches ne s'appuyant pas sur C_1. D'autre part, ces courbes du quatrième ordre doivent avoir un point double sur C_3 et deux points simples situés sur C_3 et C_1. Les points-base restants du réseau sont donc au nombre de sept; ils appartiennent à C_9, d'ordre 9, et, par suite, C_9 s'appuie en deux points sur C_1.

D'après une formule de Nœther, on déduit que la courbe C_{10}^6, de genre 6, dégénérant en une courbe rationnelle C_1 et en une courbe C_9 ayant deux points communs avec C_1, cette courbe C_9 est de genre 5. Donc

La congruence linéaire Σ' est le lieu des cubiques gauches s'appuyant en cinq points sur une cubique gauche C_3 et sur une courbe C_9^5, d'ordre 9 et de genre 5, s'appuyant elle-même en treize points sur C_3.

Les autres propriétés de Σ se transportent immédiatement à la nouvelle congruence Σ'.

10. — Les formules (9) constituent une nouvelle représentation d'une congruence linéaire de cubiques gauches par une matrice à six éléments, linéaires par rapport aux paramètres α_1. α_2, α_3. Cette représentation est distincte des six qui ont été mentionnées par M. Stuyvaert dans ses travaux déjà cités. Nous allons l'examiner de plus près.

Lorsque, dans la matrice (9), on fixe les x, on doit trouver une seule solution $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

Le déterminant formé avec les deux premières colonnes représente, dans le plan (α), une conique qui dégénère en la droite $\alpha_1 = 0$ et en la droite d'équation (2).

Le déterminant formé avec les deux dernières colonnes représente une conique qui rencontre la droite (2) en deux points, dont l'un, situé à l'intersection des droites

$$\alpha_1 b'_x + \alpha_2 b_x = 0, \qquad \alpha_1 b''_x + \alpha_3 b_x = 0,$$

est une solution étrangère, et l'autre, qui convient à la question, est représenté par les équations (10).

Cette dernière conique que nous venons de rencontrer a, en commun avec la droite $\alpha_1 = 0$, deux points variables avec le point (x). Pour achever la question, il faut donc montrer que les points de la droite $\alpha_1 = 0$ fournissent des solutions étrangères.

Si dans les équations (9), nous posons $\alpha_1 = 0$, nous trouvons

$$\left\| \begin{array}{ccc} \alpha_2 a_x & \alpha_2 b_x & \alpha_2 d'_x + \alpha_3 f'_x \\ \alpha_3 a_x & \alpha_3 b_x & \alpha_2 d''_x + \alpha_3 f''_x \end{array} \right\| = 0.$$

On satisfait à ces équations, soit en posant

$$\alpha_2^2 d''_x + \alpha_2\alpha_3 (f''_x - d'_x) - \alpha_3^2 f'_x = 0,$$

ce qui représente les plans tangents à un cône du second ordre, soit en posant

$$a_x = b_x = 0,$$

ce qui représente la droite C_1. On voit donc bien que les valeurs $(\alpha_1 = 0,\ \alpha_2,\ \alpha_3)$ fournissent des solutions étrangères à la question.