ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE
Extrait des *Bulletins de la Classe des sciences*. Séance du 6 novembre 1920, nº 11, pp. 554-560.

Sur une surface du quatrième ordre à douze points doubles coniques,

par LUCIEN GODEAUX,
lieutenant d'artillerie, docteur en sciences, répétiteur à l'École militaire (*).

Dans des recherches antérieures (**), nous avons déterminé les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface Φ de genres un soit l'image d'une involution appartenant à une surface F de genres un. Ces conditions sont l'existence de certains points doubles pour la surface Φ et celle de certains systèmes de surfaces passant par ces points doubles et ayant, avec la surface Φ, en chaque point d'intersection, des contacts déterminés. Cependant, l'existence de la surface Φ elle-même n'est pas démontrée par la connaissance de ces conditions. Pour cette raison, il ne nous a pas paru inutile de consacrer cette note à la construction d'une surface-image d'une involution d'ordre quatre engendrée, sur une surface de genres un, par un groupe trirectangle de transformations birationnelles involutives.

Nous démontrons précisément que

Une surface du quatrième ordre possédant douze points doubles coniques distribués par couples sur les arêtes d'un tétraèdre est l'image d'une involution d'ordre quatre engendrée, sur une surface du quatrième ordre, par un groupe trirectangle d'homographies biaxiales involutives.

(*) Présenté par MM. Stuyvaert et Neuberg.

(**) émoire sur les involutions appartenant à une surface de genres un. (ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, 1914, 3e sér., t. XXXI, pp. 357-430; 1919, 3e sér., t. XXXVI, pp. 51-70.)

Il est d'ailleurs bien connu qu'une surface du quatrième ordre ne contenant que des points doubles coniques est de genres un ($p_a = p_g = \cdots = P_4 = \cdots = 1$, $p^{(1)} = 1$) (*).

1. — Soit Φ une surface d'ordre quatre, possédant douze points doubles coniques (et dépourvue d'autres points multiples) distribués par couples sur les arêtes d'un tétraèdre que nous prendrons comme tétraèdre de référence. Désignons par P_{ik}, P'_{ik} les points situés sur l'arête d'équations $x_i = x_k = 0$, ik étant une combinaison des nombres 1, 2, 3, 4.

Nous avons établi que, pour que Φ soit l'image d'une involution d'ordre quatre et de deuxième espèce (c'est-à-dire engendrée par un groupe trirectangle de transformations birationnelles involutives) appartenant à une surface F de genres un, il faut et il suffit que l'on puisse partager les douze points doubles en deux groupes de huit (ayant quatre points communs) tels qu'il y ait ∞^1 quadriques passant par les points de chacun des groupes et touchant Φ en chaque point d'intersection.

Soient P_{12}, P'_{12}, P_{34}, P'_{34}, P_{13}, P'_{13}, P_{24}, P'_{24} les points formant le premier groupe, (P_1), P_{12}, P'_{12}, P_{34}, P'_{34}, P_{14}, P'_{14}, P_{23}, P'_{23} les points formant le second groupe (P_2).

Nous avons montré autrefois que si, par huit points doubles coniques d'une surface du quatrième ordre, il passe ∞^1 quadriques touchant cette surface en chaque point d'intersection, ces huit points sont associés (c'est-à-dire communs aux quadriques d'un réseau) et la surface du quatrième ordre est l'enveloppe d'une série ∞^1 d'indice deux de quadriques (**).

(*) Cela résulte du fait qu'un point double d'une surface algébrique est sans influence sur les adjointes, et que d'autre part, une surface du quatrième ordre générale est régulière et a une courbe canonique d'ordre zéro

(**) *Mémoire sur les surfaces algébriques doubles ayant un nombre fini de points de diramation.* (ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE, 1914, 3e sér., t. V, pp. 289-312.) (Voir p. 314.)

Nous allons montrer que les points de chacun des groupes (P_1), (P_2) sont associés et ensuite que Φ peut être considérée de deux manières comme l'enveloppe d'une série ∞^1 d'indice deux de quadriques.

2. — Auparavant, nous établirons que les douze points doubles de Φ sont situés sur une quadrique (*).

Considérons le cône formé par les droites issues de P_{12} et touchant Φ en un autre point. Il est du sixième ordre et passe doublement par les onze points doubles restants de Φ. Mais les points P'_{12}, P_{13}, P'_{13}, P_{14}, P'_{14} sont situés dans un plan $x_1 = 0$ passant par P_{12}; donc ce plan fait partie du cône en question et touche par suite Φ suivant une conique γ_1. De même, les plans $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ touchent Φ suivant des coniques respectivement γ_2, γ_3, γ_4. Deux coniques γ_i, γ_k ont en commun les deux points P_{ik}, P'_{ik}. Par γ_1, γ_2 passent donc ∞^1 quadriques. Considérons celle de ces quadriques qui passe par P_{34}. Elle rencontre γ_3 en cinq points, P_{23}, P'_{23}, P_{14}, P'_{14}, P_{34}; donc elle contient cette conique. De même, elle contient γ_4 et par suite :

Les douze points doubles de Φ sont sur une quadrique (Rohn).

3. — Soit

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

l'équation de cette quadrique. Remarquons qu'elle possède nécessairement des termes en x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2.

Les points du groupe (P_1) sont sur les quadriques linéairement indépendantes

$$x_1x_4 = 0, \qquad x_2x_3 = 0, \qquad f = 0,$$

(*) Ce théorème est dû à M. Rohn, qui a étudié la surface Φ dans le mémoire : *Die Flächen vierter Ordnüng hinsichtlich ihrer Knotenpunkte ünd ihrer Gestaltung.* (Preisschriften von der Fürst. Jablonowski'schen Gesellschaft zu Leipzig, 1886.)

et les points de (P_2) sur les quadriques

$$x_1x_3 = 0, \qquad x_2x_4 = 0, \qquad f = 0;$$

donc ce sont des groupes de points associés.

Considérons les deux systèmes ∞^1 d'indice deux :

$$\lambda^2 x_1x_4 + 2\lambda f(x_1, x_2, x_3, x_4) + ax_2x_3 = 0,$$
$$\mu^2 x_1x_3 + 2\mu f(x_1, x_2, x_3, x_4) + ax_2x_3 = 0,$$

où a est une constante. Ils ont comme enveloppe commune la surface

$$\{f(x_1, x_2, x_3, x_4)\}^2 - ax_1x_2x_3x_4 = 0, \tag{1}$$

qui est irréductible et du quatrième ordre.

Remarquons, d'autre part, que deux surfaces du quatrième ordre ayant les douze points doubles $P_{12}, \ldots, P'_{34}$ se touchent nécessairement le long des coniques $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$. Par suite, il y a au plus ∞^1 (formant un faisceau) de ces surfaces. Deux de celles-ci sont $f^2 = 0$ et $x_1x_2x_3x_4 = 0$; donc l'équation (1) représente une surface générale du type envisagé (*) et en particulier, elle représente la surface Φ pour une valeur convenable de a.

De tout ceci, on conclut que *la surface Φ représente une involution d'ordre quatre, engendrée par un groupe trirectangle, appartenant à une surface F de genres un.*

4. — Ainsi que nous l'avons montré dans notre *Mémoire* cité au début, on peut prendre, comme « modèle projectif » de la surface F, la surface d'équations

$$[f(x_1, x_2, x_3, x_4)]^2 - ax_1x_2x_3x_4 = 0, \tag{1}$$
$$x_5^2 = \lambda^2 x_1x_4 + 2\lambda f(x_1, x_2, x_3, x_4) + ax_2x_3, \tag{2}$$
$$x_6^2 = \mu^2 x_1x_3 + 2\mu f(x_1, x_2, x_3, x_4) + ax_2x_4, \tag{3}$$

où λ et μ ont des valeurs déterminées. F est d'ordre seize.

(*) ROHN, *loc. cit.*

L'involution d'ordre quatre, dont Φ est l'image, est engendrée par les transformations birationnelles

$$(T_1) \qquad \frac{x'_1}{x_1} = \frac{x'_2}{x_2} = \frac{x'_3}{x_3} = \frac{x'_4}{x_4} = \frac{x'_5}{-x_5} = \frac{x'_6}{x_6},$$

$$(T_2) \qquad \frac{x'_1}{x_1} = \frac{x'_2}{x_2} = \frac{x'_3}{x_3} = \frac{x'_4}{x_4} = \frac{x'_5}{x_5} = \frac{x'_6}{-x_6},$$

$$(T_3 \equiv T_1T_2) \qquad \frac{x'_1}{x_1} = \frac{x'_2}{x_2} = \frac{x'_3}{x_3} = \frac{x'_4}{x_4} = \frac{x'_5}{-x_5} = \frac{x'_6}{-x_6}.$$

Nous allons transformer birationnellement F en une surface F^*, du quatrième ordre, située dans un S_3. A cet effet, posons, ρ étant un facteur de proportionnalité,

$$(4) \qquad \begin{cases} \rho x_1 = y_1^2, & \rho x_2 = y_2^2, \quad \rho x_3 = y_3^2, \quad \rho x_4 = y_4^2, \\ \rho x_5 = \lambda y_1 y_4 + \sqrt{a}\, y_2 y_3, & \rho x_5 = \mu y_1 y_3 + \sqrt{a}\, y_2 y_4. \end{cases}$$

Cela revient à rapporter projectivement les hyperplans de l'espace S_5 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ contenant F aux quadriques d'un système linéaire

$$(5) \qquad \alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + \alpha_3 y_3^2 + \alpha_4 y_4^2 + \alpha_5(\lambda y_1 y_4 + \sqrt{a}\, y_2 y_3) + \alpha_6(\mu y_1 y_3 + \sqrt{a}\, y_2 y_4) = 0,$$

d'un S_3 (y_1, y_2, y_3, y_4). Remarquons que ce système linéaire de quadriques est dépourvu de points-base.

Moyennant les formules (4), les équations (1), (2), (3) deviennent

$$(1') \qquad [f(y_1^2, y_2^2, y_3^2, y_4^2)]^2 - a y_1^2 y_2^2 y_3^2 y_4^2 = 0,$$

$$(2'), (3') \qquad \sqrt{a}\, y_1 y_2 y_3 y_4 = f(y_1^2, y_2^2, y_3^2, y_4^2).$$

La première relation est vérifiée par la seconde. Les formules (4) transforment donc F en une surface F^* d'ordre quatre, d'équation

$$(6) \qquad \sqrt{a}\, y_1 y_2 y_3 y_4 - f(y_1^2, y_2^2, y_3^2, y_4^2) = 0.$$

La courbe commune à deux quadriques du système (5) rencontre F^* en seize points ; donc, l'ordre de F étant seize également, les surfaces F, F^* se correspondent birationnellement.

A la transformation T_1 correspond une transformation T_1^* de F^* en elle-même. Le point (y'_1, y'_2, y', y'_4) que T_1^* fait correspondre à (y_1, y_2, y_3, y_4) doit être tel que

$$\frac{y_1'^2}{y_1^2} = \frac{y_2'^2}{y_2^2} = \frac{y_3'^2}{y_3^2} = \frac{y_4'^2}{y_4^2} = \frac{\lambda y'_1 y'_4 + \sqrt{a}\, y'_2 y'_3}{-\lambda y_1 y_4 - \sqrt{a}\, y_2 y_3} = \frac{\mu y'_1 y'_3 + \sqrt{a}\, y'_2 y'_4}{\mu y_1 y_3 + \sqrt{a}\, y_2 y_4}.$$

On en déduit aisément que T_1^* ne peut être que l'homographie biaxiale

$$(T_1^*) \qquad \frac{y'_1}{y_1} = \frac{y'_2}{-y_2} = \frac{y'_3}{y_3} = \frac{y'_4}{-y_4}.$$

De même, aux transformations T_2, T_3 correspondent respectivement des homographies involutives biaxiales :

$$(T_2^*) \qquad \frac{y'_1}{y_1} = \frac{y'_2}{-y_2} = \frac{y'_3}{-y_3} = \frac{y'_4}{y_4},$$

$$(T_3^* \equiv T_1^* T_2^*) \qquad \frac{y'_1}{y_1} = \frac{y'_2}{y_2} = \frac{y'_3}{-y_3} = \frac{y'_4}{-y_4}.$$

Et ces trois homographies forment bien un groupe trirectangle :

$$T_3^* \equiv T_1^* T_2^* \equiv T_2^* T_1^*, \ldots.$$

5. — Inversement, l'involution d'ordre quatre engendrée sur F^*, d'équation (6), par T_1^*, T_2^*, T_3^*, a bien pour image la surface Φ.

En effet, les quadriques ne passant par aucun point fixe et invariantes par rapport aux trois transformations, forment un système linéaire

$$\alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + \alpha_3 y_3^2 + \alpha_4 y_4^2 = 0.$$

Rapportons projectivement ces quadriques aux plans d'un S_3, en posant

$$\frac{x_1}{y_1^2} = \frac{x_2}{y_2^2} = \frac{x_3}{y_3^2} = \frac{x_4}{y_4^2}.$$

L'équation (6) se transforme en

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sqrt{a} \cdot \sqrt{x_1 x_2 x_3 x_4},$$

équivalente à l'équation (1).

Remarquons de plus que la surface (6) est la surface la plus générale d'ordre quatre invariante pour $T_1^\star$, $T_2^\star$, $T_3^\star$.

Nous avons donc complètement démontré le théorème énoncé au début de ce travail.

Observation. — Dans le mémoire cité plus haut, M. Rohn établit une classification des surfaces d'ordre quatre ayant de huit à seize points doubles. Il résulte de cette classification que parmi les surfaces à douze points doubles, il existe des types ne pouvant pas être image d'une involution d'ordre quatre analogue à celle qui a été rencontrée ici. On voit donc que les deux groupes de conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface normale de genres un soit l'image d'une telle involution, à savoir :

1° L'existence de douze points doubles coniques;

2° L'existence de certains systèmes d'hyperquadriques touchant la surface,

sont en général indépendants.

Bruxelles. — Imprimerie M. HAYEZ, rue de Louvain, 112.