SUR L'INVERSION ET SUR UNE SURFACE CUBIQUE A QUATRE POINTS DOUBLES,

par L. GODEAUX, Professeur à l'École Militaire.

1. Si x, y, z sont les coordonnées ponctuelles homogènes, par rapport à un triangle de référence ABC dans un plan ϖ, on appelle *inverse* d'un point P (x, y, z) de ce plan le point P$'$ dont les coordonnées sont proportionnelles à $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}\cdot$ L'opération qui consiste à passer d'un point à son inverse est appelée *inversion*.

Entre les coordonnées x, y, z d'un point P et celles x', y', z' de son inverse P$'$, on a les relations

$$xx' = yy' = zz'.$$

Ces équations montrent que si le point P coïncide avec un des sommets du triangle de référence ABC, par exemple avec A ($y = 0$, $z = 0$), son inverse est indéterminé et se trouve sur la droite BC ($x = 0$). Réciproquement, l'inverse d'un point de la droite BC, distinct de B et de C, coïncide avec le point A.

Si P$'$ est l'inverse d'un point P non situé sur un des côtés du triangle ABC, P$'$ jouit de la même propriété et si P$''$ est l'inverse de P$'$, P$''$ coïncide avec P. L'inversion est donc une opération *réciproque*.

Les points dont les coordonnées vérifient les équations

$$x^2 = y^2 = z^2,$$

c'est-à-dire les points I $(x = y = z)$, I_1 $(-x = y = z)$, I_2 $(x = -y = z)$, I_3 $(x = y = -z)$, sont chacun son propre inverse. On les appelle les *points invariants* de l'inversion.

Le lieu des inverses des points d'une courbe est une courbe appelée *inverse* de la première. Ces deux courbes peuvent éventuellement coïncider, on a alors une courbe qui est sa propre inverse.

Les inverses des droites

$$ax + by + cz = 0$$

sont les coniques

$$ayz + bzx + cxy = 0$$

circonscrites au triangle ABC.

2. Considérons les cubiques planes

$$ax(y^2+z^2)+by(z^2+x^2)+cz(x^2+y^2)+dxyz=0. \quad (1)$$

Chacune de ces courbes est sa propre inverse (*).

Considérons d'autre part les formules

$$\frac{X}{x(y^2+z^2)}=\frac{Y}{y(z^2+x^2)}=\frac{Z}{z(x^2+y^2)}=\frac{T}{xyz}, \quad (2)$$

X, Y, Z, T étant les coordonnées ponctuelles homogènes de l'espace.

Au moyen des formules (2), à un point (x, y, z) du plan ϖ correspond un et un seul point (X, Y, Z, T) de l'espace. De plus, le même point (X, Y, Z, T) correspond également à l'inverse $\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right)$ du point (x, y, z).

Le lieu des points (X, Y, Z, T) qui correspondent aux points du plan ϖ est une surface F dont l'équation s'obtient en éliminant x, y, z entre les équations (2). Pour faire cette élimination, écrivons les équations (2) sous la forme

$$\frac{y}{z}+\frac{z}{y}=\frac{X}{T}, \quad \frac{z}{x}+\frac{x}{z}=\frac{Y}{T}, \quad \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{Z}{T}. \quad (3)$$

En retranchant de la somme des carrés des équations (3) le produit de ces équations, on obtient pour l'équation de F (**)

$$T(X^2+Y^2+Z^2)-XYZ-4T^3=0. \quad (4)$$

C'est une surface cubique.

(*) En empruntant un terme proposé par Moutard pour les lignes et les surfaces qui ne changent pas dans une transformation par rayons vecteurs réciproques, on a dit que l'équation (1) représente une *cubique anallagmatique*. Une seconde catégorie de cubiques anallagmatiques est représentée par

$$ax(y^2-z^2)+by(z^2-x^2)+cz(x^2-z^2)=0.$$

Voir à ce sujet JMS, 1889-265 et 1890-63. (J. N.)

(**) Comparer la solution de la question suivante de M, 1890 — 22 : *Pour que les équations*

$$y^2+z^2-2ayz=0, \qquad z^2+x^2-2bzx=0, \qquad x^2+y^2-2cxy=0$$

soient compatibles, il faut et il suffit que l'on ait

$$a^2+b^2+c^2-2abc=1. \qquad \text{(J. N.)}$$

La symétrie et la forme particulière des équations (3) suggèrent la substitution $(i=\sqrt{-1})$

$$x=e^{i\alpha}, \quad y=e^{i\beta}, \quad z=e^{i\gamma},$$

Observons que, moyennant les formules (2), à une courbe (1) correspond une section de F par le plan

$$aX + bY + cZ + dT = 0,$$

et réciproquement. En d'autres termes, la surface F a été obtenue en établissant une projectivité entre les plans de l'espace et les courbes de la famille (1), où a, b, c, d sont supposés variables.

3. Nous allons rechercher quels sont les points qui correspondent, sur F, aux sommets du triangle de référence ABC du plan ϖ. A cet effet, écrivons les équations (2) sous la forme

$$\frac{X}{y^2 + z^2} = \frac{T}{yz}, \quad \frac{Y}{z^2 + x^2} = \frac{T}{zx}, \quad \frac{Z}{x^2 + y^2} = \frac{T}{xy}.$$

Au point A ($y = 0$, $z = 0$) correspondent tous les points de la droite $X = T = 0$; au point B ($z = 0$, $x = 0$), tous les points de la droite $Y = T = 0$; au point C ($z = 0$, $y = 0$), tous les points de la droite $Z = T = 0$.

D'autre part, considérons un point P de la droite BC ($x = 0$). Il lui correspond, sur la surface F, un point de coordonnées $X = 0$, $\frac{Y}{z} = \frac{Z}{x}$, $T = 0$, c'est-à-dire un point de la droite qui correspond au point A.

Nous voyons donc que : *à un couple de points inverses formé par un sommet du triangle* ABC *et un point du côté opposé, correspond, sur la surface* F, *un point situé sur une droite de l'intersection du plan* $T = 0$ *et de la surface* F.

4. Le théorème précédent va nous permettre de préciser la nature de la correspondance existant entre le plan ϖ et la surface F.

Considérons deux cubiques

$$ax(y^2 + z^2) + by(z^2 + x^2) + cz(x^2 + y^2) + dxyz = 0,$$

$$a'x(y^2 + z^2) + b'y(z^2 + x^2) + c'z(x^2 + y^2) + d'xyz = 0,$$

---

par laquelle ces équations deviennent

$$\cos(\beta - \gamma) = \frac{X}{2T}, \quad \cos(\gamma - \alpha) = \frac{Y}{2T}, \quad \cos(\alpha - \beta) = \frac{Z}{2T}.$$

Mais $(\beta - \gamma) + (\gamma - \alpha) + (\alpha - \beta) = 0$; donc

$$\cos^2(\beta - \gamma) + \cos^2(\gamma - \alpha) + \cos^2(\alpha - \beta) - 2\cos(\beta - \gamma)\cos(\gamma - \alpha)\cos(\alpha - \beta) - 1 = 0.$$

On en conclut l'équation (4). (Ad. M.)

et soient P, Q, R les points où la première rencontre respectivement les côtés BC, CA, AB du triangle ABC, en dehors des sommets de ce triangle ; P', Q', R' les points de rencontre de la seconde avec les mêmes droites, dans les mêmes conditions. Les deux cubiques ont en commun neuf points dont trois sont A, B, C, les six autres formant trois couples de points inverses.

Considérons maintenant les plans

$$aX + bY + cZ + dT = 0, \quad a'X + b'Y + c'Z + d'T = 0$$

qui correspondent, par les formules (2), aux cubiques considérées. La droite commune à ces plans rencontre F en trois points L, M, N qui doivent correspondre aux points communs aux deux cubiques considérées. Nous allons voir qu'à chacun des points L, M, N correspond un couple de points inverses, communs aux deux cubiques et distincts de A, B, C.

Nous pouvons tout d'abord supposer que les points L, M, N ne se trouvent pas dans le plan $T = 0$. Aux couples AP, AP' correspondent des points distincts de la droite $X = T = 0$, et ces points sont distincts des points L, M, N. De même, les points de F correspondant aux couples BQ, BQ', CR, CR' sont distincts des points L, M, N. Par conséquent, ces points L, M, N correspondent aux six points communs aux deux cubiques, en dehors des points A, B, C. D'autre part, nous avons vu qu'un même point de la surface F correspond à deux points du plan ϖ inverses l'un de l'autre. Par suite, à chacun des points L, M, N doit correspondre un couple de points inverses commun aux deux cubiques considérées.

En résumé :

A un couple de points inverses du plan ϖ *correspond un point de la surface* F, *et réciproquement.*

5. Considérons le point invariant I ($x = y = z$). Il lui correspond, sur la surface F, un point I' de coordonnées proportionnelles à (2, 2, 2, 1). Le point I' est un point double de la surface F, car ses coordonnées annulent les dérivées partielles du premier membre de l'équation (4) par rapport à X, Y, Z, T.

Il en est de même des points I'_1 (—2, 2, 2, —1), I'_2 (2, —2, 2, —1), I'_3 (2, 2, —2, —1), correspondant respectivement aux points invariants I_1, I_2, I_3.

Aux points invariants de l'inversion, correspondent des points doubles de la surface F.

On peut voir de plus qu'aux arêtes du tétraèdre $I'I'_1I'_2I'_3$ correspondent les droites joignant deux-à-deux les points I, I_1, I_2, I_3, droites qui sont leurs propres inverses.

Considérons par exemple la droite II_1, d'équation $y = z$. Il lui correspond, sur F, la droite définie par

$$\frac{X}{2xy^2} = \frac{Y}{y\,(x^2 + y^2)} = \frac{Z}{y\,(x^2 + y^2)} = \frac{T}{xy^2},$$

c'est-à-dire la droite d'équations

$$X = 2T, \qquad Y = Z,$$

qui passe par les points I', I'_1.

Remarquons encore que la droite $X = T = 0$, par exemple, s'appuie sur les droites II_1 $(X = 2T, Y = Z)$ et I_2I_3 $(X + 2T = 0, Y + Z = 0)$.

En résumé : *La surface* F *est circonscrite à un tétraèdre* $I'I'_1I'_2I'_3$ *dont les sommets sont des points doubles de cette surface; elle contient en outre trois droites coplanaires* (dans le plan $T = 0$) *s'appuyant chacune sur deux arêtes opposées du tétraèdre.*

6. Effectuons une transformation de coordonnées en prenant pour nouveau tétraèdre de référence $I'I'_1I'_2I'_3$. Les équations des faces de ce tétraèdre étant

$$-X + Y + Z - 2T = 0, \quad X - Y + Z - 2T = 0,$$
$$X + Y - Z - 2T = 0, \quad X + Y + Z + 2T = 0,$$

nous poserons, α, β, γ, δ étant des quantités quelconques,

$$\alpha X' = -X + Y + Z - 2T, \quad \beta Y' = X - Y + Z - 2T,$$
$$\gamma Z' = X + Y - Z - 2T, \quad \delta T' = X + Y + Z + 2T.$$

En éliminant X, Y, Z, T entre ces relations et l'équation (4) de la surface F, on obtient l'équation de cette surface

$$\frac{1}{\alpha} Y'Z'T' + \frac{1}{\beta} X'Z'T' + \frac{1}{\gamma} X'Y'T' - \frac{1}{\delta} X'Y'Z' = 0,$$

rapportée au nouveau tétraèdre.

Or, cette équation est celle de la surface cubique assujettie à la seule condition de posséder quatre points doubles aux sommets du tétraèdre de référence [1], par suite :

On peut toujours faire correspondre aux couples de points inverses d'un plan, les points d'une surface cubique à quatre points doubles, de manière que cette correspondance soit réciproque.

(1) Voir par exemple : F. Dumont. *Géométrie du troisième ordre*. Annecy, 1904, p. 185.