Bulletin de la Classe des sciences

Sur le système canonique des surfaces algébriques triples (seconde note)

Lucien Godeaux

Résumé
Construction du système canonique de certaines surfaces algébriques images d'involutions cycliques du troisième ordre qui n'ont qu'un nombre fini de points unis appartenant à des surfaces algébriques.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur le système canonique des surfaces algébriques triples

(seconde note)

par Lucien Godeaux
Membre de l'Académie

Résumé. — Construction du système canonique de certaines surfaces algébriques images d'involutions cycliques du troisième ordre qui n'ont qu'un nombre fini de points unis appartenant à des surfaces algébriques.

Si une surface algébrique contient une involution cyclique du troisième ordre, son système canonique comprend en général trois systèmes linéaires composés au moyen de l'involution dont l'un, de dimension $p'_a - 1$, est le transformé du système canonique de la surface F′ image de l'involution.

Si l'involution est dépourvue de points unis, les autres systèmes ont la dimension p'_a. Dans notre première note (1), nous avons supposé que l'involution possédait des points unis isolés, les uns de première espèce et les autre de seconde espèce et nous avons montré que la propriété précédente n'était plus vraie. Dans un exemple que nous avons considéré, le système canonique a une dimension supérieure à celle des autres systèmes. Dans cette seconde note, nous considérons un exemple analogue et nous parvenons à la même conclusion, mais la différence entre les dimensions est complètement différente, sauf dans un cas où tous les points unis sont de seconde espèce.

Nous étendrons nos considérations au cas où la surface F possède

(1) La première note est paruc dans cc Bullctin, 1970, pp. 856-864.

un système canonique privé de point-base qui contient trois systèmes linéaires partiels composés au moyen de l'involuton.

Il restera à étudier le cas où tous les points unis sont de première espèce. Ce sera l'objet d'une troisième note.

I

1. Soient $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ trois espaces linéaires à r dimensions ne se rencontrant pas deux à deux et appartenant par conséquent à un espace linéaire S_{3r+2} à $3r+2$ dimensions. Comme dans notre première note, nous désignerons par $x_0, x_1, \ldots, x_r$ les coordonnées d'un point x de σ_0, par $y_0, y_1, \ldots, y_r$ celles d'un point y de σ_1, par $z_0, z_1, \ldots, z_r$ celles d'un point de z de σ_2, de telle sorte que les coordonnées d'un point de S_{3r+2} soient x, y, z.

Considérons alors l'homographie H, cyclique d'ordre trois, d'équations

$$\rho x_i' = x_i, \quad \rho y_i' = \varepsilon y_i, \quad \rho z_i' = \varepsilon^2 z_i, \qquad (i = 0, 1, \ldots, r)$$

où ε est une racine primitive cubique de l'unité.

Les hypersurfaces cubiques transformées en elles-mêmes par H forment trois systèmes linéaires $|V_0|, |V_1|, |V_2|$ dont les équations peuvent s'écrire, en utilisant les notations des formes algébriques,

$$a_x^3 + b_y^3 + c_z^3 + d_x d_y d_z = 0, \qquad (V_0)$$

$$a_x^2 a_y + b_y^2 b_z + c_z^2 c_x = 0, \qquad (V_1)$$

$$a_x^2 a_z + b_y^2 b_x + c_z^2 c_y = 0, \qquad (V_2)$$

les coefficients étant des variables.

Les nombres d'hypersurfaces linéairement indépendantes de ces systèmes sont respectivement

$$3\binom{r+3}{3} + (r+1)^3, \quad 2\binom{r+2}{2}(r+1), \quad 2\binom{r+2}{2}(r+1),$$

la somme de ces nombres étant le nombre des hypersurfaces cubiques linéairement indépendante de S_{3r+2}, soit $(3r+5)(3r+4)(r+1) : 2$.

Le système $|V_0|$ est dépourvu de points base, mais les hypersurfaces V_1 et V_2 passent par les axes $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ de l'homographie H.

2. Considérons la surface F intersection de r hypersurfaces V_0, de r hypersurfaces V_1 et de r hypersurfaces V_2 linéairement indépendantes. Cette surface est d'ordre 3^{3r} et rencontre chacun des espaces $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ en 3^r points. La surface F est d'autre part régulière comme intersection complète d'hypersurfaces. Dans la suite, nous ne distinguerons pas entre les genres arithmétique et géométrique.

Sur F, l'homographie H engendre une involution cyclique I du troisième ordre et cette involution possède 3^{r+1} points unis.

Soit P un point uni de l'involution I situé dans l'espace σ_0.

L'espace à $2r+2$ dimensions tangent en P aux r hypersurfaces V_1 passant par F est l'intersection de r hyperplans dont les équations ont la forme

$$\sum Y_i a_x^2 a_i = 0. \qquad (i = 0, 1, \ldots, r)$$

C'est un espace passant par σ_0, σ_2; il coupe σ_1 en un point P_1.

L'espace à $2r+2$ dimensions tangent en P aux r hypersurfaces V_2 passant par F est l'intersection de r hyperplans dont les équations sont de la forme

$$\sum Z_i a_x^2 a_1 = 0. \qquad (i = 0, 1, \ldots, r)$$

Cet espace contient σ_0 et σ_1, il coupe σ_2 en un point P_2.

L'intersection de ces deux espaces est un espace à $r+2$ dimensions qui passe par σ_0 et par les points P_1, P_2.

L'espace à $r+2$ dimensions tangent aux hypersurfaces V_0 contenant F passe par les espaces σ_1, σ_2. Il coupe l'espace précédent suivant le plan PP_1P_2. Il en résulte que les hypersurfaces V_0 ne contenant pas F et passant par P coupent F suivant des courbes ayant un point double en P et touchant en ce point les droites PP_1, PP_2. Le point P est donc un point uni de seconde espèce de l'involution I et le même raisonnement prouve qu'il en est de même de tous les points unis de l'involution.

Désignons respectivement par C_0, C_1, C_2 les courbes découpées sur F par les hypersurfaces V_0, V_1, V_2.

Les courbes C_0 ne passent pas par les points unis de l'involution. Celles qui passent par un de ces points y acquièrent un point double à tangentes fixes s'appuyant l'une sur σ_1, l'autre sur σ_2. Les courbes C_1 passent simplement par un point uni. Si ce point appartient à σ_0, elles y touchent une droite s'appuyant sur σ_1; si le point appartient à σ_1, elles y touchent une droite s'appuyant sur σ_2; si le point appartient à σ_2, la tangente est une droite s'appuyant sur σ_0.

On démontre de même que les courbes C_2 passent simplement par les points unis de l'involution. Elles y touchent respectivement une droite s'appuyant sur σ_3, ou sur σ_1, ou sur σ_2 suivant que le point appartenant à σ_0, ou à σ_1, ou à σ_2.

3. Le système canonique de F est découpé par les hypersurfaces d'ordre $9r - (3r + 3) = 3(2r - 1)$. Il coïncide donc avec le système $|(2r - 1)C|$ en désignant par $|C|$ le système des courbes découpées sur F par les hypersurfaces cubiques. On désigne par $|K|$ ce système canonique. Il contient trois systèmes linéaires composés au moyen de l'involution I. Le premier, $|K_0|$, est dépourvu de points base et les autres, $|K_1|, |K_2|$, ont pour points-base les points unis de l'involution et leurs courbes se comportent en ces points comme les courbes respectivement des systèmes $|C_1|$ et $|C_2|$. Ces systèmes peuvent être représentés par

$$|(2r-1)C_0|, \quad |(2r-2)C_0 + C_1|, \quad |(2r-2C_0 + C_2|.$$

Désignons par F′ une surface image de l'involution I et par $|K'_0|$, $|K'_1|, |K'_2|$ les systèmes de courbes qui correspondent sur F′ aux systèmes $|K_0|, |K_1|, |K_2|$. D'après la théorie des involutions, le système $|K'_0|$ est le système canonique de F′.

Entre les genres arithmétiques p_a de F et p'_a de F′ on a la relation

$$12(p_a + 1) = 3.12(p'_a + 1) - 8.3^{r+1},$$

c'est-à-dire

$$p_a + 1 = 3(p'_a + 1) - 2.3^r. \tag{1}$$

Le degré du système $|K_0|$ est égal à

$$p^{(1)} - 1 = 3^{3r+2}(2r - 1)^2,$$

donc celui de K'_0 est

$$p'^{(1)} - 1 = 3^{3r+1}(2r - 1)^2.$$

Le degré du système $|K_1|$ est

$$3^{3r+2}(2r - 1)^2 - 2.3^{r+1}$$

donc celui du système $|K'_1|$ est

$$n = 3^{3r+1}(2r - 1)^2 - 2.3^r,$$

Le genre π de la courbe K'_1 est lié à celui $p^{(1)}$ de la courbe K_1 par la formule de Zeuthen

$$6(\pi - 1) + 2.3^{r+1} = 2(p^{(1)} - 1)$$

d'où

$$\pi = 3^{3r+1}(2r - 1)^2 - 3^r + 1.$$

La dimension du système $| K'_1 |$ est donc, d'après le théorème de Riemann-Roch,

$$\rho_1 = p'_a + n - \pi + 1 = p'_a - 3^r.$$

De même, on trouve que la dimension du système $| K'_2 |$ est $\rho_2 = \rho_1$.

D'après la théorie des homographies, on doit avoir

$$p'_a - 1 + 2\rho_1 + 3 = p_a$$

d'où

$$p_a + 1 = 3(p'_a + 1) - 2.3^r,$$

c'est-à-dire la formule (1).

On voit donc que *le système canonique de* F *contient trois systèmes appartenant à l'involution* I, *l'un est le transformé du système canonique de la surface* F', *les deux autres ont pour homologues sur* F' *des systèmes de dimension inférieure à celle du système canonique.*

On voit que la différence $p'_a - \rho_1$, dans le cas actuel, n'est pas analogue à celle que nous avions trouvée dans la première note pour le cas semblable.

4. Le calcul du genre arithmétique de F n'est pas nécessaire pour notre objet. Nous le donnerons néanmoins car il se déduit immédiatement d'une formule que nous avons donnée, pour le genre arithmétique d'une surface intersection complète d'hypersurfaces, ce qui est le cas ici ([1]). On a précisément

$$p_a = \frac{1}{2}(9r^2 - 7r + 2)\,3^{3r} - 1$$

([1]) *Sur les involutions appartenant à des variétés algébriques intersections complètes d'hypersurfaces* (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1944, pp. 301-317), *Sur les surfaces intersections complètes de variétés algébriques* (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1970, pp. 865-870).

et par conséquent

$$p'_a = \frac{1}{2}(9r^2 - 7r + 2)3^{3r-1} + 2.3^r - 1.$$

II

5. Soit F une surface algébrique régulière satisfaisant aux conditions suivantes:

a) Elle contient une involution cubique cyclique I n'ayant qu'un nombre fini de points unis tous de seconde espèce.

b) Son système canonique $|K|$ est dépourvu de points-base.

c) Ce système contient trois système linéaires partiels $|K_0|$, $|K_1|$, $|K_2|$ appartenant à l'involution.

Désignons par F′ une surface image de l'involution I et par $|K'_0|$, $|K'_1|$, $|K'_2|$, les systèmes linéaires complets qui correspondent sur F′ aux systèmes $|K_0|$, $|K_1|$, $|K_2|$.

D'après la théorie des involutions, si $|K'_0|$ est le système canonique de F′, son homologue sur F, $|K_0|$, est dépourvu de points-base.

Supposons que l'involution I posséde α' points unis. Entre les genres arithmétiques p_a de F et p'_a de F′ nous avons la relation.

$$12(p_a + 1) = 3.12(p_a + 1) - 8\alpha',$$

donc α' est multiple de 3. Nous posserons $\alpha' = 3\alpha$ et nous aurons

$$p_a + 1 = 3(p'_a + 1) - 2\alpha. \tag{1}$$

Entre les genres linéaires $p^{(1)}$ de F et $p'^{(1)}$ de F′, nous avons la relation

$$p^{(1)} - 1 = 3(p'^{(1)} - 1),$$

donc $p^{(1)} - 1$ est multiple de 3 et nous poserons $p^{(1)} - 1 = 3\pi$, d'où $p'^{(1)} = \pi + 1$.

6. Rappelons qu'en un point uni de seconde espèce A, l'involution I donne une involution binaire dans le faisceau des tangentes à F en ce point (supposé simple pour la surface) et il y a deux tangentes unies. Les courbes K_1 passent par A en *y* touchant l'une de ces tangentes et les courbes K_2 touchent en A l'autre tangente.

Ceci rappelé, le degré du système $|K_1|$ est

$$p^{(1)} - 1 - 6\alpha = 3\pi - 6\alpha$$

et son genre est $p^{(1)} = 3\pi + 1$.

Le degré du système $|K_1'|$ est égal à $n' = \pi - 2\alpha$ et son genre π' est donné par la formule de Zeuthen

$$6(\pi' - 1) + 6\alpha = 6\pi,$$

et on a $\pi' = \pi - \alpha + 1$.

La dimension du système $|K_1'|$ c'est-à-dire celle du système $|K_1|$ est donnée par le théorème de Riemann-Roch,

$$\rho' \geqslant p_a' + n' - \pi' + 1 \qquad \text{ou} \qquad p_a' - \alpha.$$

La dimension ρ'' du système $|K_2|$ se calcule de même et on a

$$\rho'' \geqslant p_a' - \alpha.$$

7. Par la théorie des homographies cycliques, on doit avoir

$$p_a' - 1 + \rho' + \rho'' + 3 = p_a$$

c'est-à-dire en utilisant la formule (1),

$$\rho' + \rho'' = 2p_a' - 2\alpha.$$

Mais nous avons trouvé

$$\rho' + \rho'' \geqslant 2p_a' - 2\alpha.$$

C'est donc le signe d'égalité qui est valable et on a

$$\rho' = \rho'' = p_a' - \alpha.$$

Si une surface algébrique régulière contient une involution cyclique du troisième ordre n'ayant qu'un nombre fini de points unis tous de seconde espèce et si son système canonique est privé de points-base et contient trois systèmes linéaires partiels composés avec l'involution, le premier de ces systèmes correspond au système canonique de la surface image de l'involution et les autres ont la même dimension égale à celle du premier système diminué du tiers du nombre des points unis et d'une unité.

8. Ajoutons une simple remarque sur le comportement des courbes K_1, K_2 aux points unis de l'involution.

Considérons le modèle projectif de F dont les sections hyperplanes sont les courbes canoniques K dans un espace à $p_a - 1$ dimensions (on suppose p_a suffisamment élevé). Sur ce modèle, l'involution est engendrée par une homographie de période trois possédant trois axes σ_0, σ_1, σ_2 dont l'un, par exemple σ_0, rencontre la surface aux points unis, les autres ne la rencontrent pas.

Sur cette surface, les courbes K_0 sont découpées par les hyperplans passant par σ_1 et σ_2.

En un des 3α points unis, les deux tangentes unies s'appuient l'une sur σ_1, l'autre sur σ_2.

Les courbes K_1 sont découpées par les hyperplans passant par σ_0 et σ_2. Elles touchent donc en tout point uni la tangente s'appuyant sur σ_2. Les courbes K_2 touchent en ces points la tangente s'appuyant sur σ_1.

Liège, le 19 octobre 1970.