SUR LES PLANS DOUBLES DE GENRES UN ET DE RANG TROIS

PAR

M. Lucien Godeaux

Dans nos recherches sur les involutions n'ayant qu'un nombre fini de points de coïncidence, appartenant à des surfaces algébriques (1), nous avons étudié, en particulier, les involutions de genres un ($p_a = P_4 = 1$) appartenant à une surface de genres un également (2). Nous nous proposons d'appliquer les résultats obtenus dans cette dernière étude à la détermination des plans doubles de genres un et de rang trois, c'est-à-dire images d'une involution d'ordre 3 appartenant à une surface de genres un.

Nous arrivons au théorème suivant:

Les plans doubles de genres un dont la courbe de diramation est:

1°) *d'ordre six et possède six points doubles de rebroussement situés sur une conique, ou*

2°) *d'ordre huit et possède deux points quadruples* A_1, A_2 *et six points doubles de rebroussement. Il y a une infinité de courbes d'ordre quatre ayant deux points doubles en* A_1, A_2, *passant par*

(1) I. — *Sur les involutions douées d'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique.* («Rend. R. Accad. Lincei», 1914).

II. — *Mémoire sur les surfaces algébriques doubles, ayant un nombre fini de points de diramation* («Ann. Fac. Sc. Toulouse», 1914).

III. — *Mémoire sur les involutions appartenant à une surface de genres un* («Annales Ec. Norm. Sup.», 1914, 1919).

IV. — *Sur les involutions appartenant à une surface de genres* $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$. — *Mémoire sur les surfaces algébriques de genres zéro et de bigenre un* («Bull. Soc. Math. France», 1913, 1915).

V. — *Recherche des involutions de genres zéro, bigenre un, appartenant à une surface de genres un* («Annaes Acad. Porto», 1916).

VI. — *Recherches sur les involutions douées d'un nombre fini de points de coïncidence, appartenant à une surface algébrique* («Bull. Soc. Math. France», 1919).

(2) *Loc. cit.*, mémoire n° III.

les six points de rebroussement et touchant la courbe de diramation en deux points variables, ou

3°) *d'ordre dix et possède un point septuple* A *auquel sont infiniment voisins deux points triples* A_1, A_2, *et six points doubles de rebroussement. Il y a une infinité de courbes d'ordre six ayant un point quadruple* A, *deux points doubles infiniment voisins* A_1, A_2, *passant par les six points de rebroussement et touchant la courbe de diramation en quatre points variables, ou*

4°) *d'ordre douze, possède un point 9-uple* A *et trois points triples* A_1, A_2, A_3 *infiniment voisins de* A, *et six points doubles de rebroussement. Il y a une infinité de courbes d'ordre huit, ayant un point sextuple* A, *trois points doubles infiniment voisins* A_1, A_2, A_3, *passant par les six points de rebroussement et touchant la courbe de diramation en six points variables,*

sont les images d'involutions d'ordre trois appartenant à des surfaces de genres un.

Nous terminerons en construisant une surface contenant une involution d'ordre trois dont un plan double du premier type est l'image.

1. — Soit Φ une surface normale, de genres un $(p_a = P_4 = 1)$ et de rang trois, c'est-à-dire image d'une involution d'ordre trois appartenant à une surface F également de genres un.

Indiquons par $|\Gamma|$ le système des sections hyperplanes de Φ, par π le genre des courbes Γ. On sait qu'alors Φ est d'ordre $2\pi - 2$ et située dans un espace linéaire à π dimensions.

Nous avons démontré que [1]:

les conditions nécessaires et suffisantes pour que la surface Φ *soit de rang 3 sont :*

1°) *qu'elle possède six points de diramation qui soient des points doubles biplanaires ordinaires,*

2°) *que parmi les hypersurfaces cubiques passant par ces six points, il y en ait quelques unes osculant* Φ *en chaque point d'intersection.*

Les courbes le long desquelles ces hypersurfaces osculent Φ se distribuent en 2 systèmes linéaires $|\Gamma_1|$, $|\Gamma_2|$ de genre $\pi - 2$ et dont les courbes ont l'ordre $2\pi - 2$.

Chacun des six points doubles biplanaires équivaut à l'ensemble de deux courbes rationnelles de degré -2, ayant un point commun. Désignons par Γ_{i1}, Γ_{i2} les courbes auxquelles

(1) Mémoire n° III, chap. VIII, n° 56.

équivaut le i — ième de ces points. On a

$$3\,\Gamma \equiv 3\,\Gamma_1 + 2\,(\Gamma_{11} + \Gamma_{21} + \ldots + \Gamma_{61}) + (\Gamma_{12} + \Gamma_{22} + \ldots + \Gamma_{62}),$$

$$3\,\Gamma \equiv 3\,\Gamma_2 + (\Gamma_{11} + \Gamma_{21} + \ldots + \Gamma_{61}) + 2\,(\Gamma_{12} + \Gamma_{22} + \ldots + \Gamma_{62}).$$

2. Supposons que la surface Φ soit une surface double normale, c'est-à-dire une surface dont le système des sections hyperplanes $|\Gamma|$, considerées comme courbes doubles, soit complet.

Nous désignerons par Φ la surface, considérée comme double et ayant une certaine courbe de diramation D, et par Φ' la surface considérée comme simple. De même, Γ désignera une section hyperplane double et Γ' une section hyperplane simple.

La surface Φ' est d'ordre $\pi - 1$ et située dans un S_π. Ses sections hyperplanes Γ' sont donc des courbes rationnelles normales. Par conséquent, la courbe de diramation D de la surface double Φ est d'ordre $2\pi + 2$.

Pour que Φ soit de rang 3, elle doit d'abord posséder six points de diramation cubique.

Si un de ces points de diramation ne se trouve par sur la courbe de diramation D, c'est un point double biplanaire de la surface Φ'. Mais la surface Φ' étant d'ordre $\pi - 1$ dans S_π, est soit un cône, soit une réglée rationnelle, soit une surface de Véronèse ou une de ses projections. Or, aucune de ces surfaces ne peut posséder de point double biplanaire, par suite les points de diramation cubique de Φ sont sur la courbe D.

D'après nos recherches antérieures, les sections hyperplanes de Φ passant par un point de diramation cubique P ont le genre abaissé d'une unité, donc ces points sont des points doubles de D. De plus, il y a $\infty^{\pi-2}$ sections hyperplanes Γ, de genre $\pi - 1$, passant par P, formant un système linéaire de degré effectif $2\pi - 5$. Par conséquent, P est un point de rebroussement de D.

Les six points de diramation cubique de Φ sont des points doubles de rebroussement de la courbe de diramation D.

3. Désignons par θ la transformation birationnelle de Φ en elle-même, induite par la surface double, c'est-à-dire la transformation qui fait correspondre les deux points de Φ superposés sur un point de Φ'.

([1]) Mémoire n° III, chap. IV.

θ transforme $|\Gamma|$ en lui-même, donc également $|3\Gamma|$. D'autre part, les points de diramation cubique de Φ étant sur D, θ transforme également en lui-même le système

$$|3\Gamma-(\Gamma_{11}+\Gamma_{21}+\ldots+\Gamma_{61})-(\Gamma_{12}+\Gamma_{22}+\ldots+\Gamma_{62})|$$

c'est-à-dire

$$|3\Gamma_1+\Gamma_{11}+\Gamma_{21}+\ldots+\Gamma_{61}|,$$

ou

$$|3\Gamma_2+\Gamma_{12}+\Gamma_{22}+\ldots+\Gamma_{62}|.$$

On en conclut que θ transforme en lui-même chacun des systèmes $|\Gamma_2|$, $|\Gamma_2|$, ou bien que cette transformation échange ces systèmes entre eux.

Plaçons-nous dans la première hypothèse.

Le système $|\Gamma_1|$ étant invariant pour θ possède quelques courbes (au moins deux) invariantes pour cette transformation.

Supposons que l'une de ces courbes ne soit pas, en tout ou en partie, une composante de D. Alors, il lui correspondant, sur Φ, une courbe double ayant $2\pi-2$ points communs avec Γ, c'est-à-dire, sur Φ', une courbe simple d'ordre $\pi-1$ (passant d'ailleurs par les six points de diramation cubique). Mais alors, cette courbe serait nécessairement une section hyperplane de Φ', ce qui est absurde. On en conclut que si les systèmes $|\Gamma_1|$, $|\Gamma_2|$ sont transformés en eux-mêmes par θ, les courbes de ces systèmes, invariantes pour θ, sont au moins en partie, les composantes de la courbe de diramation D.

Ces composantes sont d'ailleurs au nombre de quatre au moins (deux provenant de chacun des systèmes $|\Gamma_1|$, $|\Gamma_2|$) et ces quatre courbes passent par les six points de diramation cubique. Il ne résulte que ces six points sont au moins quadruples pour la courbe de diramation D et que, par conséquent, les courbes Γ passant par un pareil point, auraient un genre au plus égal à $\pi-2$. Or, ainsi que nous l'avons rappelé plus haut, ce genre doit être égal à $\pi-1$. L'hypothèse que nous avons faite doit donc être repetée et ou en conclut que θ change $|\Gamma_1|$ en $|\Gamma_2|$.

Remarquons que cela implique que θ transforme Γ_{i1} en Γ_{i2}, puisque

$$|3\Gamma_1+\Gamma_{11}+\ldots+\Gamma_{61}|$$

est invariant pour cette transformation.

A une courbe Γ_1 (ou Γ_2) correspond, sur Φ', une courbe Γ_0

d'ordre $2\pi-2$, passant par les six points de diramation cubique et qui touche la courbe de diramation D en chaque point de la courbe d'intersection (puisqu'il lui correspond sur Φ une courbe dégénérée $\Gamma_1+\Gamma_2$). A chacun de ces points de contact correspond un point commun aux deux courbes Γ_1, Γ_2 correspondantes, le nombre de ces points de contact est donc on plus égal à $2\pi-4$.

Le degré effectif du système $\{\Gamma_0\}$ est égal au degré $2\pi-6$ de $|\Gamma_1|$ augmenté du nombre des points d'intersection $2\pi-4$ des courbes Γ_1, Γ_2. Ce degré est donc égal à $4\pi-10$.

Les courbes Γ_0 passent par les points de diramation cubique, mais sous y toucher nécessairement la tangente de rebroussement, car les courbes Γ_1 (ou Γ_2) ne passent pas, en général, par le point commun aux deux droites Γ_{i1}, Γ_{i2}.

En résumé:

Il existe, sur la surface Φ', *un système* $\{\Gamma_0\}$, *de degré effectif* $4\pi-10$, *dont les courbes passent par les six points de diramation cubique et touchent la courbe de diramation* D *en chaque point d'intersection.*

4. Projettons Φ' sur un plan φ de $\pi-2$ de ses points, et indiquons par les mêmes lettres les courbes qui, sur φ, correspondent aux courbes Γ', D, Γ_0.

Φ est ainsi transformée en un plan double dont la courbe de diramation est D, d'ordre $2\pi+2$. Cette courbe possède six points doubles de rebroussement qui sont les points de diramation cubique.

Les courbes Γ' sont d'ordre $\pi-1$, les courbes Γ_0 d'ordre $2\pi-2$ et touchent D en chaque point d'intersection.

Appliquons les résultats précédents aux plans doubles de genres un. On sait que ceux-ci se ramènent à quatre types, déterminés par M. Enriques [1]. Ce sont:

I. — *Plan double dont la courbe de diramation est d'ordre six.*

II. — *Plan double dont la courbe de diramation est d'ordre huit et possède deux points quadruples distincts ou infiniment voisins.*

III. — *Plan double dont la courbe de diramation est d'ordre dix et possède un point multiple d'ordre sept ayant deux points triples infiniment voisins distincts.*

IV. — *Plan double dont la courbe de diramation est d'ordre douze et possède un point* q — uple *ayant trois points triples infiniment voisins distincts.*

---

[1] *Sui piani doppi di genere uno* («Mem. Soc. It. delle Sc.», 1896).

5. Supposons que Φ soit un plan double du premier type. On a $\pi = 2$. Les courbes Γ' sont des droites, la courbe Γ_0 est une conique isolée, de degré -2, passant par les six points de rebroussement de D.

6. Supposons que Φ soit transformée en un plan double du deuxième type, et soient A_1, A_2 les deux points quadruples de la courbe de diramation D. On a $\pi = 3$; les courbes Γ' sont des coniques passant par A_1, A_2 et les courbes Γ_0 des quartiques passant par les six points de rebroussement, ayant deux points doubles en A_1, A_2 et touchant D en deux points variables.

7. Si Φ se réduit à un plan double du troisième type, on a $\pi = 4$. Soient A le point septuple, A_1, A_2 les deux points triples infiniment voisins, de la courbe D, d'ordre dix.

Les courbes Γ' sont des cubiques ayant un point double en A et passant par A_1, A_2. Les courbes Γ_0 sont des sextiques ayant un point quadruple en A et deux points doubles A_1, A_2, infiniment voisins, passant par les six points de rebroussement de D et touchant cette courbe en quatre points variables. Il y a ∞^2 de ces courbes Γ_0.

8. Supposons enfin que Φ se réduise à un plan double du quatrième type, dont la courbe de diramation D possède un point q-uple A et trois points triples infiniment voisins distincts A_1, A_2, A_3. On a $\pi = 5$.

Les courbes Γ' sont d'ordre 4, ont un point triple un A et passent par A_1, A_2, A_3.

Les courbes Γ_0 sont d'ordre 8 et ont un point sextuple A et trois points doubles A_1, A_2, A_3. Elles passent par les six points de rebroussement de D et touchent cette courbe en six points variables. Ces courbes Γ_0 sont ∞^3.

On arrive ainsi aux conditions, nécessaires et suffisantes, pour qu'un plan double de genres un soit de rang trois, énoncées dans le préambule.

9. Nous terminerons en construisant une surface de genres un, d'ordre six, située dans un S_4, contenant une involution d'ordre trois dont un plan double du premier type est l'image.

Considérons la surface F, située dans un S_4, de coordonnées homogènes x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, représentées par les équations

$$\Psi_2(x_0, x_1, x_2) + x_3 x_4 = 0 \tag{1}$$

$$\Psi'_3(x_0, x_1, x_2) + x_3 x_4 \Psi_1(x_0, x_1, x_2) + a x_3^3 + b x_4^3 = 0, \tag{2}$$

où les fonctions Ψ sont homogènes en x_0, x_1, x_2, de degré égal à l'indice.

Cette surface est du sixième ordre et de genres un ($p_a = P_4 = 1$). Remarquons que l'équation (2), moyennant (1) peut s'écrire

$$\Psi'_3(x_0, x_1, x_2) - \Psi_1(x_0, x_1, x_2)\,\Psi_2(x_0, x_1, x_2) + a x_3^3 + b x_4^3 = 0.$$

Nous pouvons donc supposer que les équations de la surface F sont écrites sous la forme

$$\Psi_2(x_0, x_1, x_2) + x_3 x_4 = 0, \tag{1}$$

$$\Psi_3(x_0, x_1, x_2) + a x_3^3 + b x_4^3 = 0. \tag{3}$$

La surface F est transformée en elle-même par la transformation T:

(T) $$\frac{x'_0}{x_0} = \frac{x'_1}{x_1} = \frac{x'_2}{x_2} = \frac{x'_3}{\varepsilon x_3} = \frac{x'_4}{\varepsilon^2 x_4},$$

où $\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ est une racine cubique primitive de l'unité.

La trrnsformation T a trois éléments unis, à savoir deux points A_1, A_2 et un plan A_3 respectivement d'équations

$$x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = 0, \tag{A_1}$$

$$x_0 = x_1 = x_2 = x_4 = 0, \tag{A_2}$$

$$x_3 = x_4 = 0. \tag{A_3}$$

Sur la surface F, l'involution I_3, d'ordre 3, engendrée par T, possède six points unis qui sont les intersections de F avec le plan A_3. Cette involution est donc de genres un [1].

La surface F possède une transformation birationnelle involutive T_1 en elle-même:

(T_1) $$\frac{x'_0}{\alpha\beta x_0} = \frac{x'_1}{\alpha\beta x_1} = \frac{x'_2}{\alpha\beta x_2} = \frac{x'_3}{\beta^2 x_4} = \frac{x'_4}{\alpha^2 x_3},$$

où l'on a posé $\alpha = a^{\frac{1}{3}}$, $\beta = b^{\frac{1}{3}}$.

T_1 est une homologie involutive qui a un point B_1

$$x_0 = x_1 = x_2 = \alpha x_3 + \beta x_4 = 0 \tag{B_1}$$

[1] Mémoire III, chap. IV.

et un hyperplan B_2

$$\alpha x_3 = \beta x_4, \tag{B_2}$$

unis.

B_1 est situé sur la droite $A_1 A_2$ et l'hyperplan B_2 passe par le plan A_2.

L'involution I_2, d'ordre 2, engendrée par T_1, sur F, possède une courbe unie, intersection de F et du plan B_2, cette involution est donc rationnelle.

Rapportons projectivement aux droites d'un plan les sections de F par les hyperplans

$$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = 0,$$

en posant, par exemple,

$$x = \frac{x_1}{x_0}, \quad y = \frac{x_2}{x_0}.$$

Nous obtenons ainsi une correspondance (1, 6) entre le plan (x, y) et la surface F. Mais nous pouvons imaginer un plan double en correspondance (1, 3) avec F, c'est-à-dire un plan double image de l'involution I_3 engendrée sur F par T. La courbe de diramation de ce plan double correspondra à la section de F par l'hyperplan B_2. Un calcul simple montre que l'équation de cette courbe de diramation est :

$$[\Psi_3 (1, x, y)]^2 + 4\alpha^3 \beta^3 [\Psi_2 (1, x, y)]^3 = 0. \tag{4}$$

Les sections de F par les hyperplans $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ sont invariantes pour T et échangées entre elles par T_1. Il leur correspond, sur le plan double, une conique d'équation

$$\Psi_2 (1, x, y) = 0. \tag{5}$$

Reportons nous maintenant à ce qui a été établi aux nos 4, 5. La courbe de diramation (4) est la courbe D et la conique (5) est la courbe Γ_0.

Les points d'intersection des courbes (4), (5) doivent être des points doubles de rebroussement. On voit immédiatement qu'il en est ainsi, ces points correspondant aux intersections de la courbe (5) avec la courbe

$$[\Psi_3 (1, x, y)]^2 = 0.$$

Le plan double de genres un

$$\{\, x,\ y,\ \sqrt{[\Psi_3\ (1,\ x,\ y)]^2 + 4\,\alpha^3\,\beta^3\,[\Psi_2\ (1,\ x,\ y)]^3}\,\}$$

est l'image d'une involution d'ordre 3, appartenant à une surfaee de genres un.

Polygône de Brasschaet, 20 novembre 1919.